Unità Didattica N°35

Teorema di Talete e sue applicazioni

01) Teorema di talete

02) Corollario

03) Inverso del teorema di Talete

04) Teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo

05) Inverso del teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo

06) Teorema della bisettrice dell'angolo esterno

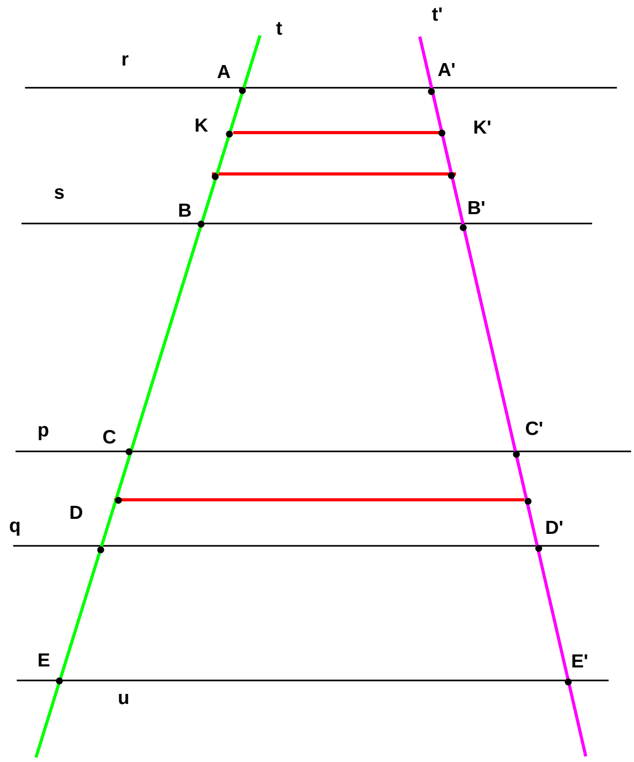
07) Diametro della circonferenza circoscritta ad un triangolo

Secondo teorema di Talete

Un fascio di rette parallele determina, sopra due trasversali, due classi di segmenti (direttamente) proporzionali.

Hp: $r // s // p // u$

Th: $AB:CD = A'B':C'D'$



Dimostrazione

Supponiamo che i segmenti AB e CD siano commensurabili e sia, ad esempio, $\frac{3}{2}$ il loro rapporto: $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$.

Questo significa che esiste un segmento AK contenuto 3 volte in AB e 2 volte in CD . Conducendo per i punti di divisione le rette parallele alle rette del fascio, ricordando il primo teorema di Talete , deduciamo che esiste un segmento ($A'K'$) contenuto 3 volte in $A'B'$ e 2 volte in $C'D'$. Questo ci consente di scrivere: $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{2}$

$$\left[\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2} ; \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{2} \right] \quad \Rightarrow \quad AB:CD = A'B':C'D'$$

Osservazione

Si chiamano corrispondenti due punti **(come A ed** A') delle due trasversali che appartengono ad una stessa retta del fascio, e corrispondenti un segmento di una trasversale ed uno dell'altra che abbiano per estremi punti corrispondenti.

Teorema inverso del secondo teorema di Talete

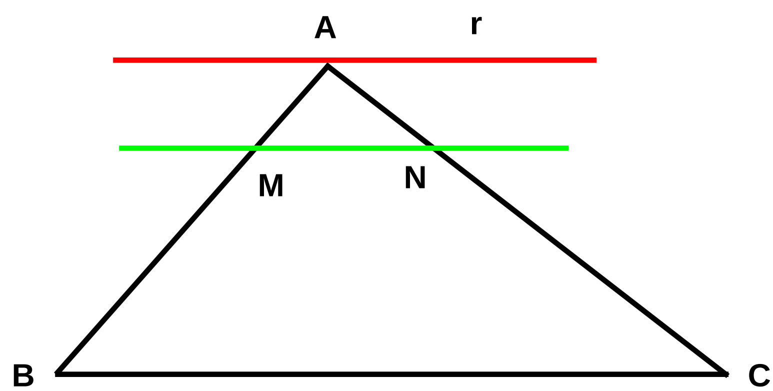
Se sopra due rette sono dati dei punti che si corrispondono in modo che i segmenti determinati da essi sulla prima retta sono proporzionali ai corrispondenti segmenti della seconda, e se inoltre sono parallele le rette che congiungono due coppie di punti corrispondenti, allora sono parallele anche le rette che congiungono le altre coppie di punti corrispondenti. **Hp:** $AB:BC = A'B':B'C'$, $r // s$ **Th**: $r // s // p // q // u$

Corollario del secondo teorema di Talete

La parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali:

Hp: $MN // BC$

Th: $AM : MB = AN : NC$



Dimostrazione

Per il vertice A traccio la retta r, parallela al lato BC. Per il secondo teorema di Talete , applicato alle rette parallele r , MN , BC tagliate dalle trasversali AB ed AC , avremo :

$AM : MB = AN : NC$ ed anche : $AB : AM = AC : AN$, $AB : MB = AC : NC$

Inverso del corollario del secondo teorema di Talete

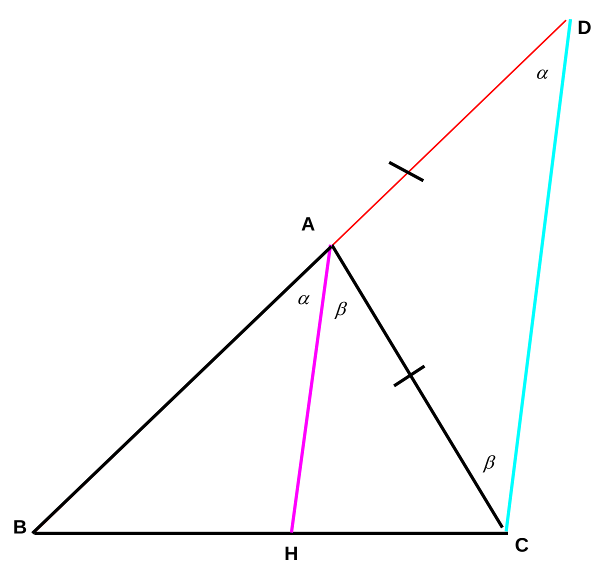
Se una retta divide due lati di un triangolo in parti proporzionali, allora essa è parallela al terzo lato. **Hp**: $AM : MB = AN : NC$ **Th**: $MN // BC$

Teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo

In un triangolo qualsiasi, la bisettrice di ciascun angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

Hp : $B\hat{A}H = H\hat{A}C$

Th : $BH : HC = AB : AC$



Dimostrazione

Sia AH la bisettrice dell'angolo interno $B\hat{A}C$ del triangolo ABC . La retta passante per C e parallela alla bisettrice AH incontra il prolungamento del alto AB nel punto D.

$A\hat{D}C = B\hat{A}H = \alpha$ perché angoli corrispondenti rispetto alle parallele AH e CD tagliate dalla trasversale BD .

$A\hat{C}D = H\hat{A}C = \beta$ perché angoli alterno-interni rispetto alle rette parallele AH e CD tagliate dalla trasversale AC . $\alpha = \beta$ per ipotesi $\Rightarrow$ $AD = AC$

Per il corollario del secondo teorema di Talete sussiste la seguente proporzione:

$$BH : HC = AB : AD \quad \text{cioè} \quad BH : HC = AB : AC$$

Osservazione importante

$BH : HC = AB : AC \Rightarrow (BH + HC) : BH = (AB + AC) : AB$ ($BH + HC = BC$)

$BC : BH = (AB + AC) : AB \Rightarrow$ $\mathbf{BH = \dfrac{BC \cdot AB}{AB + AC}}$

$(BH + HC) : HC = (AB + AC) : AC \Rightarrow$ $\mathbf{HC = \dfrac{BC \cdot AC}{AB + BC}}$

Cioè, noti i tre lati di un triangolo, possiamo calcolare i segmenti BH ed HC intercettati sul lato BC dalla bisettrice AH .

Teorema inverso del teorema della bisettrice dell'angolo interno

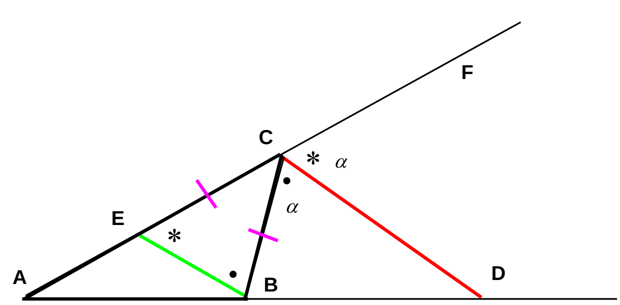
Se in un triangolo un punto H divide un lato (ad esempio BC) in parti proporzionali agli altri due lati , allora il segmento AH congiungente questo punto H col vertice A dell'angolo opposto è bisettrice di questo angolo $\hat{A}$. **Hp:** $BH : HC = AB : AC$ **Th:** $B\hat{A}H = H\hat{A}C$

Teorema della bisettrice dell'angolo esterno

Se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo incontra il prolungamento del lato opposto, le distanze del punto d'intersezione dagli estremi di tale lato, sono proporzionali agli altri due lati.

Hp : $B\hat{C}D = D\hat{C}F = \alpha$

Th : $AD : BD = AC : CB$



Per il punto B tracciamo la parallela BE alla bisettrice DE dell'angolo esterno $B\hat{C}F$ del triangolo ABC .

$B\hat{E}C = D\hat{C}F = \alpha$ perché angoli corrispondenti rispetto alle parallele BE e CD tagliate dalla trasversale AF . $C\hat{B}E = B\hat{C}D = \alpha$ perché angoli alterno-interni rispetto alle parallele BE e CD tagliate dalla trasversale BC .

$C\hat{B}E = C\hat{E}B = \alpha \Rightarrow CE = CB$; $BE // CD \Rightarrow AD : BD = AC : CE$; $AD : BD = AC : CB$