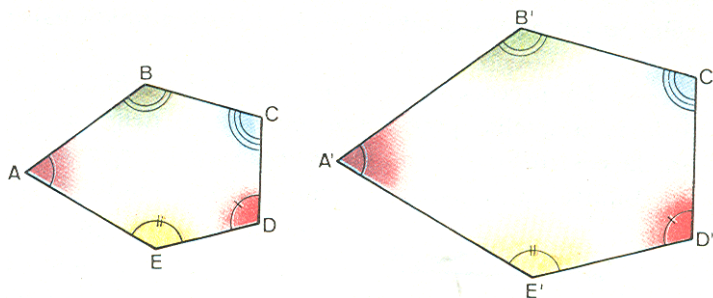


Unità Didattica N°36**La similitudine**

- 01) Definizione di poligoni simili**
- 02) Definizione di triangoli simili**
- 03) Primo criterio di similitudine dei triangoli**
- 04) Secondo criterio di similitudine dei triangoli**
- 05) Terzo criterio di similitudine dei triangoli**
- 06) Poligoni simili : teorema dei perimetri**
- 07) Poligoni simili : teorema delle aree**
- 08) Decomposizione di poligoni simili in triangoli simili**
- 09) Teorema delle corde**
- 10) Teorema delle secanti**
- 11) Teorema della tangente e della secante**
- 12) Primo teorema di Euclide**
- 13) Secondo teorema di Euclide**
- 14) Teorema di Pitagora**
- 15) Sezione aurea di un segmento**

Definizione di poligoni simili

Due poligoni aventi lo stesso numero di lati si dicono simili quando hanno gli angoli ordinatamente uguali ed i lati omologhi in proporzione. Nei poligoni simili chiameremo angoli omologhi o corrispondenti gli angoli uguali, chiameremo omologhi o corrispondenti i lati che si oppongono ad angoli uguali.

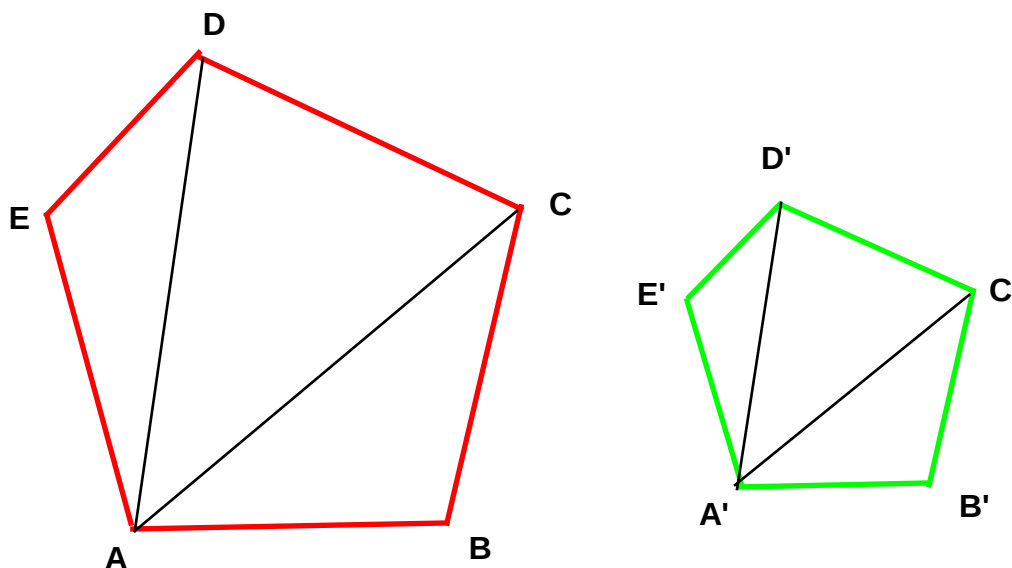


$$ABCDE \sim A'B'C'D'E' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}', \hat{E} = \hat{E}' \\ AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A' \end{cases}$$

Il rapporto costante tra due lati omologhi di due triangoli simili prende il nome di **rapporto di similitudine**.

- Se due poligoni sono simili ad un terzo poligono essi sono simili fra loro

Teorema: Se da due vertici omologhi di due poligoni simili conduciamo tutte le diagonali, allora otteniamo triangoli ordinatamente simili.



Hp: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ **Th:** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$

Teorema:

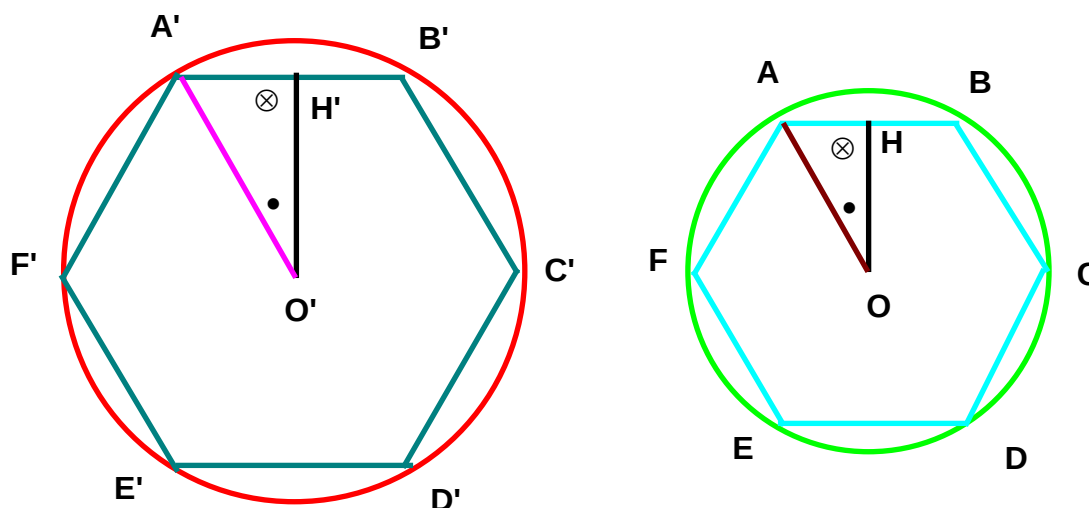
Le aree di due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati delle misure dei lati omologhi

Teorema:

I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro come due lati omologhi qualsiasi

Teorema:

I perimetri di due poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati stanno tra loro come i rispettivi raggi ed i rispettivi apotemi



Hp: $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ sono poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati

Th: $p(ABCDEF) : p(A'B'C'D'E'F') = AO : A'O = OH : O'H'$

Teorema:

Le aree di due poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi raggi e dei rispettivi apotemi

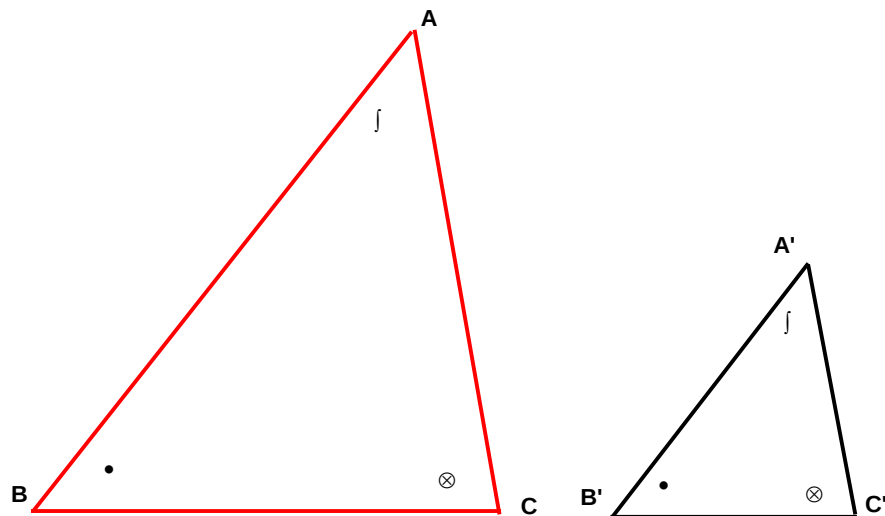
Hp: $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ sono poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati

Th: $S(ABCDEF) : S(A'B'C'D'E'F') = AO^2 : A'O'^2 = OH^2 : O'H'^2$

Criterio generale di similitudine per i triangoli

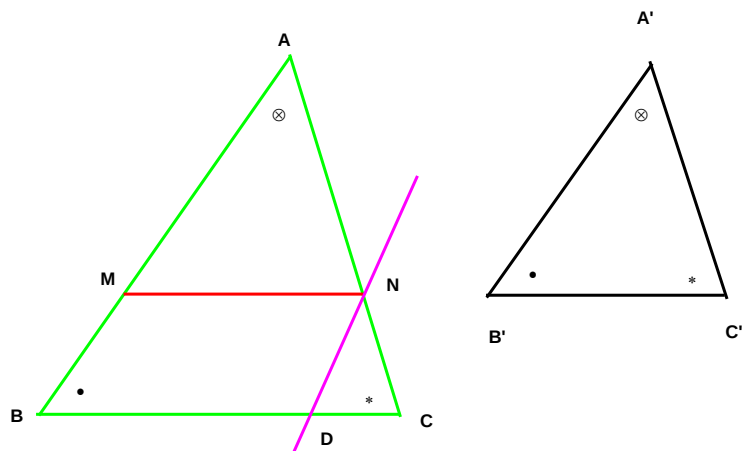
Due triangoli si dicono simili se hanno gli angoli uguali ed i lati omologhi in proporzione.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \\ AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A' \end{cases}$$



Primo criterio di similitudine dei triangoli

Due triangoli aventi gli angoli omologhi uguali sono simili.



Hp : $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ **Th** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ cioè : $AB : A'B' = BC : A'C' = CA : C'A'$

Dimostrazione:

Se risulta $AB = A'B'$ i triangoli ABC ed $A'B'C'$ sono simili in quanto uguali (secondo criterio di uguaglianza dei triangoli) .

Se $AB \neq A'B'$ possiamo supporre $AB > A'B'$ e prendere, sul lato AB , il punto M in modo che risulti : $AM = A'B'$. Da M conduco la parallela MN al lato BC .

$$\begin{cases} AM = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{AMN} = \hat{ABC} = \hat{A'B'C'} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMN = \triangle A'B'C' \Rightarrow AN = A'C' \wedge MN = B'C'$$

Applicando il secondo teorema di Talete posso scrivere: $AB : AM = AC : AN$ e quindi anche:

$$AB : A'B' = AC : A'C' \quad [1]$$

Applicando nuovamente il secondo teorema di Talete possiamo scrivere:

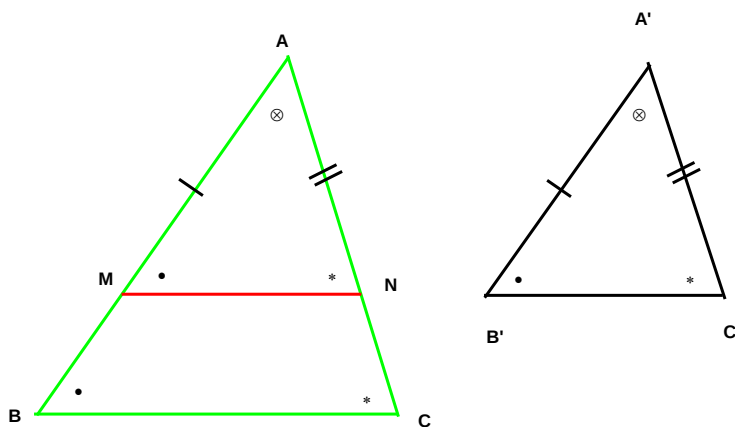
$$AC : AN = BC : BD \quad AC : AN = BC : MN \quad AC : A'C' = BC : B'C' \quad [2]$$

Tenendo presente le [1] e [2] otteniamo : $AB : A'B' = BC : A'C' = CA : C'A'$

Secondo criterio di similitudine dei triangoli

Due triangoli sono simili se hanno due lati omologhi in proporzione e gli angoli tra essi compresi uguali.

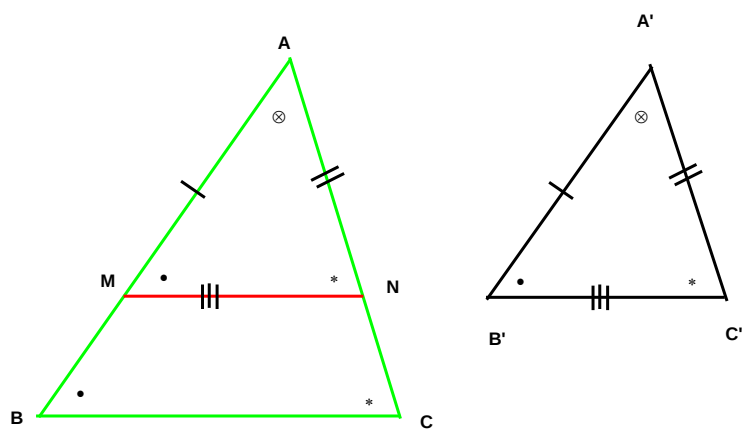
$$\text{Hp : } \begin{cases} AB : A'B' = AC : A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \quad \text{Th : } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



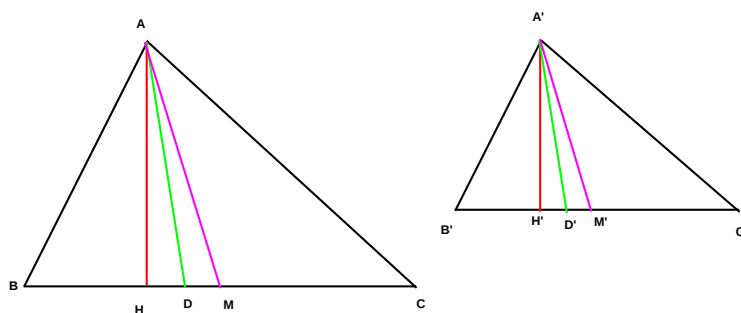
Terzo criterio di similitudine dei triangoli

Due triangoli sono simili se hanno i lati omologhi in proporzione

$$\text{Hp: } AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A' \quad \text{Th: } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{cioè : } \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$$



Teorema: In due triangoli simili le altezze, le bisettrici, le mediane omologhe stanno tra loro come due lati omologhi.



Hp: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ $AH \perp BC$, $A'H' \perp B'C'$, $\hat{B}AD = \hat{D}AC$, $B'\hat{A}'D' = D'\hat{A}'C'$,
 $BM = MC$, $B'M' = M'C'$

Th: $AH : A'H' = AD : A'D' = AM : A'M' = ABA'B' = ACA'C' = BC : B'C'$

Teorema: I perimetri di due triangoli simili stanno tra loro come due lati omologhi qualsiasi.

Th: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ **Th:** $p(\triangle ABC) : p(\triangle A'B'C') = AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$

Dimostrazione: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$

Applicando il componendo abbiamo:

$$(AB + AC + BC) : (A'B' + A'C' + B'C') = AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$$

$$p(\triangle ABC) : p(\triangle A'B'C') = AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$$

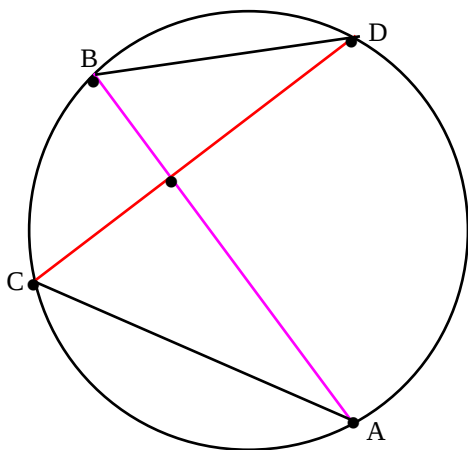
Teorema: Le aree di due triangoli simili stanno tra loro come i quadrati di due qualsiasi lati omologhi.

Hp: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ **Th:** $S(\triangle ABC) : S(\triangle A'B'C') = AB^2 : A'B'^2 = BC^2 : B'C'^2 = CA^2 : C'A'^2$

Teorema delle corde

Se due corde di una stessa circonferenza s'intersecano in un punto P, questi divide ciascuna corda in due segmenti che sono medi ed estremi di una medesima proporzione.

Con parole diverse possiamo affermare che il **prodotto** (delle misure) **dei segmenti individuati su di una corda è uguale al prodotto** (delle misure) **dei segmenti individuati sull'altra corda**.



$$Hp \begin{cases} AB \cap CD = \{P\} \\ AB \text{ e } CD \text{ corde di una stessa circonferenza} \end{cases}$$

$$Th = \begin{cases} AP : PD = CP : PB \\ oppure \\ AP \cdot PB = CP \cdot PD \end{cases}$$

I triangoli APC e PBD sono simili per avere :

- 1) $\widehat{PCA} = \widehat{PBD}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{AD}$
- 2) $\widehat{APC} = \widehat{BPD}$ perché angolo opposti al vertice

Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione:

$$AP : PD = CP : PB \quad \text{e quindi anche} \quad AP \cdot PB = CP \cdot PD$$

Teorema delle secanti

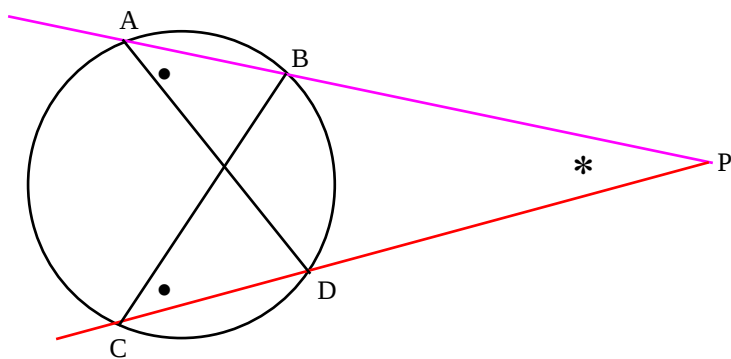
Se da un punto P esterno ad una circonferenza conduciamo due secanti, le secanti intere e le parti esterne formano una proporzione i cui medi ed i cui estremi sono segmenti di una medesima secante.

Congiungo A con D e B con C. I triangoli APD e BPC sono simili per avere:

- 1) $\widehat{PAD} = \widehat{PCB}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{BD}$.
- 2) $\widehat{APD} = \widehat{BPC}$ perché in comune

Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione:

$$PA : PC = PD : PB \quad \text{e quindi anche} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

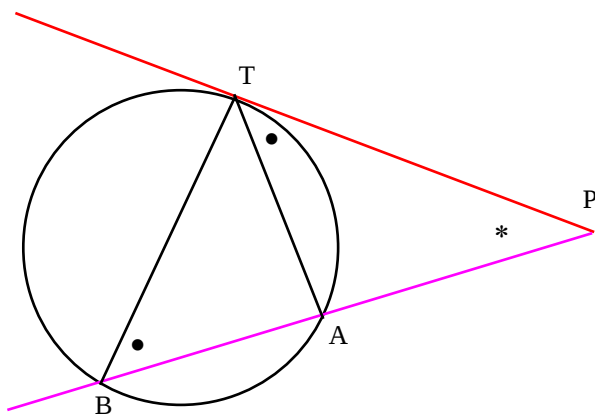


$$HP = \{AB \cap CD = \{P\}\}$$

$$TH = \begin{cases} PA : PC = PD : PB \\ \text{oppure} \\ PA \cdot PB = PC \cdot PD \end{cases}$$

Teorema della tangente e della secante

Se da un punto P , esterno ad una circonferenza conduciamo una tangente ed una secante, il segmento di tangente che ha per estremi il punto dato P ed il punto di tangenza T è medio proporzionale fra l'intera secante PB e la sua parte esterna PA .



$$TH = \begin{cases} PB : PT = PT : PA \\ \text{oppure} \\ PT^2 = PB \cdot PA \end{cases}$$

I triangoli PTB e PTA sono simili per avere:

1) $\hat{PBT} = \hat{PTA}$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AT

2) $\hat{TPB} = \hat{TPA}$ perché in comune

Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione:

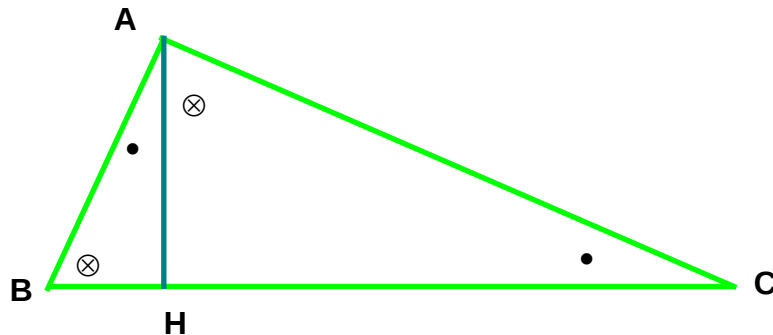
$$PB : PT = PT : PA$$

e quindi anche

$$PT^2 = PB \cdot PA$$

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.



Hp: $\hat{B}AC = 90^\circ \wedge AH \perp BC$ **Th:** $BC : AB = AB : BH \wedge BC : AC = AC : HC$

Dimostrazione

I triangoli ABC e ABH sono simili per avere:

- 1) $\hat{B}AC = \hat{A}HB$ perché entrambi angoli retti
- 2) $\hat{A}BC = \hat{A}BH$ perché in comune

Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione: $BC : AB = AB : BH$

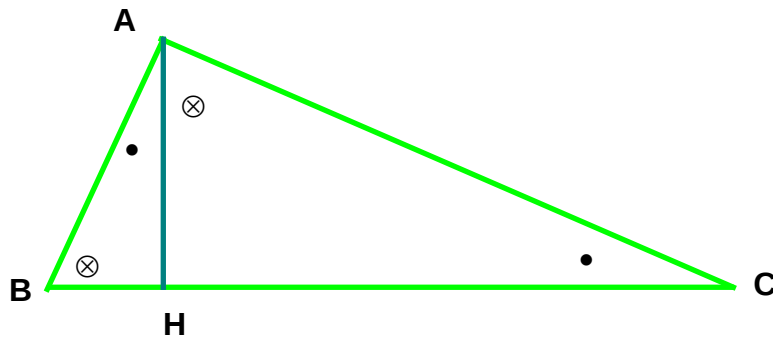
$\triangle ABC \sim \triangle AHC$ per avere:

- 1) $\hat{B}AC = \hat{A}HC$ perché entrambi angoli retti
- 2) $\hat{A}CB = \hat{A}CH$ perché in comune

Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione: $BC : AC = AC : HC$

Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Hp: $\hat{BAC} = 90^\circ \wedge AH \perp BC$ **Th:** $BH : AH = AH : HC$

Dimostrazione: $\triangle ABH \sim \triangle AHC$ per avere:

1) $\hat{AHB} = \hat{AHC}$ perché entrambi retti

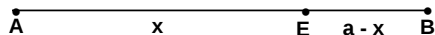
2) $\hat{ABH} = \hat{HAC}$ perché complementari dello stesso angolo $\hat{BAH}$.

Ai lati omologhi posso applicare la seguente proporzione: $BH : AH = AH : HC$

Sezione aurea di un segmento

Si definisce **sezione aurea** di un segmento quella parte del segmento media proporzionale fra tutto il segmento e la parte rimanente.

Consideriamo il segmento AB ed un suo punto E .



Se risulta: $AB : AE = AE : EB$ $[\rho]$ allora il segmento AE rappresenta la sezione aurea del segmento AB .

Calcolare la sezione aurea del segmento $AB = a$. Pongo $AE = x$, ottengo :

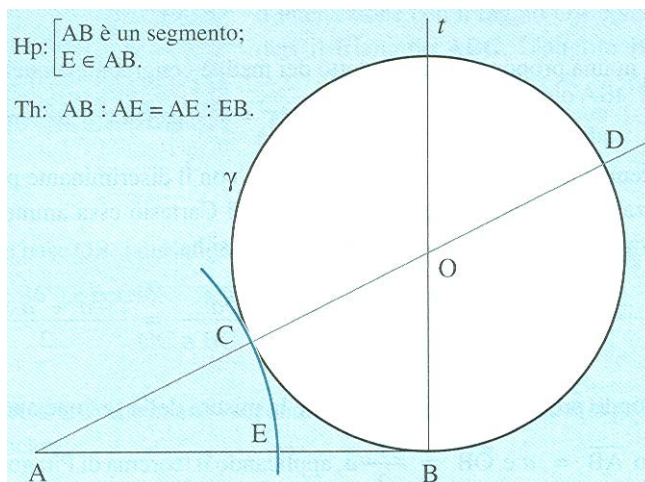
$$EB = a - x. \text{ Sostituisco nella } [\rho] : a : x = x : (a - x) \quad x^2 = a(a - x) \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}a & (R.N.A.) \\ \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a \end{cases} \quad AE = x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a \quad \text{rappresenta la sezione aurea del segmento } AB = a.$$

Costruzione della sezione aurea di un segmento

Indicato con AB il segmento assegnato, costruisco la perpendicolare t ad AB passante per il punto B . Su tale retta descrivo la circonferenza σ di centro O e raggio $OB = \frac{1}{2}AB$. La retta AO incontra la circonferenza σ nei punti C e D .

La circonferenza di centro A e raggio AC incontra il segmento AB nel punto E .



Dico che il segmento AE rappresenta la sezione aurea del segmento AB . Infatti, per il teorema della tangente e della secante possiamo scrivere la seguente proporzione : $AD:AB=AB:AC$

Applicando la proprietà dello scomponendo otteniamo : $(AD-AB):AB=(AB-AC):AC$

Osservando che : $AD-AB=AD-CD=AC=AE$ $AB-AC=AB-AE=EB$ otteniamo:

$AE:AB=EB:AE$ Invertendo ogni antecedente con il corrispondente conseguente otteniamo:

$AB:AE=AE:EB$ che è la proporzione che dovevamo dimostrare.

Lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza

Il lato del decagono regolare inscritto in un circonferenza di raggio r è uguale alla sezione aurea del suo raggio r .

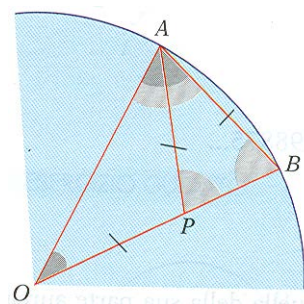
Dimostrazione

Sia AB il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro O e raggio $r = OB$

Il triangolo AOB è isoscele sulla base AB .

$$\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ \quad \hat{ABO} = \hat{BAO} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Sia AP la bisettrice dell'angolo interno $\hat{OAB}$ del triangolo AOB . Risulta:



$\hat{P}AB = 36^\circ$ $\hat{A}PB = \hat{A}BP = 72^\circ$ Il triangolo ABP è isoscele sulla base PB , mentre il triangolo APO è isoscele sulla base AO . Ne consegue che: $OP = PB = AP$

Applicando al triangolo AOB il teorema della bisettrice dell'angolo interno abbiamo:

$$AO:AB=OP:PB \quad OB:OP=OP:PB$$

$$OP = PA = AB = \ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r \quad \text{è la sezione aurea del raggio}$$

Per inscrivere in una circonferenza di raggio r il decagono regolare basta determinare, con la costruzione indicata in figura, la sezione aurea del raggio e riportare successivamente sulla circonferenza dieci corde uguali a tale sezione aurea.

Il poligono $ACEGI$ è il pentagono regolare inscritto nella circonferenza.

Osservazione

$$a_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \text{apotema del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio } r$$

$$\ell_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \text{lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio } r$$

$$a_5 = \frac{r}{4}(1+\sqrt{5}) = \text{apotema del pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio } r$$

$$\ell_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r$$

