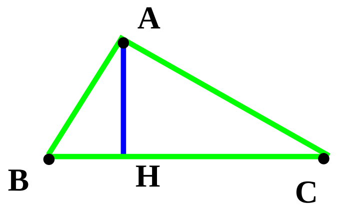
Unità Didattica N°37

Applicazioni dell’algebra alla geometria

Triangolo rettangolo

Primo Teorema di Euclide

$$AB^2 = BH \cdot BC \qquad AB = \sqrt{BH \cdot BC} \qquad BH = \frac{AB^2}{BC} \qquad BC = \frac{AB^2}{BH}$$



$$AB^2 = BH \cdot BC \qquad AB = \sqrt{BH \cdot BC} \qquad BH = \frac{AB^2}{BC} \qquad BC = \frac{AB^2}{BH}$$

$$AC^2 = HC \cdot CB \qquad AC = \sqrt{HC \cdot CB} \qquad HC = \frac{AC^2}{CB} \qquad BC = \frac{AC^2}{HC}$$

Teorema di Pitagora

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \quad AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \quad AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} \qquad S(ABC) = \frac{BC \cdot AH}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AH}{2} \qquad \frac{AB \cdot AC}{\cancel{2}} = \frac{BC \cdot AH}{\cancel{2}}$$

$$AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} \qquad \frac{cateto \cdot cateto}{ipotenusa} =$$ altezza relativa all'ipotenusa

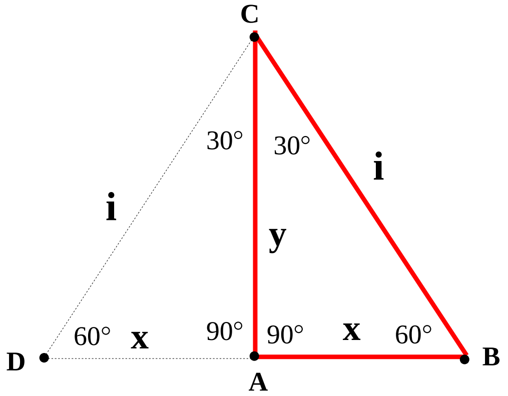
$$AB = \frac{BC \cdot AH}{AC} \qquad AC = \frac{BC \cdot AH}{AB} \qquad BC = \frac{AB \cdot AC}{AH}$$

Secondo teorema di Euclide

$$AH^2 = BH \cdot HC \qquad AH = \sqrt{BH \cdot HC} \qquad BH = \frac{AH^2}{HC} \qquad HC = \frac{AH^2}{BH}$$

Triangoli rettangoli con angoli acuti di $30°$ e $60°$

Dalla figura si deduce facilmente che: <<**in ogni triangolo rettangolo il cateto che si oppone all'angolo di $30°$ è metà ipotenusa**>>



x = cateto che si oppone all'angolo di $30°$

y = cateto che si oppone all'angolo di $60°$ i = ipotenusa

Problema N°1: << **Dato il cateto x che si oppone all'angolo di $30°$ calcolare l'altro cateto y e l'ipotenusa i >>**

$i = 2x$; $y^2 + x^2 = i^2$; $y^2 + x^2 = 4x^2$; $y^2 = 3x^2$; $y = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$ $\quad i = 2x \quad y = x\sqrt{3}$

Problema N°2: << **Data l'ipotenusa i calcolare i cateti x ed y**>>

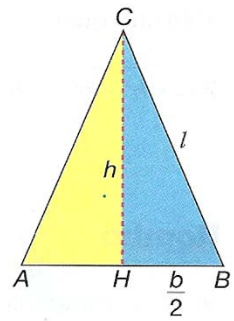
$$x = \frac{i}{2};\ y^2 + x^2 = i^2;\ y^2 + \frac{i^2}{4} = i^2;\ y^2 = i^2 - \frac{i^2}{4} = \frac{3}{4}i^2;\ y = \sqrt{\frac{3}{4}i^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \mathbf{x = \frac{i}{2}} \quad \mathbf{y = \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

Problema N°3: << **Dato il cateto y che si oppone all'angolo di $60°$ calcolare l'altro cateto x e l'ipotenusa i** >> $\quad i = 2x$; $x^2 + y^2 = 4x^2$; $3x^2 = y^2$

$$x^2 = \frac{y^2}{3} \qquad x = \sqrt{\frac{y^2}{3}} = \sqrt{\frac{3y^2}{9}} \qquad \mathbf{x = \frac{1}{\sqrt{3}}y = \frac{\sqrt{3}}{3}y} \qquad \mathbf{i = \frac{2}{\sqrt{3}}y = \frac{2\sqrt{3}}{3}y}$$

Triangolo isoscele

Se in un triangolo isoscele tracciamo l'altezza relativa alla base, otteniamo un triangolo rettangolo dove $BC = i = \ell$, $CH = h$ e $HB = \frac{b}{2}$. Valgono le seguenti relazioni:

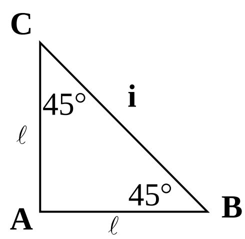


$$\ell = \sqrt{\mathbf{h}^2 + \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}\right)^2} \qquad \mathbf{h} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}\right)^2} \qquad \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}} = \sqrt{\ell^2 - \mathbf{h}^2}$$

Triangolo rettangolo isoscele

E' un triangolo rettangolo avente i cateti uguali e gli angoli acuti di $45°$.

Valgono le stesse formule del quadrato.



$$\mathbf{i = \ell\sqrt{2}} \qquad \ell = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}$$

Triangolo equilatero

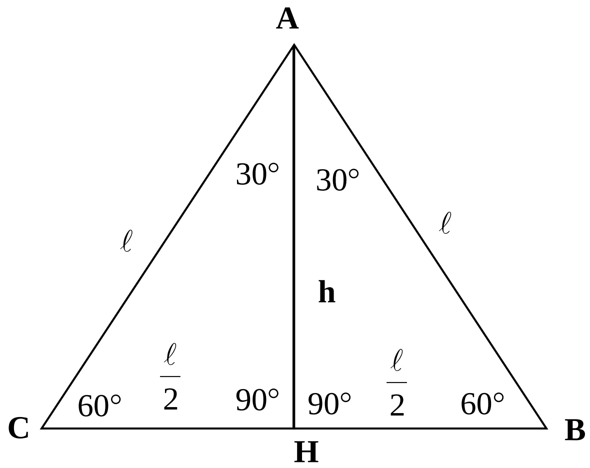
Il triangolo equilatero ha i tre lati uguali, le tre altezze uguali, i tre angoli interni di $60°$.

$h = altezza$; ℓ = lato. Risulta:

$CH = HB = \frac{\ell}{2}$, $AH^2 + HB^2 = AB^2$;

$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$; $h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3}{4}\ell^2$

$$\mathbf{h = \sqrt{\frac{3}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell}$$



Regola: L'altezza di un triangolo equilatero è uguale al semiprodotto del lato per $\sqrt{3}$.

$h = \frac{3}{4}\ell^2 \Rightarrow 4h = 3\ell^2 \Rightarrow \ell^2 = \frac{4}{3}h^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{4}{3}h^2} = \sqrt{\frac{3\cdot 4\cdot h^2}{3^2}}$ $\quad \mathbf{\ell = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}h}$

Regola: Il lato di un triangolo equilatero si ottiene dividendo il doppio dell'altezza per $\sqrt{3}$.

$$S = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$$

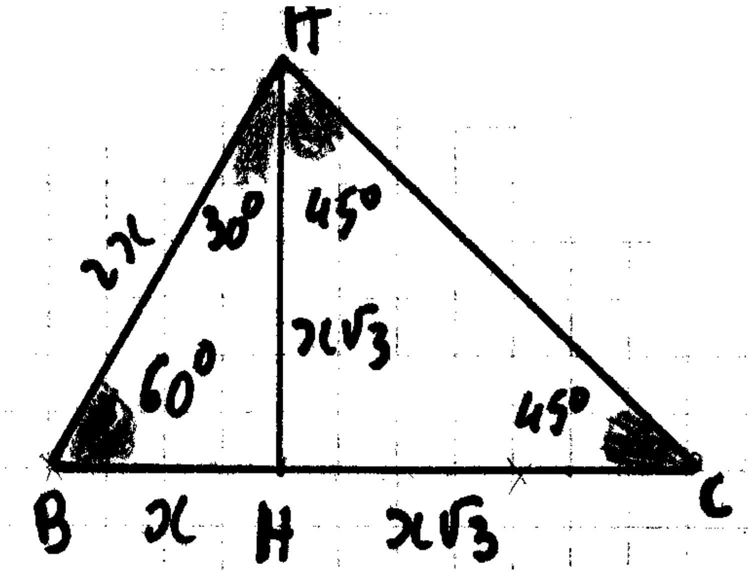
$\mathbf{S = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2}$ (**area del triangolo equilatero in funzione del suo lato**)

$$S = \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}h \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2$$

$\mathbf{S = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2}$ (**area del triangolo equilatero in funzione della sua altezza**)

Calcolare i lati di un triangolo ABC sapendo che la sua area è $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)a^2$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$.

Dati $\begin{cases} S(ABC) = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)a^2 \\ \hat{B} = 60° \quad \hat{C} = 45° \end{cases}$ Elementi da calcolare $\{AB = \quad AC = \quad BC =$



Pongo $BH = x$ ottengo $AB = 2x$ $AH = HC = x\sqrt{3}$

$BC = BH + HC = x + x\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)x$ $S(ABC) = \dfrac{BC \cdot AH}{2}$ $\dfrac{\cancel{\left(1+\sqrt{3}\right)}x \cdot x\cancel{\sqrt{3}}}{2} = \cancel{\sqrt{3}}\,\cancel{\left(1+\sqrt{3}\right)}a^2$

$\dfrac{x^2}{2} = a^2$ $x^2 = 2a^2$ $x = a\sqrt{2}$ $AC = AH \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a$

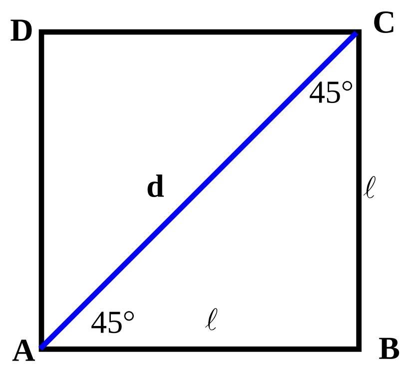
$BC = \left(1+\sqrt{3}\right)a\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)a$ $AB = 2a$

Quadrato

Sia dato un quadrato $ABCD$ di lato ℓ e diagonale d. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC otteniamo: $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $d^2 = \ell^2 + \ell^2$; $d^2 = 2\ell^2$

$\mathbf{d} = \sqrt{2\ell^2} = \ell\sqrt{2}$ $\mathbf{d} = \ell\sqrt{2}$

Regola: La misura della diagonale di un quadrato è uguale al prodotto della misura del lato per $\sqrt{2}$.



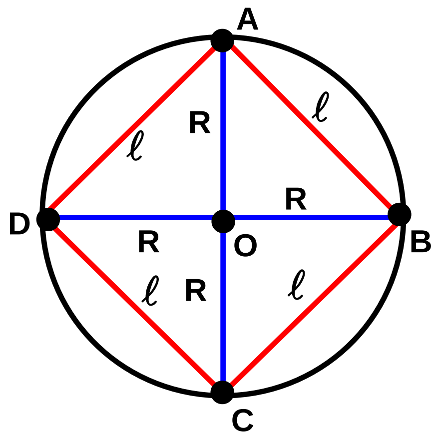
$d^2 = 2\ell^2 \quad \Rightarrow \quad \ell^2 = \dfrac{d^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \ell^2 = \dfrac{2d^2}{4} \quad \Rightarrow$

$\ell = \sqrt{\dfrac{2d^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}d = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ $\ell = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{d}}{\sqrt{2}}$

Regola: Il lato di un quadrato si ottiene moltiplicando la diagonale per $\sqrt{2}$ e dividendo per 2 il risultato ottenuto, oppure dividendo la diagonale per $\sqrt{2}$.

Quadrato inscritto in una circonferenza di raggio R

Siano AC e BD due diametri fra loro perpendicolari. $ABCD$ è il quadrato inscritto nella circonferenza di raggio R. Sia ℓ il lato del quadrato inscritto nella circonferenza di raggio R.



$$AB^2+BC^2=AC^2 \ \Rightarrow \ \ell^2+\ell^2=4R^2 \ \Rightarrow \ 2\ell^2=4R^2 \ \Rightarrow$$

$$\ell^2=2R^2 \ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\ell=R\sqrt{2}} \qquad \mathbf{R=\frac{\ell}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ell}$$

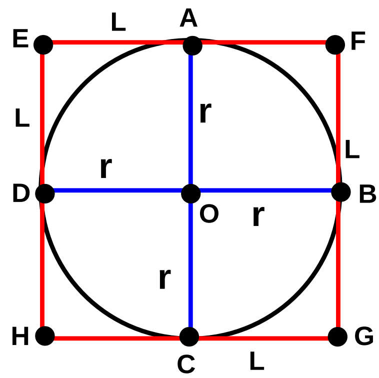
Più semplicemente avremmo potuto scrivere:

$$AO^2+BO^2=AB^2 \ \Rightarrow \ R^2+R^2=\ell^2 \ \Rightarrow \ \ell^2=2R^2$$

Quadrato circoscritto in una circonferenza di raggio r

Siano AC e BD due diametri fra loro perpendicolari. Le rette tangenti alla circonferenza, condotte rispettivamente per i punti di tangenza A, B, C, D, individuano il quadrato $EFGH$ circoscritto alla circonferenza. Sia **L** il lato del quadrato circoscritto alla circonferenza di raggio **r**. Risulta:

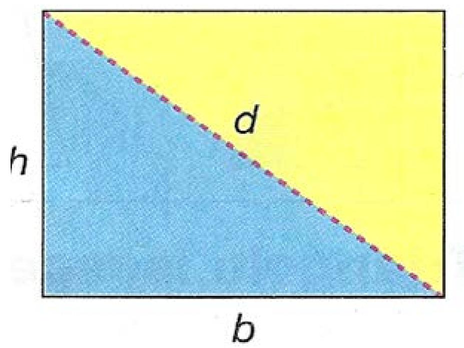
$$\mathbf{L=2r} \qquad \mathbf{r=\frac{L}{2}}$$



Rettangolo

Se in un rettangolo tracciamo la diagonale otteniamo un triangolo rettangolo e le seguenti relazioni:

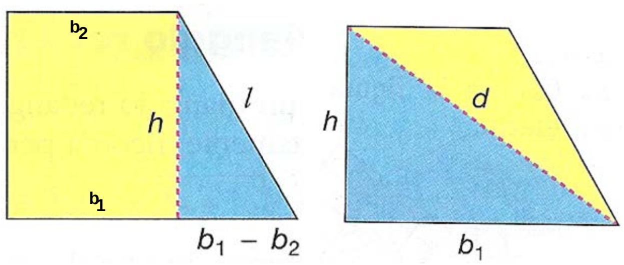
$$\mathbf{d=\sqrt{h^2+b^2}} \qquad \mathbf{h=\sqrt{d^2-b^2}} \qquad \mathbf{b=\sqrt{d^2-h^2}}$$



Trapezio rettangolo

$$\ell=\sqrt{h^2+(b_1-b_2)^2} \qquad h=\sqrt{\ell^2-(b_1-b_2)^2}$$

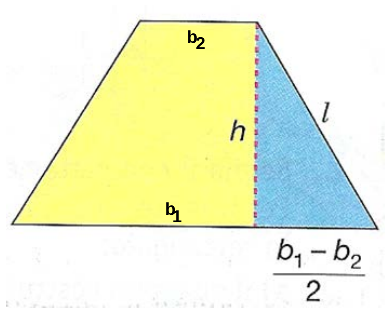
$$d=\sqrt{h^2+b_1^2} \qquad h=\sqrt{d^2-b_1^2} \qquad b_1=\sqrt{d^2-h^2}$$



Trapezio isoscele

$$\ell=\sqrt{h^2+\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2} \qquad h=\sqrt{\ell^2-\left(\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2}$$

$$b_1-b_2=2\sqrt{\ell^2-h^2}$$



Problema: << Calcolare l'area ed il perimetro di un trapezio isoscele $ABCD$ sapendo che la base minore AB è $2a$, l'altezza AH è a, $A\hat{D}C = B\hat{C}B = 45°$ >>

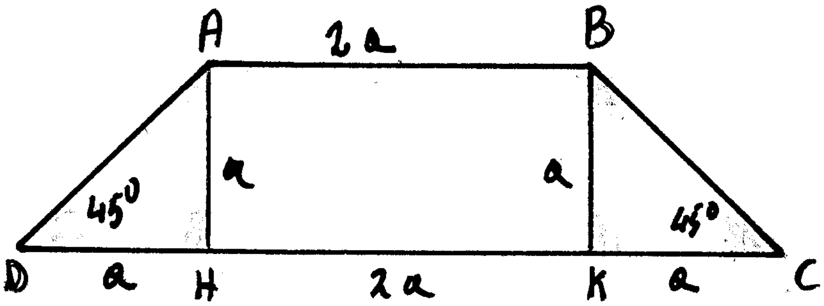
Dati $\begin{cases} AB = 2a \\ AH = BK = a \\ A\hat{D}C = B\hat{C}B = 45° \end{cases}$ Elementi da calcolare $\begin{cases} p(ABCD) = \\ S(ABCD) = \end{cases}$

$\{A\hat{D}H = 45° \; ; \; D\hat{H}A = 90°\}$

$\Rightarrow \quad D\hat{A}H = 45° \quad \Rightarrow$

$DH = AH = a$

$AD = AH \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$

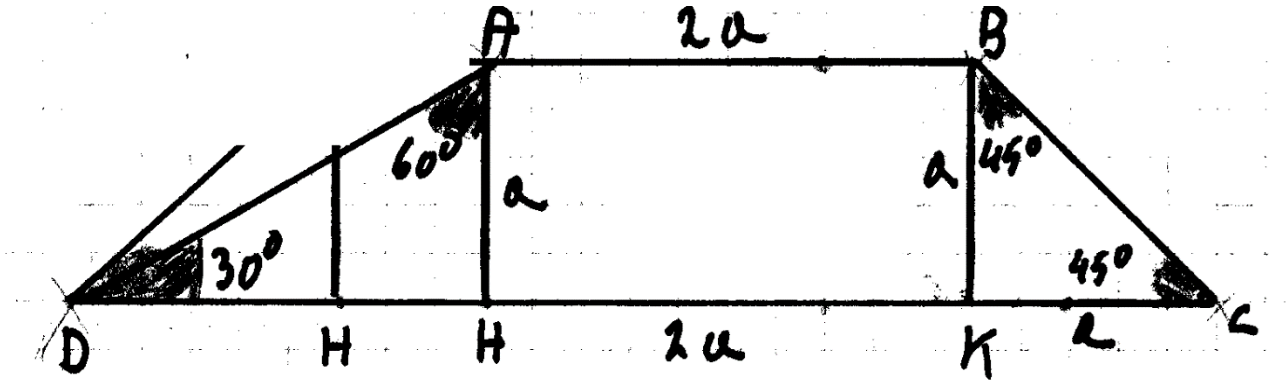


$DC = a + 2a + a = 4a$ $\qquad S(ABCD) = \dfrac{DC \cdot AH}{2} = \dfrac{4a \cdot a}{2} = 2a^2$

$p(ABCD) = AB + 2BC + CD = 2a + 2a\sqrt{2} + 4a = 6a + 2a\sqrt{2} = 2(3+\sqrt{2})a$

Calcolare il perimetro di un trapezio sapendo che la base minore $AB=2a$, l'altezza $AH=BK=a$, $\hat{C}=45°$, $\hat{D}=30°$.

Dati $\begin{cases} AB=2a \quad AH=BK=a \\ \hat{C}=45° \; ; \; \hat{D}=30° \end{cases}$ Elementi da calcolare

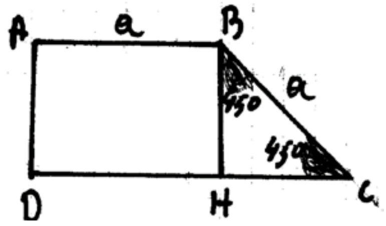


$BC=BK\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a \qquad DH=AH\cdot\sqrt{3}=a\sqrt{3} \qquad AD=2\,AH=2a$

$$p(ABCD)=2a+\frac{\sqrt{2}}{2}a+a+2a+a\sqrt{3}+2a=\left(7+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\right)a=\frac{14+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}a$$

Problema

Calcolare l'altezza di un trapezio rettangolo sapendo che la base minore $AB=a$, il lato obliquo $BC=a$, $\hat{C}=45°$.



Dati $\begin{cases} AB=BC=a \\ \hat{C}=45° \end{cases}$ Elementi da determinare $\{BH=AD=$

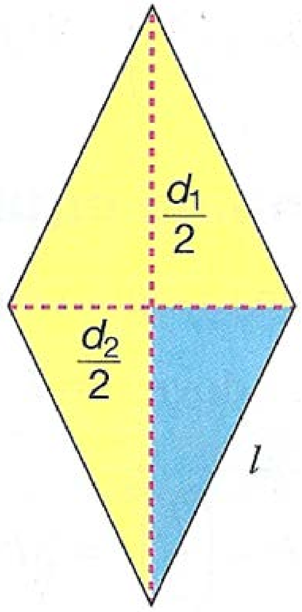
$\left.B\hat{H}C=90° \quad C=45°\right\} \quad \Rightarrow \quad H\hat{B}C=45° \quad \Rightarrow \quad BH=HC \quad \Rightarrow \quad BH=BC\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Rombo

$$\ell = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$

$$\frac{d_2}{2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}$$

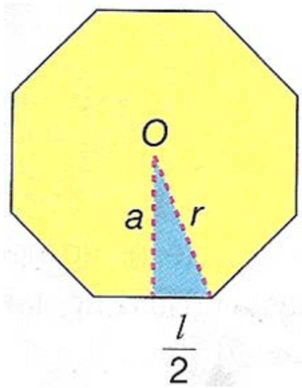


Poligono regolare

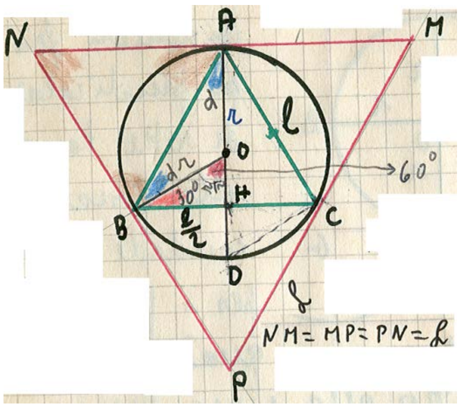
Se in un poligono regolare tracciamo il raggio e l'apotema, otteniamo un triangolo rettangolo con le seguenti relazioni:

$$r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} \qquad a = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$$

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{r^2 - a^2}$$



Triangolo equilatero inscritto e circoscritto ad una circonferenza di raggio r



Sia AD un diametro qualsiasi di una circonferenza di centro O e raggio r. Per il punto medio H del raggio OD, conduco la corda $BC \perp OD$. ABC è il triangolo equilatero di lato ℓ inscritto nella circonferenza. Infatti: $OH = \frac{OB}{2} = \frac{r}{2} \Rightarrow H\hat{B}O = 30°$; $H\hat{O}B = 60°$; $2\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow$

$$C\hat{B}A = 60° \Rightarrow B\hat{C}A = C\hat{A}B = 60°$$

Le rette tangenti alla circonferenza, condotte rispettivamente per i punti A, B, C, individuano il triangolo equilatero MNP di lato L circoscritto alla circonferenza.

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow \frac{\ell^2}{4} = r^2 - \frac{r^2}{4} \Rightarrow \ell^2 = 3r^2 \qquad \ell = r\sqrt{3} \qquad r = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell$$

$$N\hat{A}B = N\hat{A}H - B\hat{A}H = 90° - 30° = 60° \quad NA = NB \Rightarrow N\hat{A}B = N\hat{B}A = 60°$$

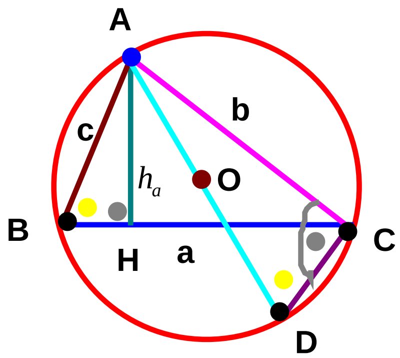
Quindi risulta: $B\hat{N}A = 60°$ Il triangolo NAB (come pure i triangoli AMC, BCP) è equilatero:

$$NA = NB = AB = \ell \qquad MN = 2\,AN \qquad L = 2\ell \qquad \ell = \frac{L}{2}$$

Il lato L del triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza è il doppio del lato ℓ del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza. $L = 2r\sqrt{3}$ $\quad r = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot L$

Raggio di una circonferenza circoscritta ad un triangolo

Il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo si chiama circocentro, ed è l'intersezione degli assi dei lati. Tracciato il diametro AD, congiungo C con D e sia $AH = h_a$ l'altezza del triangolo ABC relativa al lato $BC = a$.



$A\hat{B}C = A\hat{D}C$ (in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC}$)
$A\hat{H}B = A\hat{C}D = 90°$

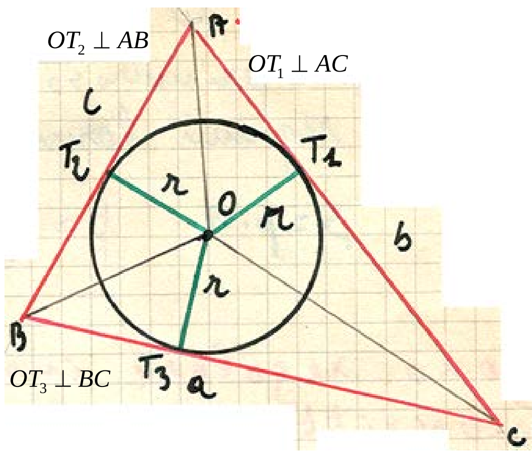
Da queste due relazioni deduciamo: $\overset{\triangle}{ABH}\,[s]\,\overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow AH : AC = AB : AD \Rightarrow$

$$AH = h_a = \frac{AC \cdot AB}{AD} = \frac{b \cdot c}{2r} \qquad S(ABC) = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} a \cdot \frac{b \cdot c}{2r} = \frac{abc}{4r} \qquad r = \frac{abc}{4S}$$

Raggio del cerchio inscritto in un triangolo

Sia ABC un triangolo circoscritto ad una circonferenza di raggio r avente i lati $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, area S, perimetro $2p = a + b + c$.

L'area del triangolo ABC è la somma delle aree dei triangoli OBC, OCA, OAB.



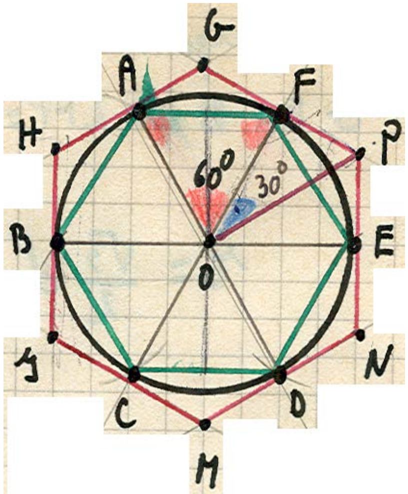
$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{2p}{2} \cdot r \qquad S = pr$$

$$r = \frac{S}{p}$$

Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo si ottiene dividendo l'area S del triangolo per il suo semiperimetro p. Valgono le seguenti formule: $\mathbf{S = p\,r}$ $\quad \mathbf{r = \frac{S}{p}}$ $\quad \mathbf{p = \frac{S}{r}}$

Esagono regolare in scritto e circoscritto ad una circonferenza

Sia $ABCDEF$ l'esagono regolare avente lato ℓ inscritto nella circonferenza di centro O e raggio r. Si dimostra che: $\ell = r$ cioè, l'esagono regolare inscritto in una circonferenza ha il lato uguale al raggio della circonferenza. Infatti:



$\overset{\frown}{AF} = \frac{1}{6}\text{circonferenza} \quad \Rightarrow \quad A\hat{O}F = \frac{360°}{6} = 60° \quad A\hat{O}F = 60°$

$AO = OF \quad \Rightarrow \quad O\hat{A}F = O\hat{F}A = 60°$

Il triangolo OAF è equilatero, per cui risulta $AF = OF$ cioè

$$\boldsymbol{\ell = r}$$

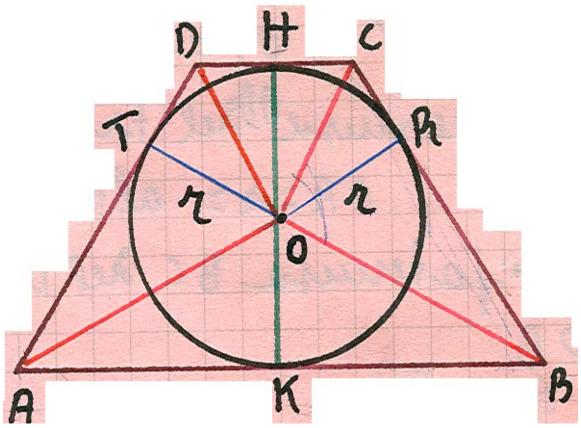
Le rette tangenti alla circonferenza, condotte rispettivamente dai vertici dell'esagono regolare inscritto, individuano l'esagono regolare $GHIMNP$ circoscritto di lato L.

Del triangolo rettangolo OFP conosciamo: il cateto $OF = r$ e l'angolo $P\hat{O}F = 30°$.

$FP = \frac{\sqrt{3}}{3}r \quad GP = L = 2\,FP = \frac{2\sqrt{3}}{3}r \qquad \mathbf{L = \frac{2\sqrt{3}}{3}r} \qquad \mathbf{r = \frac{\sqrt{3}}{2}L}$

Trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza

Affinché un trapezio isoscele sia circoscrivibile ad una circonferenza occorre e basta che il lato obliquo risulti uguale alla semisomma delle basi.



$AD + BC = AB + CD \quad \Rightarrow \quad 2BC = AB + CD \quad \Rightarrow$

$$\mathbf{AD = BC = \frac{AB + CD}{2}}$$

$AD = BC = \frac{AB + CD}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ABCD$ trapezio isoscele circoscrivibile ad una circonferenza

Valgono le seguenti proprietà:

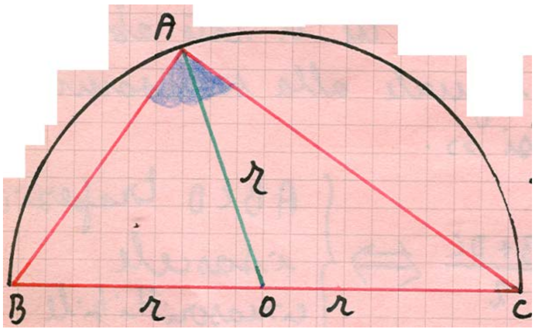
(1) L'altezza del trapezio è uguale al diametro della circonferenza inscritta: $HK = 2r$

(2) $A\hat{O}D = C\hat{O}B = 90°$, $OT = r$ = altezza relativa all'ipotenusa AD del triangolo rettangolo AOD , $OR = r$ = altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo COB

(3) $DH = HC \quad AK = KB$

Mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo

$B\hat{A}C = 90°$ in quanto angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza.
La mediana relativa alla ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale a metà ipotenusa in quanto coincide col raggio della circonferenza circoscritta.



Triangolo rettangolo circoscritto ad una circonferenza

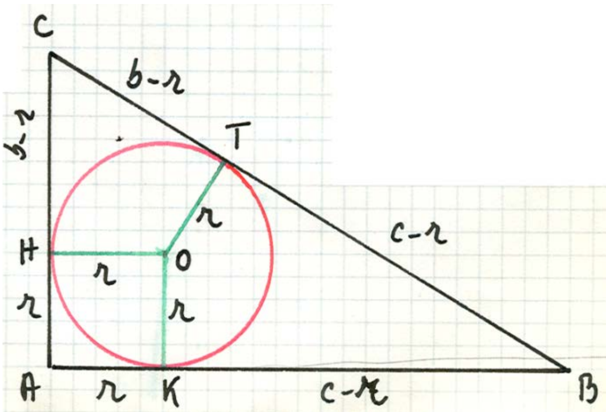
Il diametro della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo è uguale alla differenza fra la somma dei due cateti e l'ipotenusa.

$BC = a \quad AB = c \quad AC = b$

$AH = AK == OH = OT = r$

$HC = CT = AC - AH = b - r$

$BK = BT = AB - AK = c - r$



BC = a $\Rightarrow \quad b - r + c - r = a$ **b + c - a = 2r**

L'area di un triangolo rettangolo è data dal prodotto delle misure delle due parti in cui l'ipotenusa resta divisa dal suo punto di contatto con la circonferenza inscritta.

Dimostrazione: Pongo: $CT = b - r = x \quad BT = c - r = y \quad p = \frac{a+b+c}{2}$ = semiperimetro del triangolo

In precedenza abbiamo dimostrato che: $S = p \cdot r$ e notando che risulta:

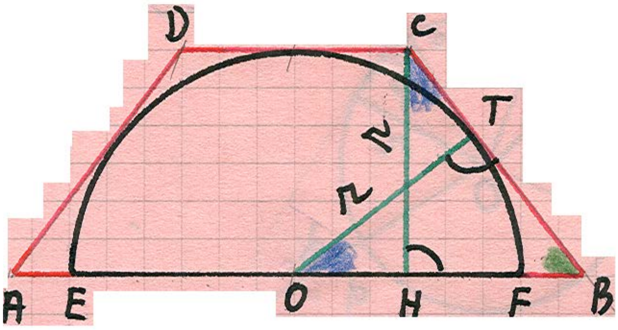
$$\cancel{2}(b-r) + \cancel{2}(c-r) + \cancel{2}r = \cancel{2}p \qquad \cancel{2}x + \cancel{2}y + \cancel{2}r = \cancel{2}p \qquad x + y + r = p$$

$$S = p \cdot r = (x + y + r) \cdot r \qquad 2S = AC \cdot AB = (x + r) \cdot (y + r)$$

$$2S = xy + xr + yr + r^2 = xy + r(x + y + r) = xy + S \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S = xy}$$

Trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza

Il lato obliquo di un trapezio isoscele circoscritto ad una semicirconferenza è uguale a metà base maggiore. **AD = BC =** $\mathbf{\frac{AB}{2}}$



$$\left.\begin{array}{l} OT = CH = r \\ O\hat{B}T = H\hat{B}C \\ O\hat{T}B = C\hat{H}B = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad CB = OB = \frac{AB}{2}$$

Risulta inoltre: **BT = HB**

Trapezio circoscritto ad una circonferenza

Risulta sempre: **CÔB = AÔB = 90°**

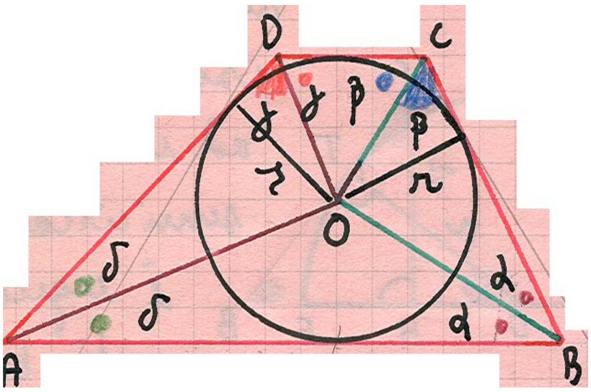
Gli angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{C}B$ sono coniugati interni.

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \;\Rightarrow\; \alpha + \beta = 90^\circ \;\Rightarrow$

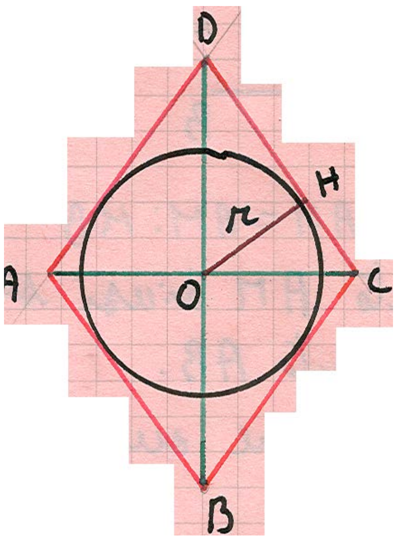
CÔB = 90°

$2\delta + 2\gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \delta + \gamma = 90^\circ \;\Rightarrow$

AÔD = 90°



Rombo circoscritto ad una circonferenza



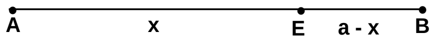
Il rombo è un quadrilatero sempre circoscrittibile in quanto ha i lati uguali.

L'altezza **OH** relativa all'ipotenusa *DC* del triangolo rettangolo *COD* è il raggio della circonferenza inscritta nel rombo.

Sezione aurea di un segmento

Si definisce **sezione aurea** di un segmento quella parte del segmento media proporzionale fra tutto il segmento e la parte rimanente.

Consideriamo il segmento AB ed un suo punto E.



Se risulta: **AB : AE = AE : EB** [ρ] allora il segmento AE rappresenta la sezione aurea del segmento AB.

Calcolare la sezione aurea del segmento $AB = a$. Pongo $AE = x$, ottengo :

$EB = a - x$. Sostituisco nella **[** ρ **]**: $a : x = x : (a - x)$ $\quad x^2 = a(a - x)$ $\quad x^2 + ax - a^2 = 0$

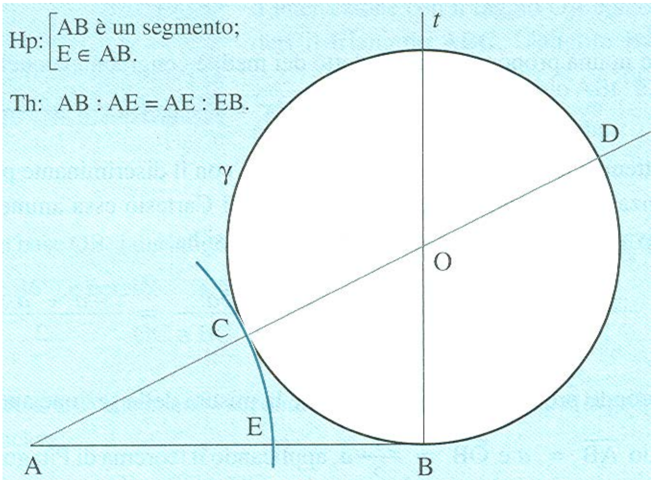
$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a \quad (R.N.A.) \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a \end{cases}$$

$AE = x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$ **rappresenta la sezione aurea del segmento** $AB = a$.

Costruzione della sezione aurea di un segmento

Indicato con AB il segmento assegnato, costruisco la perpendicolare t ad AB passante per il punto B . Su tale retta descrivo la circonferenza σ di centro O e raggio $OB = \frac{1}{2}AB$. La retta AO incontra la circonferenza σ nei punti C e D .

La circonferenza di centro A e raggio AC incontra il segmento AB nel punto E .



Dico che il segmento AE rappresenta la sezione aurea del segmento AB . Infatti , per il teorema della tangente e della secante possiamo scrivere la seguente proporzione : $AD : AB = AB : AC$

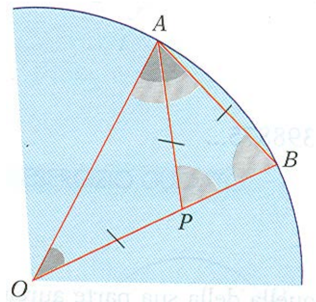
Applicando la proprietà dello scomponendo otteniamo : $(AD - AB) : AB = (AB - AC) : AC$

Osservando che : $AD - AB = AD - CD = AC = AE$ $\quad AB - AC = AB - AE = EB$ otteniamo :

$AE : AB = EB : AE$ Invertendo ogni antecedente con il corrispondente conseguente otteniamo :

$AB : AE = AE : EB$ che è la proporzione che dovevamo dimostrare.

Lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza



Il lato del decagono regolare inscritto in un circonferenza di raggio r è uguale alla sezione aurea del suo raggio r.

Dimostrazione

Sia AB il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro O e raggio $r = OB$

Il triangolo AOB è isoscele sulla base AB.

$$A\hat{O}B = \frac{360°}{10} = 36° \qquad A\hat{B}O = B\hat{A}O = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$$

Sia AP la bisettrice dell'angolo interno $O\hat{A}B$ del triangolo AOB. Risulta :

$P\hat{A}B = 36°$ $\quad A\hat{P}B = A\hat{B}P = 72°$ Il triangolo ABP è isoscele sulla base PB, mentre il triangolo APO è isoscele sulla base AO. Ne consegue che: $OP = PB = AP$

Applicando al triangolo AOB il teorema della bisettrice dell'angolo interno abbiamo:

$$AO : AB = OP : PB \qquad OB : OP = OP : PB$$

$OP = PA = AB = \ell_{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r$ **è la sezione aurea del raggio**

Per inscrivere in una circonferenza di raggio r il decagono regolare basta determinare, con la costruzione indicata in figura , la sezione aurea del raggio e riportare successivamente sulla circonferenza dieci corde uguali a tale sezione aurea.

Il poligono $ACEGI$ è il pentagono regolare inscritto nella circonferenza .

Osservazione

$\ell_{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot r$ = lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio

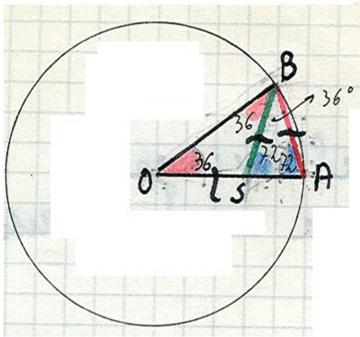
$a_{10} = \dfrac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ = apotema del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r

$\ell_5 = \dfrac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ = lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r

$a_5 = \dfrac{r}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ = apotema del pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio r

Decagono regolare inscritto in una circonferenza

$$Hp\begin{cases} AB = \text{lato del decagono regolare inscritto, cioè :} \\ A\hat{O}B = \dfrac{360°}{10} = 36° \end{cases}$$



$$TH\{AO : AB = AB : AS$$

Teorema: Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio.

$$\left.\begin{matrix} A\hat{O}B = 36° \\ AO = BO \end{matrix}\right\} \Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{B}A = 72°$$ Sia BS la bisettrice dell'angolo $O\hat{B}A$

$S\hat{O}B = S\hat{B}O = 36° \Rightarrow OS = SB \quad B\hat{S}A = S\hat{O}B + S\hat{B}O = 36° + 36° = 72° = S\hat{A}B \Rightarrow AB = SB$

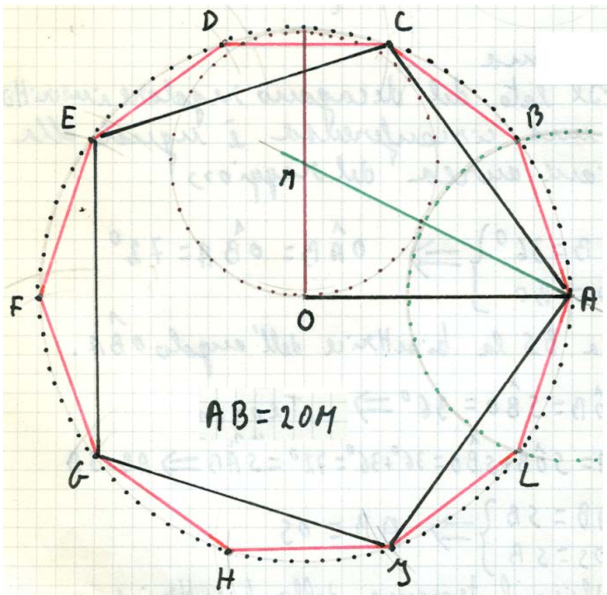
$AB = SB \wedge OS = SB \Rightarrow AB = OS$

Applico il teorema della bisettrice all'angolo $O\hat{B}A$. Ottengo: $OB : AB = OS : SA$

$AO : AB = AB : SA$ Quindi: $l_{10} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} r$

Costruzione del lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza.

Per inscrivere in una circonferenza di raggio r il decagono regolare basta determinare, con la costruzione indicata in figura, la sezione aurea del raggio e riportare successivamente sulla circonferenza dieci corde uguali a tale parte. Il poligono **ACEGI** è il pentagono regolare inscritto nella circonferenza.



$\mathbf{a_{10}} = \dfrac{\mathbf{r}}{\mathbf{4}}\sqrt{\mathbf{10 + 2\sqrt{5}}}$ = apotema del decagono regolare inscritto nella circonferenza

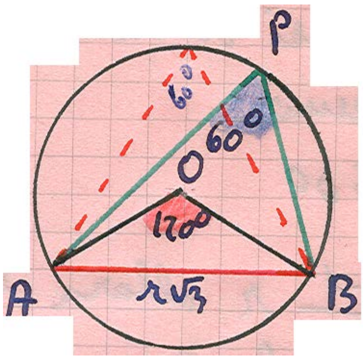
$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ = lato del pentagono regolare inscritto nella circonferenza

$a_5 = \frac{r}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ = apotema del pentagono regolare inscritto nella circonferenza

Corde di una circonferenza di raggio r

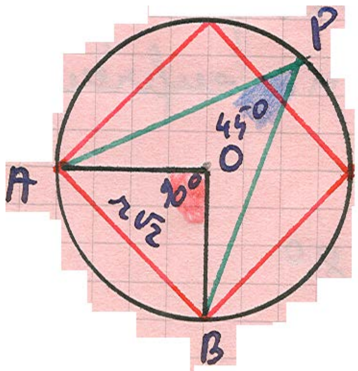
Sia AB una corda di una circonferenza di centro O e raggio r. Se risulta $AB = r\sqrt{3}$ allora la corda AB rappresenta il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Se P è un punto qualsiasi della circonferenza abbiamo:

$$A\hat{P}B = 60° \ , \quad A\hat{O}B = 120°$$



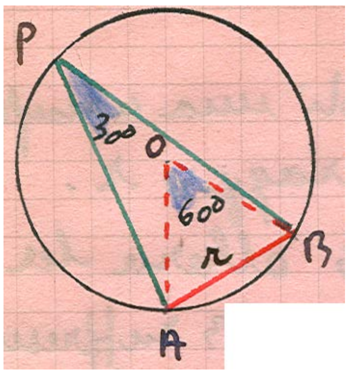
Se risulta $AB = r\sqrt{2}$ allora la corda AB rappresenta il lato del quadrato inscritto nella circonferenza. Se P è un punto qualsiasi della circonferenza abbiamo:

$$A\hat{P}B = 45° \ , \quad A\hat{O}B = 90°$$



Se risulta $AB = r$ allora la corda AB rappresenta il lato dell'esagono inscritto nella circonferenza. Se P è un punto qualsiasi della circonferenza abbiamo:

$$A\hat{P}B = 30° \ , \quad A\hat{O}B = 60°$$



Se risulta $AB = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ allora la corda AB rappresenta il lato del decagono inscritto nella circonferenza. Se P è un punto qualsiasi della circonferenza abbiamo:

$$A\hat{P}B = 18° \ , \quad A\hat{O}B = 36°$$

Se risulta $\mathbf{AB = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ allora la corda AB rappresenta il lato del pentagono inscritto nella circonferenza. Se P è un punto qualsiasi della circonferenza abbiamo:

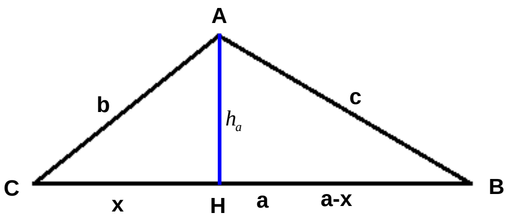
$$A\hat{P}B = 9° \ , \quad A\hat{O}B = 18°$$

Formula di Erone

La formula di Erone ci consente di calcolare l'area della superficie di un triangolo, note le misure dei suoi lati. $\mathbf{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ p =semiperimetro del triangolo.

Pongo: $BC = a \ , \ CA = b \ , \ AB = c \ , \ AH = h_a$

$HC = x \ , \ HB = a - x \ , \ AH \perp BC$



Ogni triangolo ha almeno due angoli interni acuti. Se essi sono $\hat{B}$ e $\hat{C}$ allora l'altezza AH è interna al triangolo ABC.

$$a + b + c = 2p \Rightarrow \begin{cases} b+c-a = 2(p-a) \\ a+c-b = 2(p-b) \\ a+b-c = 2(p-c) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a+b+c-2a = 2p-2a = 2(p-a)$$

Inoltre: $h_a^2 = b^2 - x^2 = c^2 - (a-x)^2$ $\quad [\mathbf{A}] \quad$ $b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2 \qquad x = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

Sostituendo nella $[\mathbf{A}]$ otteniamo:

$$h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2} = \frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]}{4a^2} = \frac{(a+b-c)(a+b+c)(c+b-a)(c+a-b)}{4a^2}$$

$$h_a^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2} \qquad h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad S(ABC) = \frac{1}{2}a \cdot h_a \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Teorema di Pitagora generalizzato

In ogni triangolo, il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma delle misure dei quadrati degli altri due lati, diminuita o aumentata del doppio prodotto della misura di uno di questi per la misura della proiezione dell'altro sul primo, a seconda che l'angolo opposto al lato considerato sia acuto oppure opposto.

Dato un triangolo ABC, siano a,b,c le misure dei lati BC, AC, AB, sia c' la misura della proiezione AH del lato AB su AC e sia h la misura dell'altezza BH. Supponiamo dapprima che il triangolo dato sia acutangolo (fig. 9) e applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BHC. Otteniamo: $a^2 = h^2 (b - c')^2$

Ma dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABH deduciamo: $h^2 = c^2 - c'^2$

Sostituendo nella relazione precedente otteniamo:

$a^2 = c^2 - \cancel{c'^2} + b^2 + \cancel{c'^2} - 2bc'$ ossia $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'}$

Sia ora $\hat{A}$ uno degli angoli acuti del triangolo ottusangolo ABC (fig. 10).

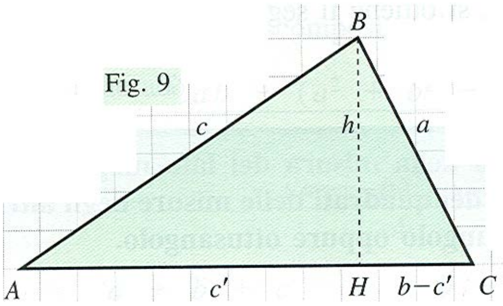


Fig. 9

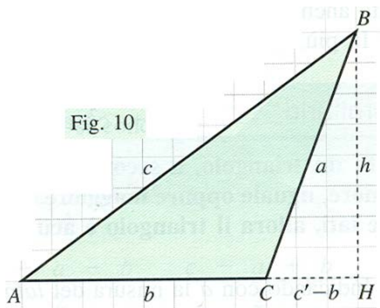


Fig. 10

Ragionando come sopra successivamente si ha

$a^2 = h^2 + (c' - b)^2$ **ed** $h^2 = c^2 - c'^2$ **da cui si trae:** $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'}$

Invece se il triangolo ABC è ottusangolo in A (fig. 11) allora utilizzando le relazioni pitagoriche

$$a^2 = h^2 + (b + c')^2$$

ed $$h^2 = c^2 - c'^2$$

si ha

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'}$$

Raccogliendo i risultati ottenuti si ha il teorema da dimostrare.

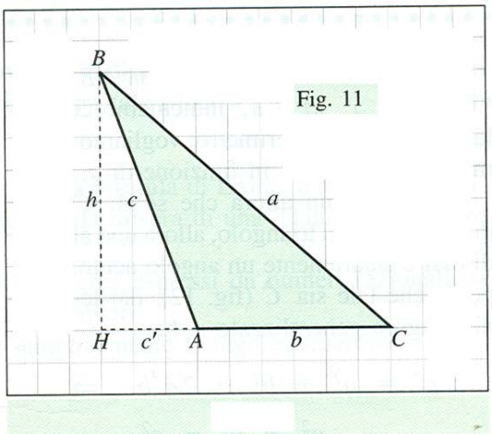


Fig. 11

Misura delle mediane di un triangolo

Dato un triangolo ABC, poniamo $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, vogliamo calcolare la misura m_c della mediana CM a partire da a,b,c (fig.14). Dei due angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ supponiamo che $\hat{A}$ sia acuto.

L'applicazione del teorema di Pitagora generalizzato ai triangoli ACM ed ACB fornisce:

$$m_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{2b'c}{2} \quad \Rightarrow \quad 2m_c^2 = 2b^2 + \frac{c^2}{2} - 2b'c \qquad \text{e}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b'c \qquad (2)$$

Sottraendo la (2) dalla (1) si ha:

$$2m_c^2 - a^2 = b^2 - \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^4}{4}$$

e quindi

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

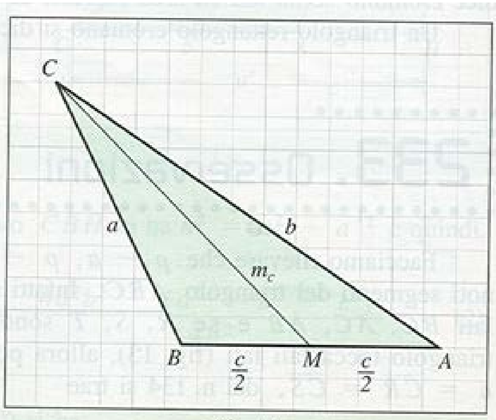


Fig. 14

La misura di una mediana si ottiene estraendo la radice quadrata della differenza tra la semisomma dei quadrati delle misure dei due lati che escono dal vertice della mediana e il quadrato della misura della metà del lato rimanente.

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \qquad m_b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$$

Misura delle bisettrici interne di un triangolo

Dato un triangolo ABC con $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, indichiamo con d la misura della bisettrice CD e con x, y le misure dei segmenti in cui il punto D divide il lato AB (fig. 15).

Vogliamo esprimere d in funzione di a, b, x, y.

Osserviamo allora che uno almeno degli angoli adiacenti al lato AB è un angolo acuto. Supponendo che tale sia $\hat{A}$, per il teorema di Pitagora generalizzato applicato al triangolo ABC, si ha:

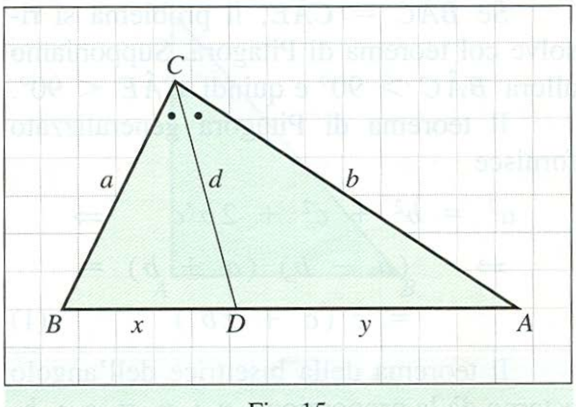


Fig. 15

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b'c \quad \Rightarrow \quad (a - b)(a + b) = c(c - 2b') \qquad (1)$$

Ma il teorema della bisettrice interna dà la proporzione $x : y = a : b$ dalla quale, componendo:

$$c : y = (a + b) : b \quad \Rightarrow \quad y(a + b) = bc \qquad (2)$$

Dividendo la (1) per la (2) si ha:

$$(a - b) : y = (c - 2b') : b \quad \Rightarrow \quad ab = b^2 + yc - 2b'y \qquad (3)$$

Dal teorema di Pitagora generalizzata applicato al triangolo ACD si ha:

$$d^2 = b^2 + y^2 - 2b'y \qquad (4)$$

Sottraendo la (4) dalla (3): $ab - d^2 = y(c - y) \Rightarrow ab - d^2 = xy$

E quindi: $d^2 = ab - xy$

Il quadrato della misura di una bisettrice interna di un triangolo è uguale alla differenza tra il prodotto delle misure dei lati che escono dal vertice della bisettrice e il prodotto delle misure dei segmenti in cui quella bisettrice divide il lato rimanente.

Misura delle bisettrici esterne di un triangolo

Dato un triangolo ABC, sia E il punto in cui la bisettrice dell'angolo esterno ACM interseca la retta AB (fig. 16).

Posto $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{BE} = x$, $\overline{AE} = y$, $\overline{CE} = e$, vogliamo trovare una relazione che leghi $\overline{CE}$ ad a, b, x, y.

Se $B\hat{A}C = C\hat{A}E$, il problema si risolve col teorema di Pitagora. Supponiamo allora $B\hat{A}C > 90°$ e quindi $C\hat{A}E < 90°$.

Il teorema di Pitagora generalizzato fornisce

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b'c \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (a - b)(a + b) =$$
$$= c(c + 2b') \qquad (1)$$

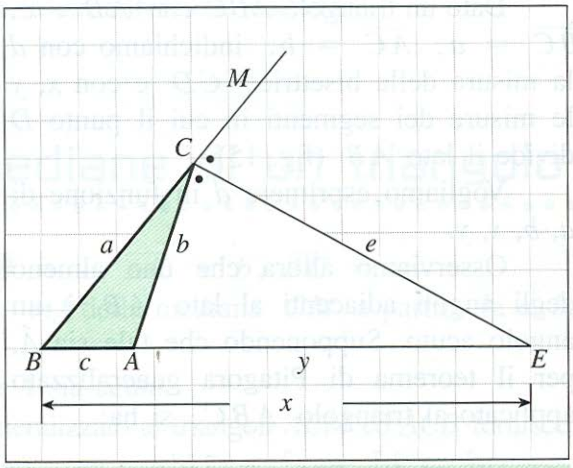


Fig. 16

Il teorema della bisettrice dell'angolo esterno dà la proporzione $x : y = a : b$, da cui, scomponendo:

$$c : y = (a - b) : b \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y(a - b) = bc. \qquad (2)$$

Dividiamo la (1) per la (2):

$$(a+b):y=(c+2b'):b \quad \Rightarrow \quad ab+b^2=yc+2b'y \qquad (3)$$

Dal triangolo CAE, per il teorema di Pitagora generalizzato, si ha:

$$e^2=b^2+y^2-2b'y \quad \Rightarrow \quad e^2-b^2=y^2-2b'y \qquad (4)$$

Addizionando la (3) e la (4):

$$ab+e^2=y(c+y) \quad \Rightarrow \quad ab+e^2=xy$$

E quindi: $\boxed{e^2=xy-ab}$

Altezze di un triangolo in funzione dei suoi lati

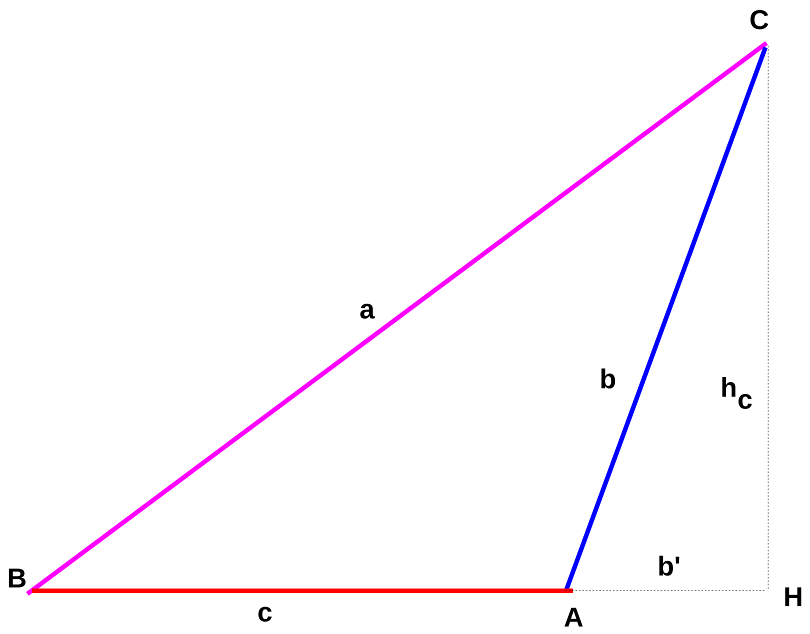
Vogliamo ora esprimere le misure delle altezze di un triangolo in funzione delle misure dei lati, cioè vogliamo ricavare formule nelle quali la misura di ciascuna altezza risulta uguale ad una espressione contenente soltanto le misure dei lati.

Dal teorema di Pitagora generalizzato applicato al triangolo ABC otteniamo: $a^2=b^2+c^2\pm 2cb'$

$$\mathbf{b}'=\frac{\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2}{\pm 2\mathbf{c}}$$

Il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AHC ci fornisce la seguente relazione:

$h_c^2=b^2-b'^2$ dalla quale deduciamo: $\mathbf{h_c}^2=\mathbf{b}^2-\left(\frac{\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-\mathbf{a}^2}{\pm 2\mathbf{c}}\right)^2$ ed anche:



$$h_c^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} \Rightarrow h_c^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_c^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_c^2 = \frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4c^2} \Rightarrow$$

$$(4) \qquad \Rightarrow h_c^2 = \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4c^2}.$$

Al fine di dare a questa formula e alle successive aspetti formali più semplici, indichiamo con $2p$ la misura del perimetro del triangolo, ossia poniamo:

$$(5) \qquad a + b + c = 2p$$

da cui, sottraendo da entrambi i membri successivamente $2a$, $2b$ e $2c$, si ottengono le relazioni:

$$a + b + c - 2a = 2p - 2a$$
$$a + b + c - 2b = 2p - 2b$$
$$a + b + c - 2c = 2p - 2c$$

che possono scriversi:
$$\begin{cases} b + c - a = 2(p - a) \\ a + c - b = 2(p - b) \\ a + b - c = 2(p - c). \end{cases} \qquad (6)$$

Tenuto conto delle (5) e (6), la (4) diventa: $h_c^2 = \dfrac{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - b)}{4c^2}$

E infine, semplificando ed estraendo la radice quadrata dai due membri, si perviene alla:

E infine, semplificando ed estraendo la radice quadrata dai due membri, si perviene alla:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \qquad [7]$$

Analogamente, per le altre due altezze, si ha:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \qquad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$