Unità Didattica N°38

Geometria euclidea nello spazio

01) Rette e piani nello spazio

02) Diedri e piani perpendicolari

03) Gli angoloidi

04) I poliedri

05) Prisma

06) Parallelepipedo

07) Cubo

08) Piramide

09) Area della superficie di solidi notevoli

10) Volume dei solidi

Rette e piani nello spazio

Sappiamo già che il punto, la retta ed il piano sono enti geometrici primitivi e, come tali, non sono definibili.

Definizione: Dicesi **spazio** l'insieme di tutti i punti.

Postulato N°1**:** Nello spazio esistono infiniti punti, infinite rette, infiniti piani.

Indicheremo i punti dello spazio con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino A, B, C,……., P, Q,
le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino a, b, c, d, …….r,s,….
i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco α , β , γ , δ …..

Postulato N°2: per tre punti non allineati passa un solo piano

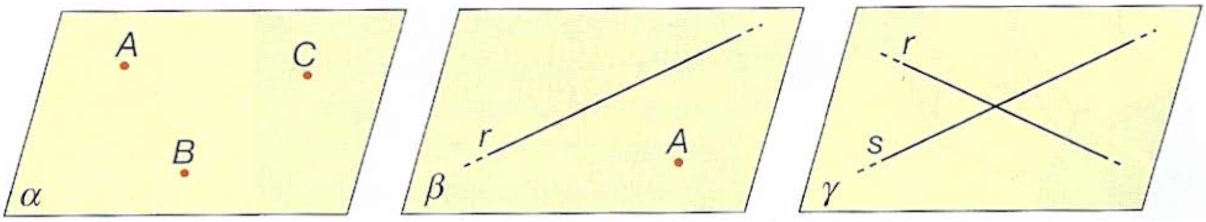
Postulato N°3: Se una retta ha due punti in comune con un piano, essa giace tutta su quel piano.

Proprietà del piano

Un piano è completamente individuato da una delle 4 seguenti condizioni:

1) tre punti non allineati **2)** da una retta e da un punto non appartenente ad essa

3) da due rette incidenti **4)** da due rette parallele.



Definizione: ogni piano divide lo spazio in due parti, ciascuna delle quali prende il nome di **semispazio**. Il piano si dice **origine** dei due semispazi, i quali si dicono uno **opposto** dell'altro .
Da questa definizione discende il seguente

Postulato N°4:

a) Un punto non appartenente al piano α si trova soltanto in uno dei due semispazi individuati da α

b) due punti non appartenente al piano α e situati in uno stesso semispazio sono estremi di un segmento tutto contenuto in quel semispazio.

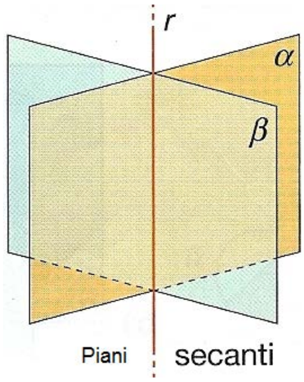
c) due punti non appartenente al piano α e situati in semispazi opposti sono estremi di un segmento che interseca il piano α in un solo punto.

Posizioni reciproche di due piani nello spazio

Due piani distinti possono avere in comune a) un solo punto b) due punti c) nessun punto.

Teorema: Se due piani distinti hanno in comune due punti A e B , allora hanno in comune solo e soltanto la retta AB.

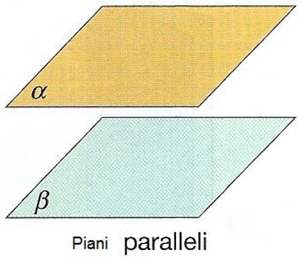
Definizione: Due piani si dicono **incidenti** o **secanti** quando hanno in comune una retta, che prende il nome di **retta d'intersezione dei due piani**.



Teorema: Due piani distinti, aventi in comune un punto, si incontrano lungo una retta passante per quel punto.

Definizione: Due piani si dicono **paralleli** quando non hanno alcun punto in comune, oppure quando sono coincidenti.

Corollario N°1: Per un punto dello spazio si può condurre un solo piano parallelo ad un piano dato

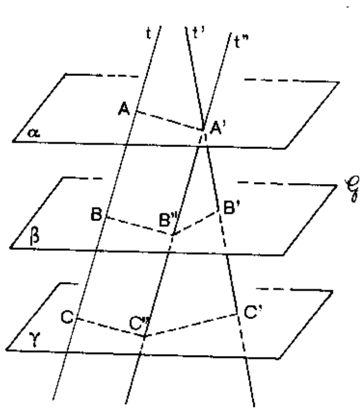


Corollario N°2: Due piani paralleli ad un terzo piano sono paralleli tra loro.

Corollario N°3: Se due piani sono paralleli ogni piano che taglia l'uno, taglia anche l'altro e le due retta di intersezione sono parallele.

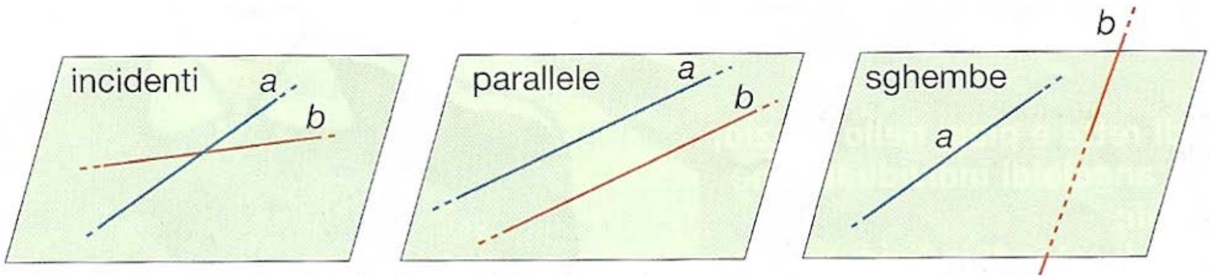
Teorema di Talete nello spazio

Un fascio di piani paralleli determinano su due trasversali due classi di segmenti direttamente proporzionali.



Posizioni reciproche di due rette nello spazio

Due rette a e b nello spazio possono essere: ● **complanari** se appartengono allo stesso piano; le rette complanari, a loro volta, possono essere a) **incidenti** se hanno un solo punto in comune b) **parallele** se non hanno alcun punto in comune c) **sghembe** se non appartengono allo stesso piano e non hanno alcun punto in comune.



Posizioni reciproche di una retta e di un piano

a) Se una retta ha in comune due punti con un piano, allora essa **giace** completamente sul piano

b) Se una retta ha in comune un solo punto con un piano si dice che è **incidente** al piano

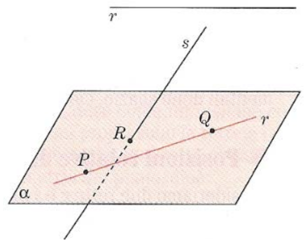
c) Una retta si dice parallela ad un piano se non ha alcun punto in comune col piano.

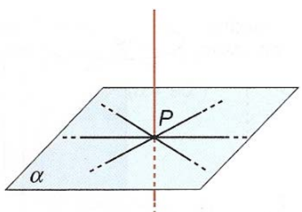
Una retta r nello spazio, rispetto ad un piano α, può essere: • parallela ad esso se non ha alcun punto in comune col piano • appartenente al piano se tutti i suoi punti sono punti del piano • incidente col piano se ha in comune con esso un solo punto.

La retta r è parallela al piano α

La retta PQ appartiene al piano α

La retta s è incidente col piano α



Definizione: Una retta si dice **perpendicolare** ad un piano in un suo punto P, se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per A. Il punto P è detto **piede della perpendicolare**. Una retta che incontra un piano e non è perpendicolare ad esso, si dice **obliqua** al piano.	

Teorema**:** Per un dato punto dello spazio si può condurre una ed una sola retta perpendicolare ad un piano dato.

Teorema: Per un dato punto si può condurre uno ed un solo piano perpendicolare ad una data retta.

Corollario: Due rette perpendicolari ad uno stesso piano sono fra loro parallele.

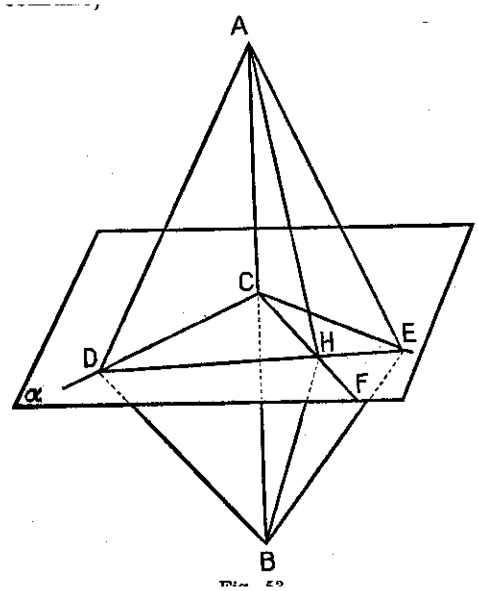
Definizione: Si chiama distanza di un punto da un piano il segmento di perpendicolare condotto da quel punto al piano.

Definizione: Se una retta è parallela ad un piano. si chiama **distanza della retta dal piano** il segmento di perpendicolare condotto da un punto qualsiasi della retta al piano.

Definizione: Si chiama **distanza fra due piani paralleli** il segmento di perpendicolare condotto da un punto qualsiasi di un piano all'altro piano.

Teorema

Se una retta r incontra un piano α in un punto **C** ed è perpendicolare a due rette a e b di α passanti per **C**, allora essa è perpendicolare tutte le rette del piano passanti per **C**.

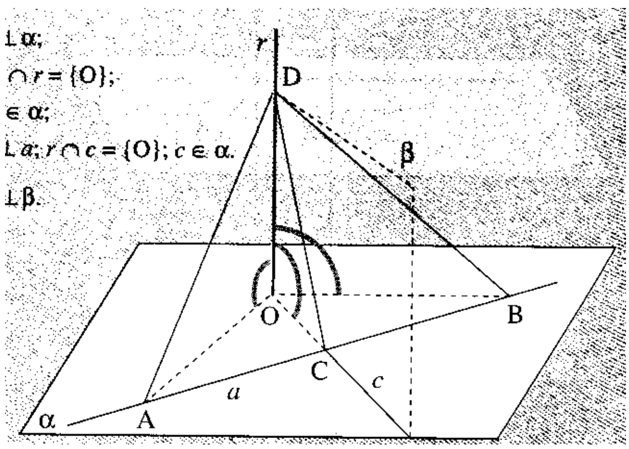


Teorema delle tre perpendicolari

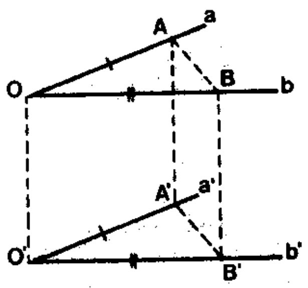
Se: a) P è il piede di una retta r perpendicolare ad un piano α

b) s è una retta di α non passante per P

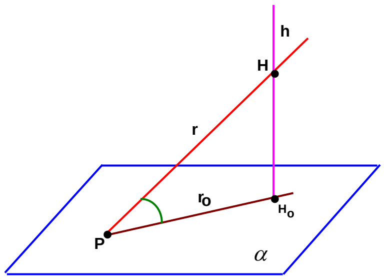
c) t è la retta di α passante per P e perpendicolare ad s , allora la retta s è perpendicolare al piano individuato dalle rette r e t.



Teorema: Tutte le rette perpendicolari ad una retta in un suo punto giacciono sullo stesso piano.

Teorema Due angoli, non giacenti in uno stesso piano, aventi i lati rispettivamente paralleli e concordi, sono uguali .	

Definizione di angolo di una retta con un piano



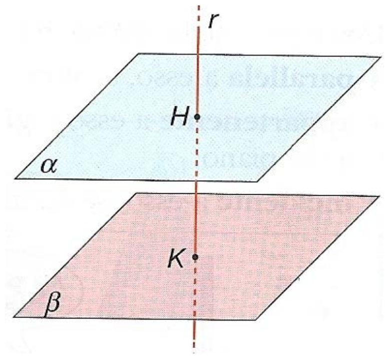
E' dato l'angolo α e la retta r non perpendicolare ad α. Si P il punto comune ad r ed α. Sulla retta r prendiamo un punto H distinto da P e conduciamo per H la retta h normale ad α. Indichiamo con H_o il punto d'intersezione di h Con affetto. Uniamo P con H_o e chiamiamo r_o la retta così ottenuta.

L'angolo $\hat{r}r_o = H_o\hat{P}H$ si assume come angolo della retta r con il piano α .

Teorema: L'angolo acuto che una retta obliqua r rispetto ad un piano α forma con la sua proiezione ortogonale su questo piano, è minore dell'angolo acuto che essa forma con una qualsiasi altra retta del piano passante per il punto d'incontra di r con α .

Questo teorema giustifica la precedente definizione di angolo che una retta forma con un piano e che adesso riformuliamo così: **data una retta, obliqua rispetto ad un piano, si dice angolo della retta col piano l'angolo acuto che la retta forma con la sua proiezione ortogonale sul piano.** Tale angolo si chiama anche **inclinazione** della retta rispetto al piano.

Distanza tra due piani paralleli

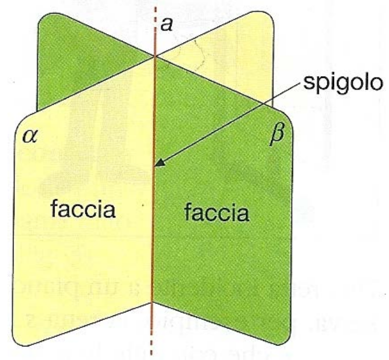


Consideriamo due piani α e β paralleli. Da un punto H del piano α traccio la retta r perpendicolare al piano β e sia K il punto d'intersezione fra la retta r ed il piano β. Il segmento HK è la distanza fra i due piani paralleli α e β.

Diedri e piani perpendicolari

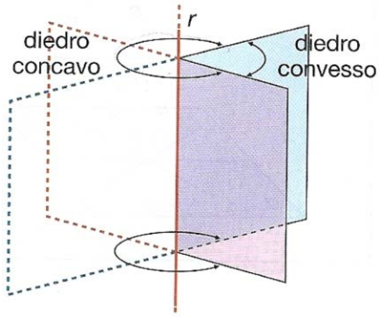
Definizione: Si dice angolo diedro o semplicemente **diedro** ciascuna delle due parti in cui lo spazio è diviso da due semipiani aventi la stessa origine. I due semipiani si dicono le **facce** del diedro, mentre la retta, origine dei due semipiani, prende il nome di **spigolo** del diedro.

Altra definizione Il diedro è la parte di spazio descritta da un semipiano che ruota attorno alla sua retta origine.

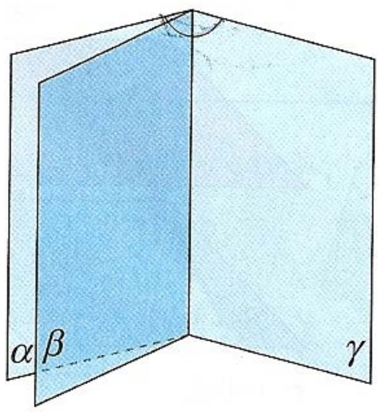


Definizione Un diedro si dice **convesso** se non contiene i prolungamenti delle due facce; si dice **concavo** se li contiene.

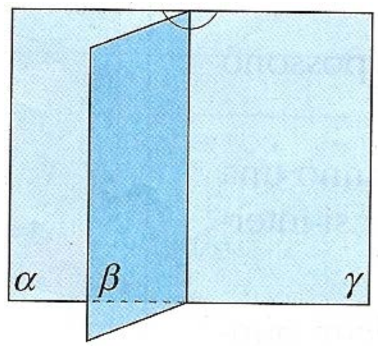
Definizione Un diedro si dice **piatto** se le sue facce sono una il prolungamento dell'altro. In questo caso il diedro coincide con uno dei due semispazi.



Definizione Due diedri si dicono **consecutivi** se hanno lo spigolo ed una faccia in comune e le altre due facce da bande opposte rispetto alla faccia comune.

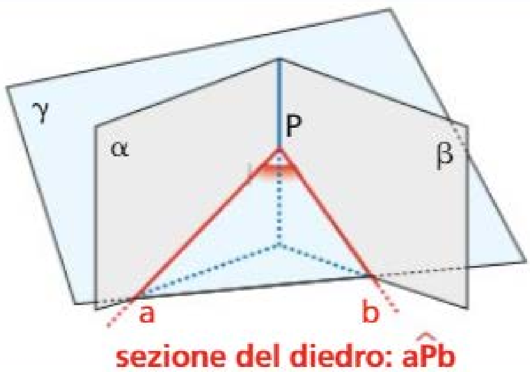


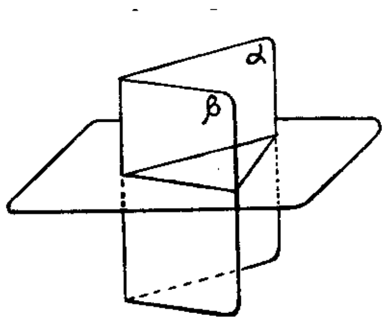
Definizione Due diedri si dicono **adiacenti** se, ***essendo consecutivi***, hanno le due facce non comuni opposte.



DEFINIZIONE

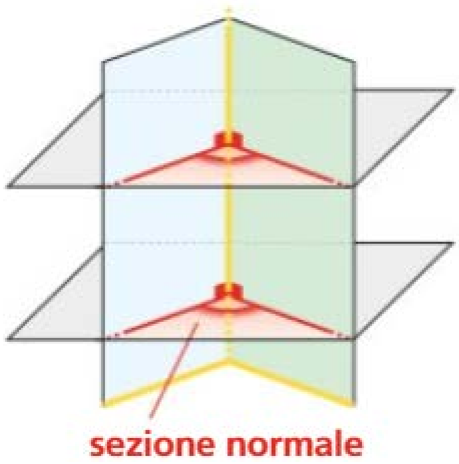
Una **sezione di un diedro** è l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano non parallelo allo spigolo che interseca il suo spigolo.





Definizione

Si dice **sezione normale** di un diedro l'angolo che si ottiene sezionandolo con un piano perpendicolare allo spigolo.



Teorema

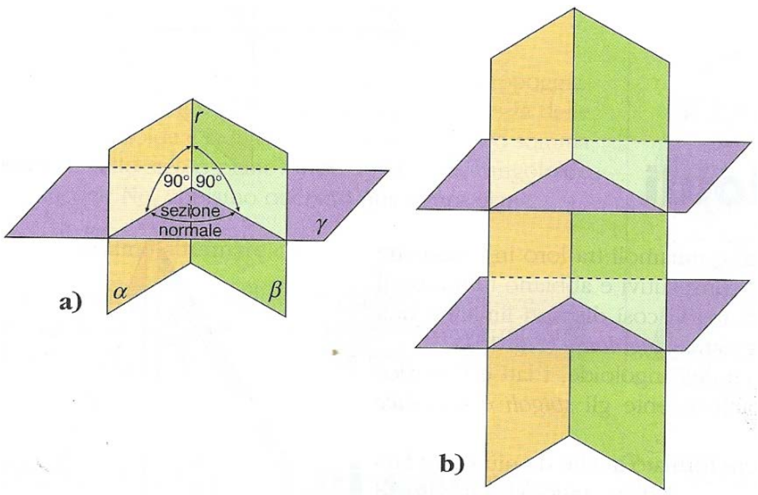
Tutte le sezioni normali di un diedro sono uguali

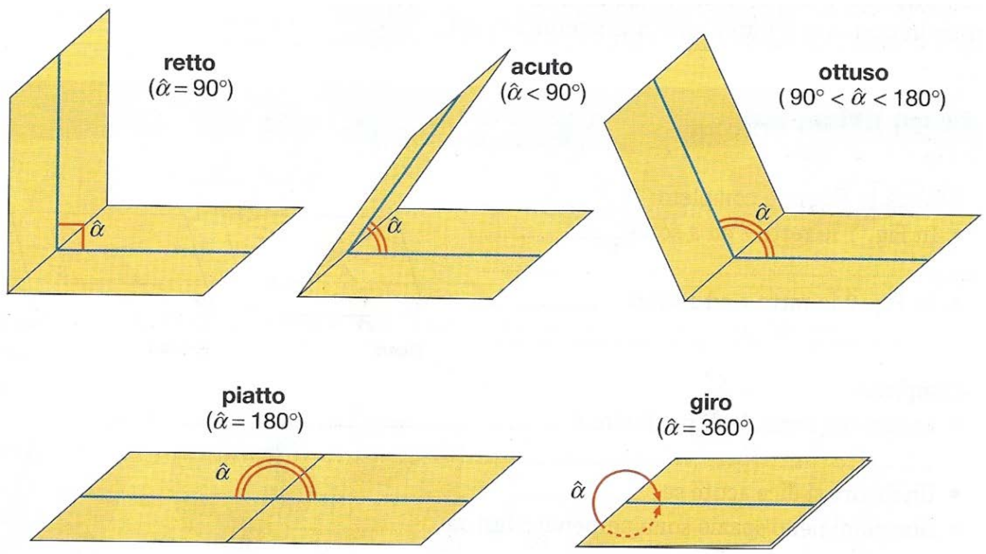
Teorema Condizione necessaria e sufficiente perché due diedri siano uguali è che siano uguali le loro sezioni normali. La **misura** di un diedro coincide con la misura di una sua qualsiasi sezione.
Un diedro si dice **acuto, retto, ottuso** secondo che una sua sezione normale è rispettivamente un angolo acuto, retto, ottuso.

Definizione Diedro piatto è il diedro le cui facce sono semipiani opposti

Definizione Diedro giro è quello descritto da un semipiano che ruota di un angolo giro attorno alla sua origine.

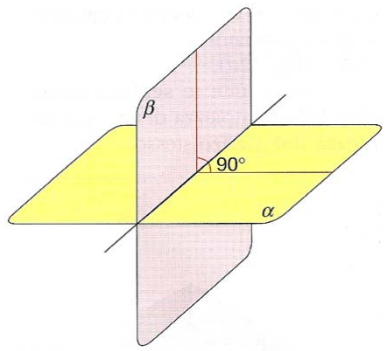
Definizione Due diedri si dicono **supplementari** se la loro somma è un diedro piatto; **complementari** se la loro somma è un angolo retto.

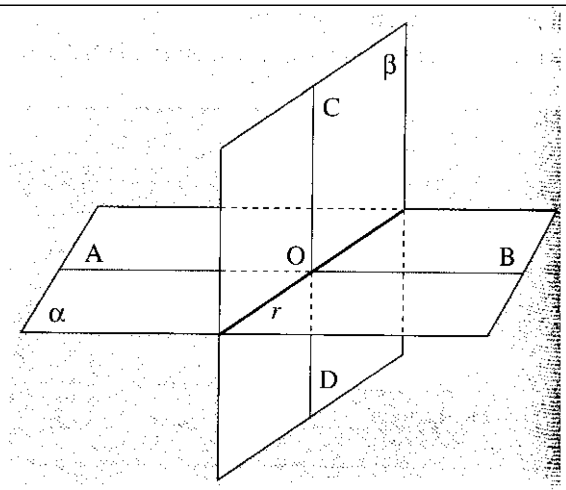


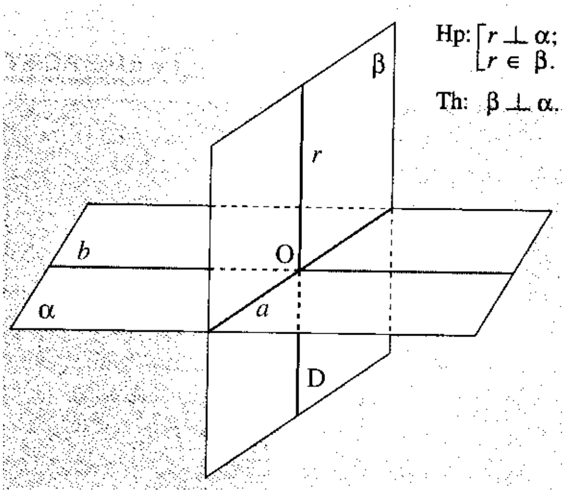


Definizione

Due piani si dicono perpendicolari se incontrandosi formano quattro diedri uguali, cioè **retti**.

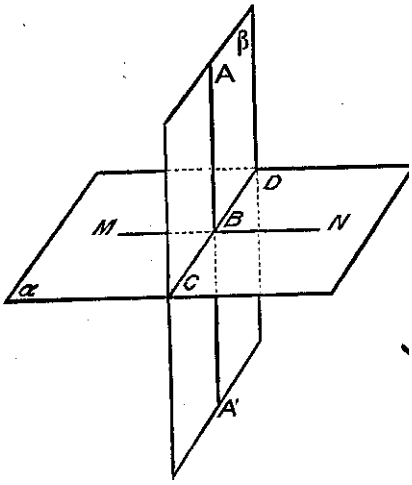


Definizione Due piani si dicono perpendicolari se incontrandosi formano quattro diedri uguali, cioè retti.	



Teorema

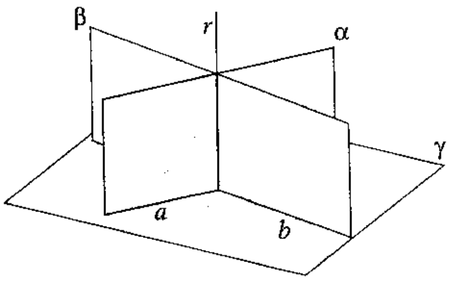
Se una retta r è perpendicolare ad un piano α, qualunque piano β passante per r è perpendicolare al piano α.

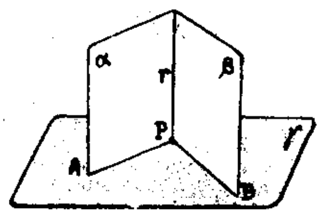


Teorema

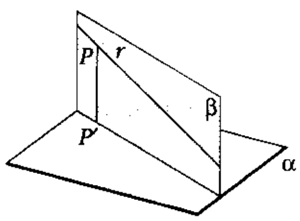
Se due piani sono perpendicolari, ogni retta dell'uno, che sia perpendicolare alla retta intersezione, è perpendicolare all'altro piano.

Teorema Se due piani α e β che si tagliano sono entrambi perpendicolari ad un terzo piano γ, anche la loro retta di intersezione è perpendicolare a γ.





Teorema Per una retta r non perpendicolare ad un piano α si può condurre un solo piano β perpendicolare al piano dato α e la loro intersezione è la proiezione ortogonale della retta r sul piano α.

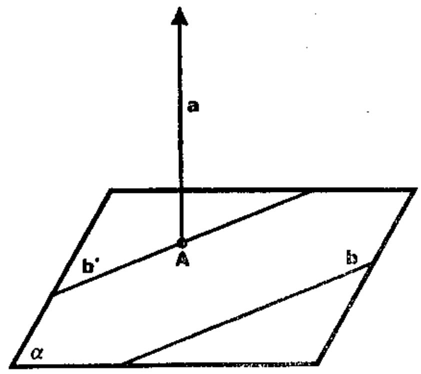


Angolo di due rette sghembe

Si dicono **angoli formati da due rette sghembe** gli angoli formati dalle rette ad esse parallele condotte per un punto P qualsiasi dello spazio. In particolare possiamo scegliere come punto P un punto qualsiasi di una delle due rette sghembe. Quando le parallele condotte per il punto P alle rette sghembe date non sono fra loro perpendicolari, dei quattro angoli, a due a due uguali, da esse formati si assume solitamente come **angolo delle due rette sghembe** uno dei due angoli acuti. Quando le rette parallele condotte per il punto P sono perpendicolari diciamo che le rette sghembe sono **ortogonali**.

Teorema

Affinché due rette sghembe siano **ortogonali**, occorre e basta che una di esse sia perpendicolare ad un piano passante per l'altra.

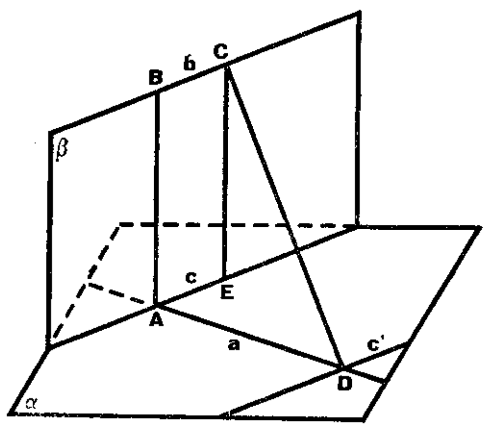


Distanza tra due rette sghembe

Teorema

Date due rette sghembe, fra le infinite rette che congiungono un punto dell'una con un punto dell'altra, esiste sempre una sola retta s che è perpendicolare ad entrambe le rette date.

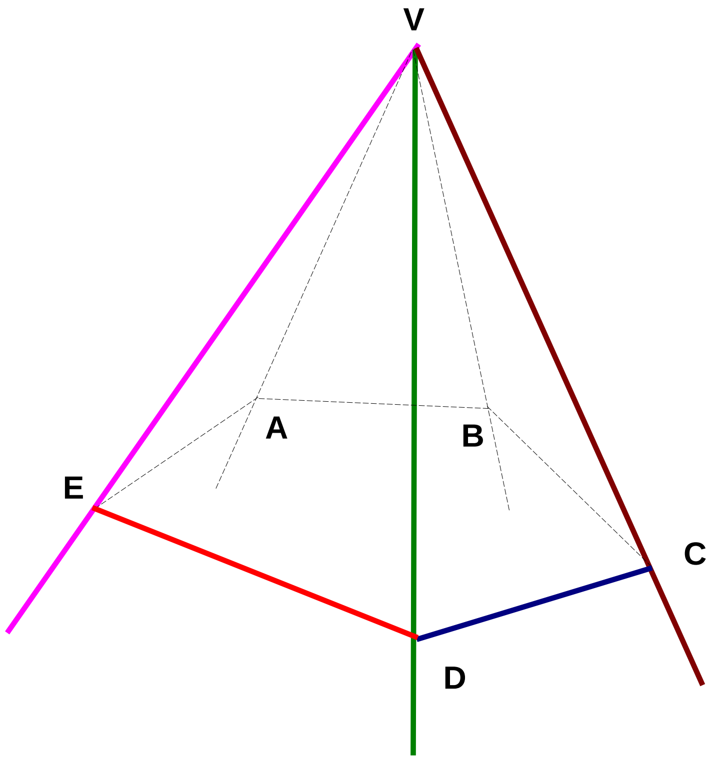
Il segmento, che su questa retta s comune è intercettato dalle due rette sghembe, è minore di tutti gli altri segmenti, che hanno gli estremi su di essa.



Definizione Si dice **distanza** di due rette sghembe il segmento da esse intercettato sulla perpendicolare comune.

Gli angoloidi

Definizione di angoloide:



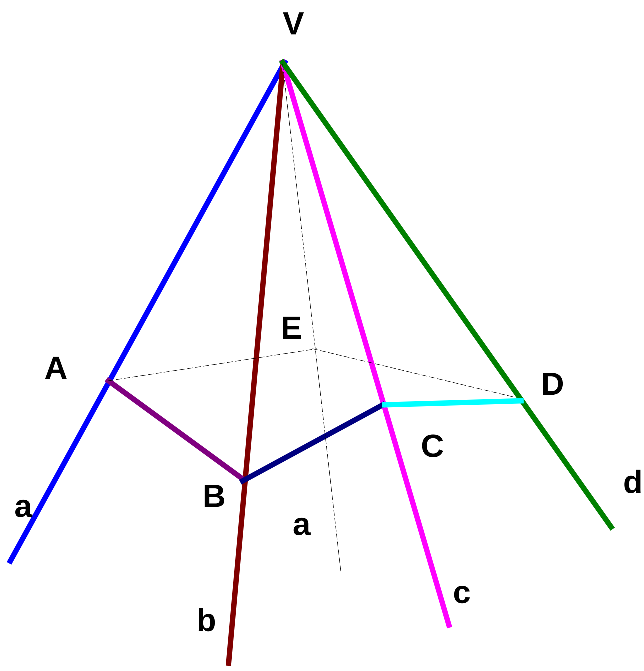
Dato un poligono qualsiasi $ABCDE$ ed un qualunque punto V non appartenente al piano del poligono, si considerino gli angoli convessi $A\hat{V}B$, $B\hat{V}C$, $C\hat{V}D$, $D\hat{V}E$, $E\hat{V}A$ formati dalle semirette che congiungono V con i successivi vertici del poligono. La superficie formata da tali angoli piani limiterà una parte di spazio che prende il nome di angoloide. Diversamente chiamiamo angoloide il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.

Quindi un angoloide è la parte di spazio delimitata da tre o più angoli a due a due consecutivi ed aventi il vertice in comune.

Il punto **V** si dice vertice dell'angoloide, le semirette VA, VB, VC, VD, VE si dicono spigoli dell'angoloide, gli angoli piani $A\hat{V}B$, $B\hat{V}C$, $C\hat{V}D$, $D\hat{V}E$, $E\hat{V}A$ sono le facce dell'angoloide.

Un angoloide con 3, 4, 5 facce dicesi rispettivamente triedro, tetraedro, pentaedro.

Un angoloide si dice convesso o concavo se il poligono che serve per la sua costruzione è convesso o concavo.



Angoloide concavo

Un angoloide si legge nominando prima il vertice, poi un punto per ogni spigolo. Pertanto l'angoloide da noi introdotto se leggerà $VABCDE$.

Proprietà delle facce di un triedro

Teorema: In un triedro ogni faccia è minore della somma delle altre due e maggiore della loro differenza.

Teorema: In un triedro la somma delle sue facce è minore di 4 angoli retti.

Proprietà delle facce di un poliedro

Teorema: In un angoloide convesso ogni faccia è minore della somma di tutte le altre.

Teorema: In ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di quattro angoli retti

$$B\hat{V}C + C\hat{V}D + D\hat{V}E + E\hat{V}A < 360°$$

Criteri di uguaglianza dei triedri

Primo criterio: Due triedri sono uguali se hanno ordinatamente uguali due facce ed il diedro compreso.

Secondo criterio: Due triedri sono uguali se hanno ordinatamente uguali due diedri e la faccia ad essi comune.

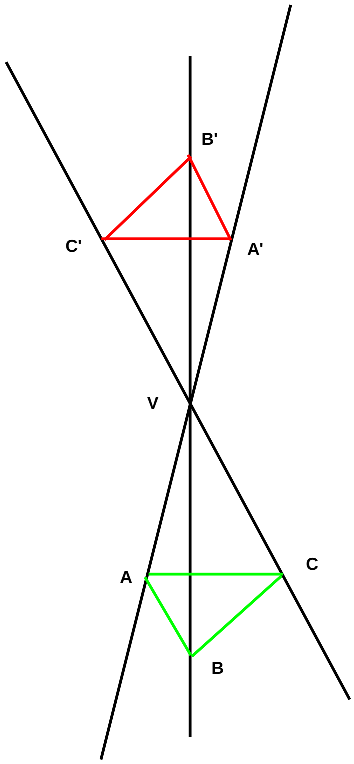
Terzo criterio: Due triedri sono uguali se hanno le facce ordinatamente uguali.

Quarto criterio: Due triedri sono uguali se hanno i diedri ordinatamente uguali.

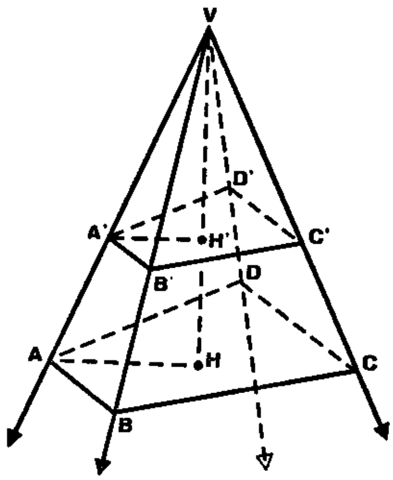
Definizione

Due triedri si dicono opposti al vertice se gli spigoli dell’uso sono i prolungamenti degli spigoli degli altri.

Si dimostra facilmente che <<due triedri opposti al vertice sono uguali>>.



Sezioni parallele di un angoloide

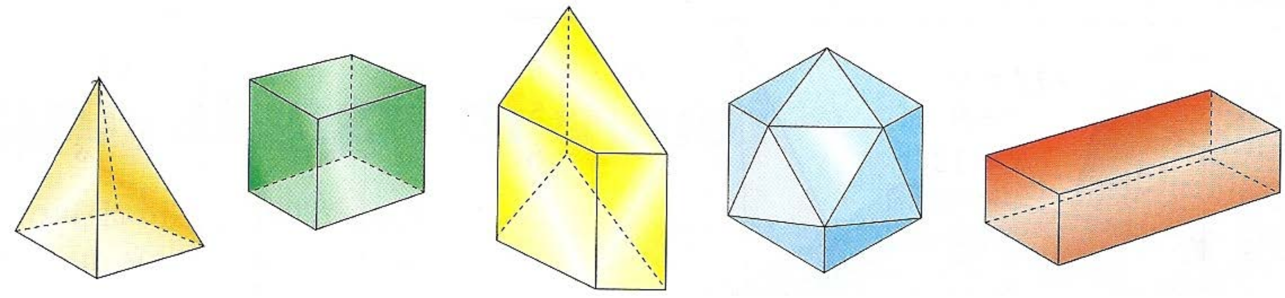


Teorema

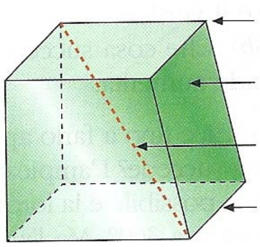
Se due piani paralleli tagliano tutti gli spigoli di un angoloide, i poligoni, che così si ottengono come sezioni dell’angoloide, sono simili ed il loro rapporto di similitudine è uguale al rapporto delle distanze dei rispettivi piani dal vertice.

I poliedri

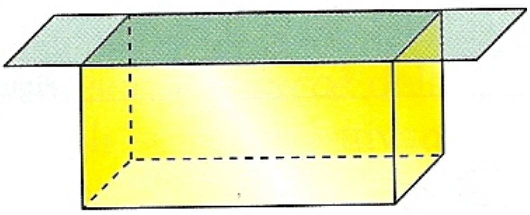
Definizione di poliedro: Dicesi poliedro la regione finita di spazio delimitata da un numero finito di poligoni convessi, giacenti su piani diversi ed aventi a due a due un lato in comune.

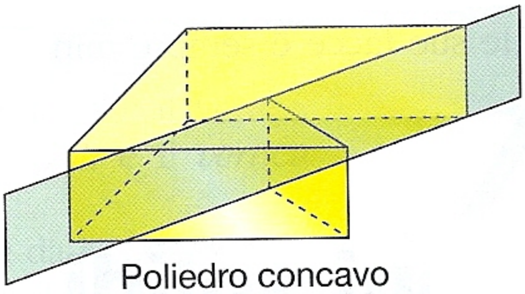


I poligoni che delimitano il poliedro, i loro vertici si chiamano rispettivamente facce, vertici, spigoli del poliedro. Ogni segmento che unisce due vertici non appartenenti alla stessa faccia prende il nome di diagonale del poliedro.



L'insieme delle facce si dice superficie del poliedro. Un poliedro si dice convesso, se ogni sua faccia appartiene ad un piano che non interseca il poliedro, si dice concavo se almeno una sua faccia appartiene ad un piano che interseca il poliedro.


Poliedro convesso


Poliedro concavo

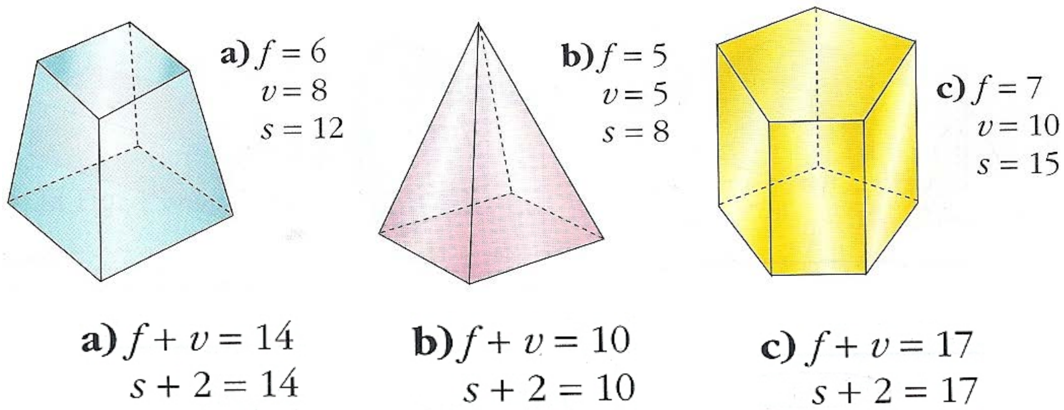
Un poliedro non può avere meno di quattro facce. Il poliedro prende il nome di tetraedro se ha 4 facce, pentaedro se ha 5 facce, esaedro se ha 6 facce, e così di seguito.

Definizione: Diagonale di un poliedro è il segmento che congiunge due vertici che non appartengono alla stessa faccia.

Elementi caratteristici di ogni poliedro sono gli angoli piani (cioè gli angoli di ciascuna faccia), i diedri (cioè gli angoli formati dalle facce che escono da ogni spigolo), gli angoloidi formati dagli angoli piani i cui lati partono da uno stesso vertice.

Teorema: In ogni poliedro convesso il numero delle facce più il numero dei vertici è uguale al numero degli spigoli aumentato di due. $f + v = s + 2$ dove f rappresenta il numero complessivo delle facce del poliedro, v il numero complessivo dei vertici ed s il numero complessivo degli spigoli. Tale formula prende il nome di relazione di Eulero.

Verifica della relazione di Eulero per alcuni poliedri.



Poliedri regolari

Definizione: Un **poliedro** si dice **regolare** quando le **sue facce** sono poligoni regolari uguali ed i suoi **angoloidi** sono uguali fra loro.

Teorema: Esistono soltanto 5 tipi di poliedri regolari.

Ricordando che l'ampiezza di ciascun angolo di un poligono regolare aumenta col numero dei lati di questo [1], possiamo concludere che le facce dei poliedri regolari possono essere soltanto:

a) **triangoli equilateri** b) **quadrati** c) **pentagoni regolari**.

I poligoni regolari, detti solidi di Platone, sono soltanto **5** in quanto le loro facce possono essere triangoli equilateri (tetraedro), quadrati (cubo), pentagoni regolari (dodecaedro).

Un poligono regolare non può avere come faccia un esagono in quanto avremmo come somma $3 \cdot 120° = 360°$ in contrasto con quanto detto prima. E questo ci consente di affermare che non esiste un poliedro regolare a facce esagonali.

Si hanno le seguenti possibilità:

1. Le facce del poliedro sono triangoli equilateri: le facce dei quattro angoloidi possono esere 3 ($\mathbf{3 \times 60° = 180° < 360°}$, 4 ($\mathbf{4 \times 60° = 240° < 360°}$), 5 ($\mathbf{5 \times 60° = 300° < 360°}$). Con più di 6 facce avremmo un valore $\geq 360°$. Esistono tre poliedri regolari con le facce triangolari; sono il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro.

[1] La somma degli angoli interni di un poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due

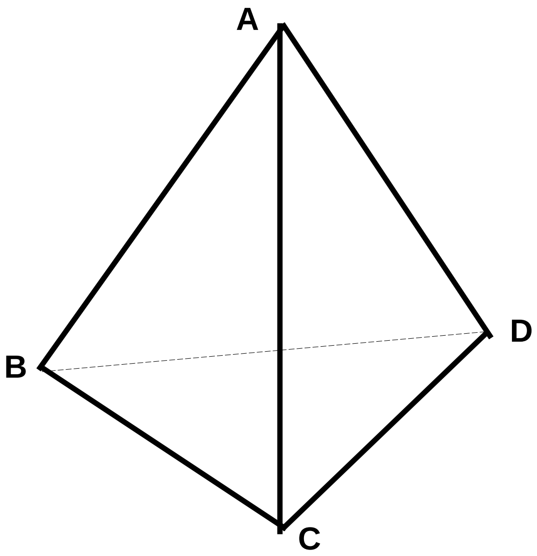
2. Se le facce del poliedro sono quadrate, le facce degli angoloidi non possono essere più di 3 ($3 \times 90° = 270° < 360°$). Abbiamo l'esaedro (cubo). Nel caso di 4 facce avremmo: $4 \times 90° = 360°$; con non possibile per quanto detto in precedenza.

3. Un poliedro con facce pentagoni regolari può avere al massimo 3 facce; risulta $3 \times 108° = 324° < 360°$. Abbiamo il dodecaedro regolare.

I 5 poliedri regolari sono i seguenti:

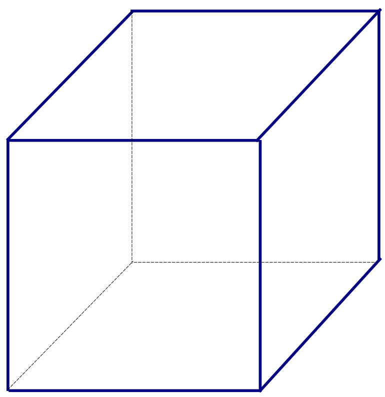
1) Il tetraedro regolare, formato da 4 **triangoli equilateri**.

Possiede 4 vertici e 6 spigoli .



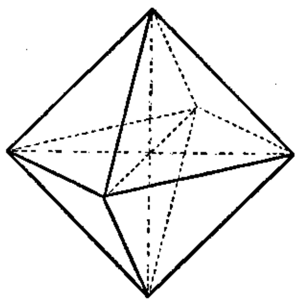
2) Il cubo o esaedro regolare, formato da 6 quadrati.

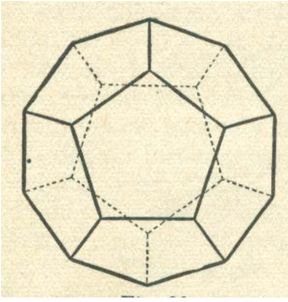
Possiede 8 vertici e 12 spigoli.



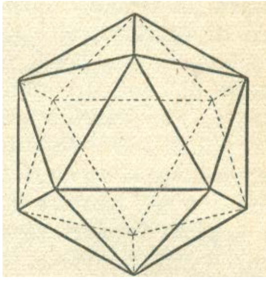
3) L'ottaedro regolare, formato da 8 triangoli equilateri.

Possiede 6 vertici e 12 spigoli .





4) Il dodecaedro regolare, formato da 12 pentagoni regolari. Possiede 20 vertici e 12 spigoli .

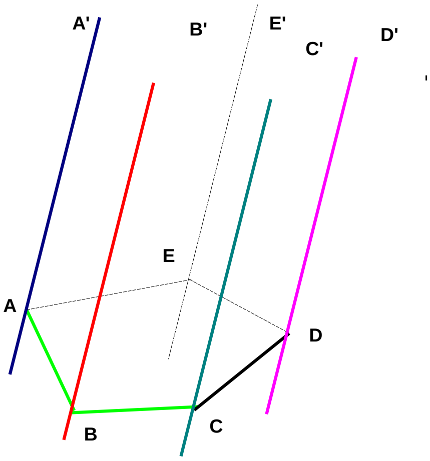


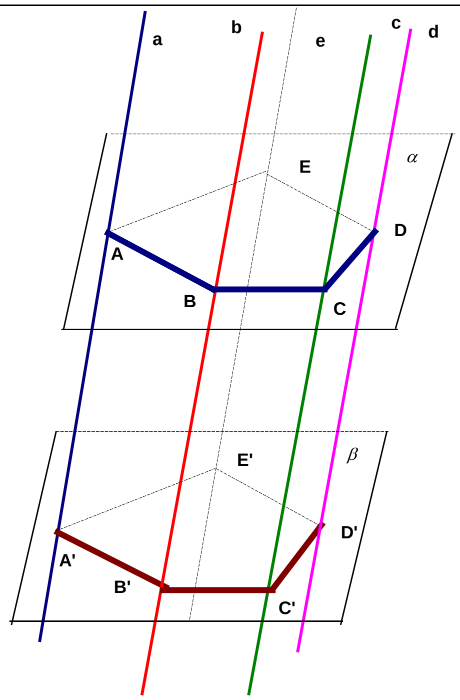
5) L'icosaedro regolare, formato da 20 triangoli equilateri. Possiede 12 vertici e 30 spigoli.

Prisma

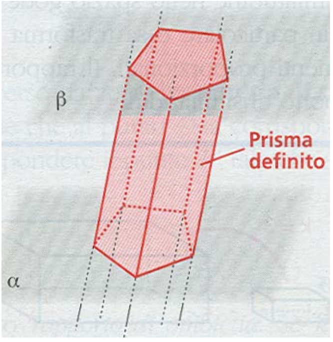
Definizione di prisma indefinito

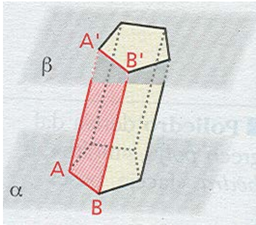
Dato un poligono convesso $ABCDE$ si conducano per i suoi vertici le rette AA', BB', CC', DD', EE', parallele tra loro e non giacenti nel piano del poligono. Si definisce **superficie prismatica indefinita** la figura costituita da tutte le strisce determinate da due di tali rette parallele passante per due vertici consecutivi del poligono dato. Lo spazio delimitato dalla superficie prismatica indefinita prende il nome di **prisma indefinito**. Le rette AA', BB', CC', DD', EE' sono gli spigoli **e le strisce sono le** facce **del prisma indefinito**



Teorema: Le sezioni di un prisma indefinito con due piani paralleli che incontrano tutti gli spigoli sono poligoni uguali.	

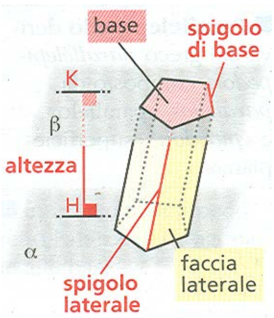
Definizione di prisma: Si chiama **prisma** la parte di prisma indefinito compresa tra due piani paralleli che lo intersecano. I due piani paralleli individuano sul prisma indefinito due sezioni parallele che sono poligoni uguali.





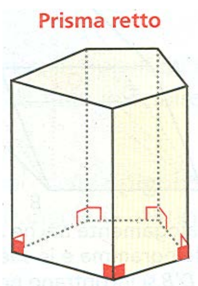
Le sezioni parallele si dicono **basi** del prisma; le altre facce, che sono dei parallelogrammi, si dicono **facce laterali** e la loro somma costituisce la **superficie laterale. La somma della** superficie laterale con le due basi costituisce la **superficie totale**. **Altezza** del prisma è la distanza fra i piani delle basi. Ogni lato di base si chiama spigolo di base, i lati delle facce laterali si chiamano spigoli laterali. I vertici dei poligoni vengono detti vertici del prisma. Le **diagonali** di un prisma sono quei segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia. Un prisma triangolare non ha diagonali.

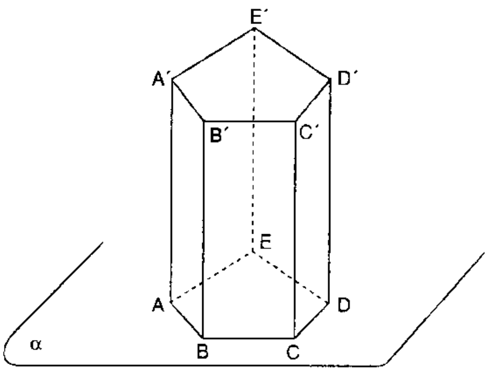
I prismi possono essere classificati mediante i poligoni di base. Se la base è un esagono, il prisma si di ce **esagonale**; se è un triangolo, **triangolare**, e così di seguito.



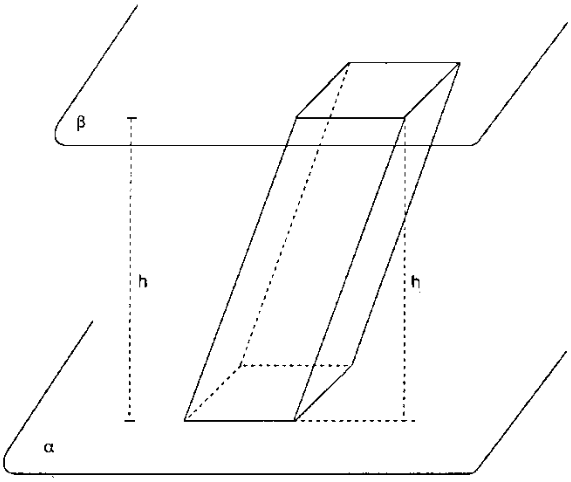
Definizione

Un prisma si dice retto se ha gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.

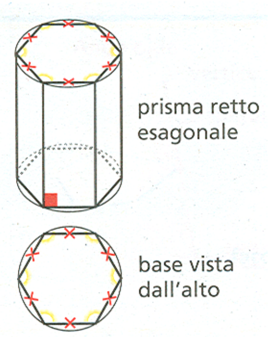




Prisma retto



Prisma obliquo



Definizione

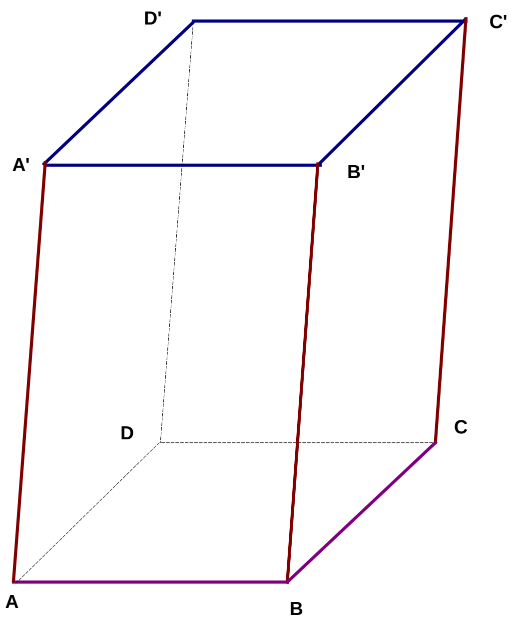
Un **prisma retto** si dice regolare quando le sue basi sono **poligoni regolari**.

La figura mostra un prisma regolare a base esagonale. Le basi sono due esagoni regolari.

Parallelepipedo

Definizione: Si chiama parallelepipedo un prisma avente per basi due parallelogrammi.

Le facce di un parallelepipedo sono **parallelogrammi**. Nel parallelepipedo vi sono 6 facce, **8 vertici**, e **12 spigoli**. Si dicono **opposte** le facce che non hanno spigoli comuni. Gli spigoli del parallelepipedo sono a 4 a 4 uguali e paralleli.

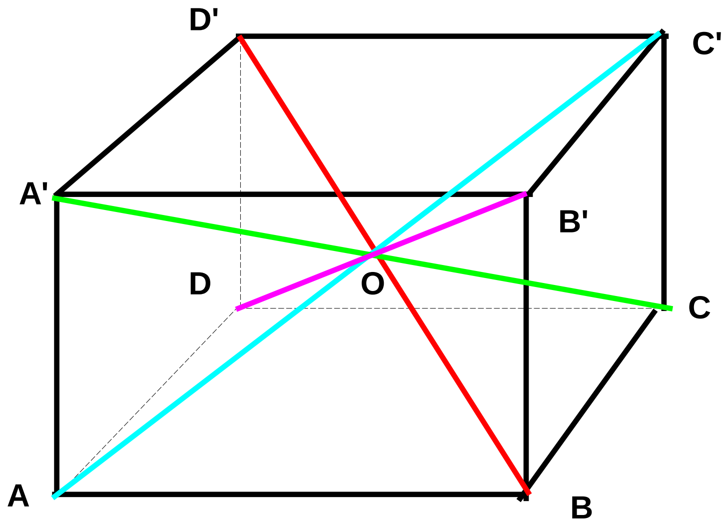


Parallelepipedo Obliquo

Teorema: In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e le 4 diagonali passano per uno stesso punto che dimezza ciascuna di esse.

Teorema

In ogni parallelepipedo le facce opposte sono uguali e parallele, e le 4 diagonali passano per uno stesso punto che dimezza ciascuna di esse.



Definizione: Si chiama parallelepipedo rettangolo un parallelepipedo retto le cui basi sono dei rettangoli.

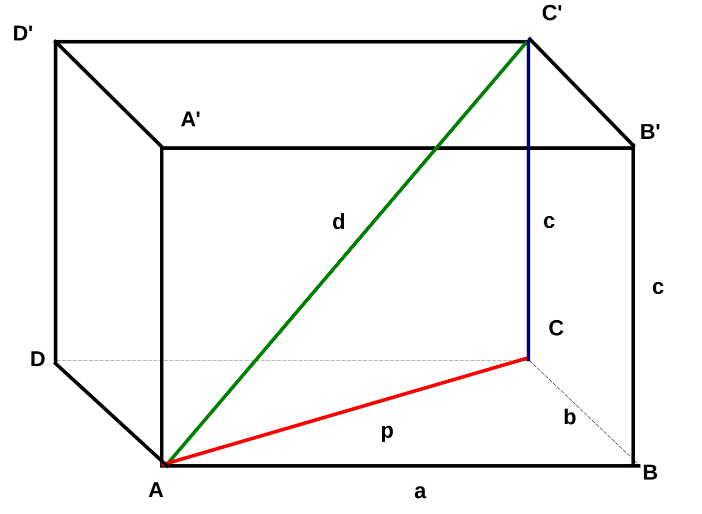
Teorema: Nel parallelepipedo rettangolo le diagonali sono uguali.

Definizione

Si chiama **parallelepipedo rettangolo un parallelepipedo retto le cui basi sono dei rettangoli.**

Teorema

Nel parallelepipedo rettangolo le diagonali sono uguali.



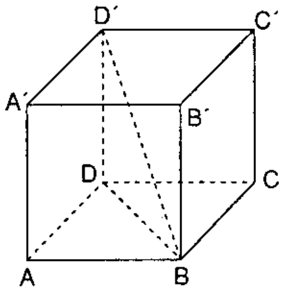
La misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo

La misura **d** della diagonale di un parallelepipedo rettangolo si ottiene estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle misure delle sue tre dimensioni. In simboli abbiamo:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \qquad \mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cubo

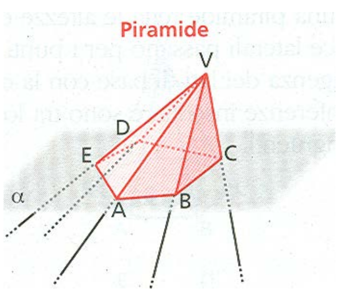
Definizione: Si chiama **cubo** un parallelepipedo rettangolo avente le tre dimensioni uguali.
Si tratta di un parallelepipedo retto avente per facce 6 quadrati.

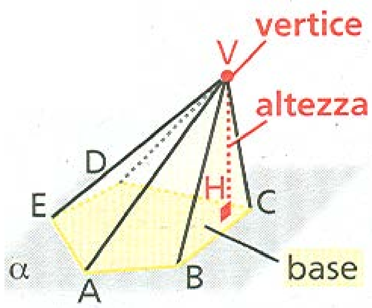


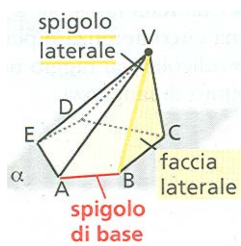
Risulta : $d^2 = 3\ell^2$ $\quad d = \sqrt{3\ell^2}$ $\quad \ell = \dfrac{\sqrt{3}}{3}d$

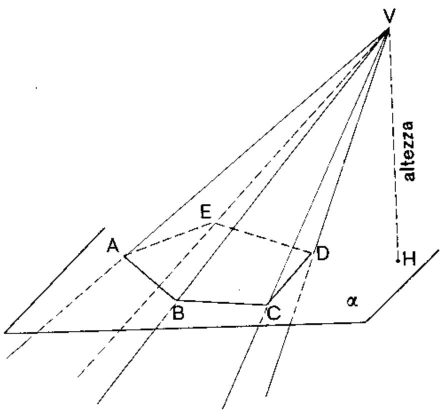
Piramide

Definizione: Si chiama piramide la parte finita di angoloide compresa tra una sua sezione piana ed il suo vertice. Il poligono intersezione fra il piano e l'angoloide si chiama base della piramide, il vertice dell'angoloide è il vertice della piramide.









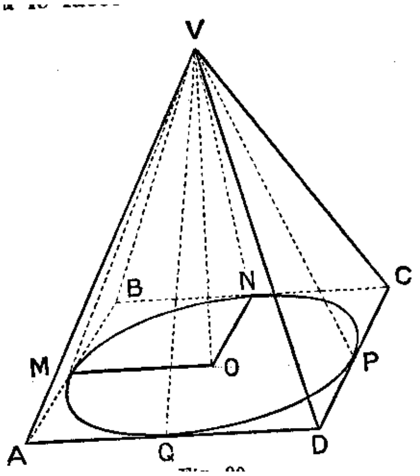
Anche le piramidi sono classificate mediante i poligoni di base. Se la base è un triangolo, la piramide si dice triangolare, se è un quadrilatero abbiamo la piramide quadrangolare e così di seguito.

I triangoli ABV, BCV, CDV, DKV, KAV sono le **facce laterali** ed i loro lati sono gli spigoli **della piramide. L'insieme delle facce laterali costituisce la superficie laterale**, e , aggiungendo ad essa la base, si ha la **superficie totale** della piramide. La piramide prende il nome dal numero dei lati del poligono di base. Avremo piramidi triangolari , quadrangolari …… La piramide triangolare si dice anche **tetraedro**, e si può considerare come piramide in 4 modi diversi perché si può assumere come base una qualsiasi delle sue facce. Dicesi altezza di una piramide la distanza del suo vertice dal piano contenente la base. In definitiva **la piramide è un poliedro** delimitato da un poligono, detto **base**, e da tanti triangoli (facce laterali) quanti sono i lati del poligono di base.

Definizione: Una piramide si dice **retta** se nel poligono di base possiamo inscrivere una circonferenza il cui centro coincide col piede dell'altezza della piramide.

Teorema: Le altezze delle facce laterali di una piramide retta sono uguali. Questo teorema giustifica la seguente

Definizione: chiamasi apotema di una piramide retta l'altezza di una delle sue facce laterali. **Per una piramide retta vale la seguente relazione :** $a^2 = h^2 + r^2$

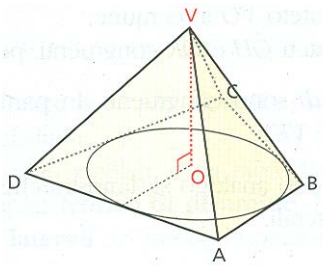


Piramide retta

a = apotema della piramide

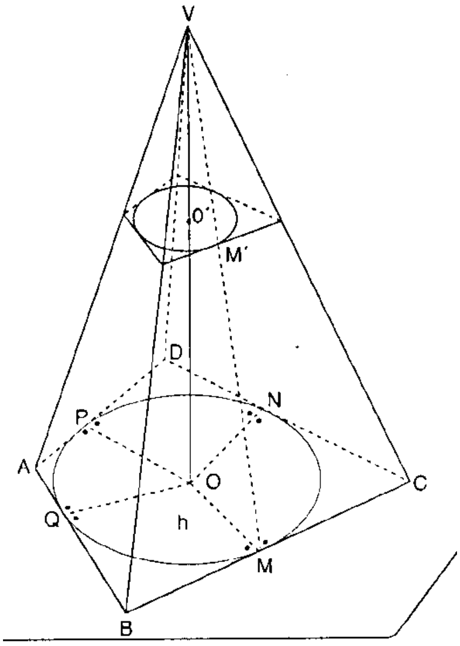
h = altezza della piramide

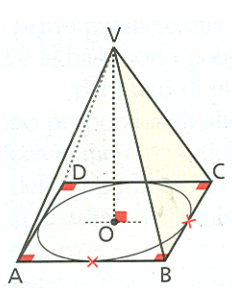
r = raggio della circonferenza inscritta nel poligono di base .



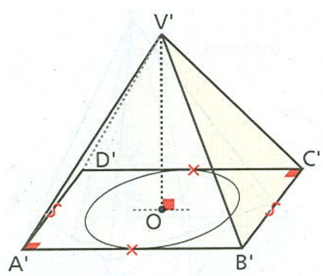
Piramide retta

Il centro O della circonferenza è la proiezione ortogonale del vertice V. Il segmento VO è l'altezza della piramide.

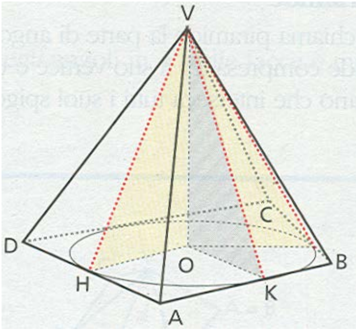




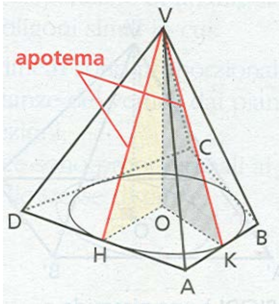
$VABCD$ è una piramide retta a base quadrata. Nel quadrato è possibile inscrivere una circonferenza. Il centro di questa circonferenza è il piede della perpendicolare condotta da V al piano di base.



$V'A'B'C'D'$ è una piramide a base rettangolare. Anche se $V'O$ è perpendicolare al piano di base, **non si tratta di una piramide retta**: nel rettangolo di base non possiamo inscrivere una circonferenza.



In una piramide retta le altezze delle facce laterali passano per i punti di tangenza dei lati di base con la circonferenza inscritta e sono tra loro uguali.



Apotema di un a piramide retta

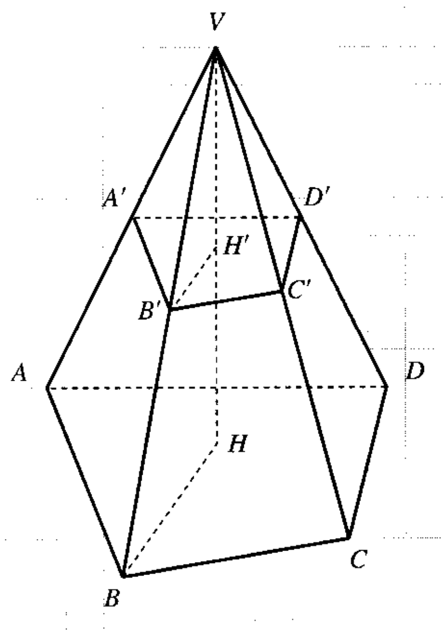
Definizione: Una piramide si dice **regolare** se è retta ed ha per base un poligono regolare.

Teorema: Gli spigoli laterali di una piramide regolare sono uguali.

Teorema: Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli tutti uguali fra loro .

Teorema delle sezioni parallele di una piramide

La sezione che si ottiene tagliando una piramide con un piano parallelo alla base è un poligono simile a quello di base. I perimetri di questi due poligoni sono proporzionali alle loro distanze dal vertice della piramide, mentre le aree sono proporzionali ai quadrati delle rispettive distanze dal vertice.



Tetraedro regolare

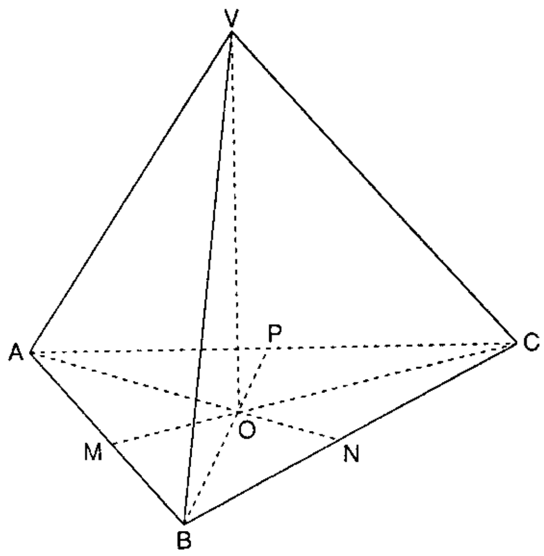
Si tratta di un poliedro regolare avente per facce quattro triangoli equilateri uguali. E' una piramide regolare.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = \overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VC} = \ell$$

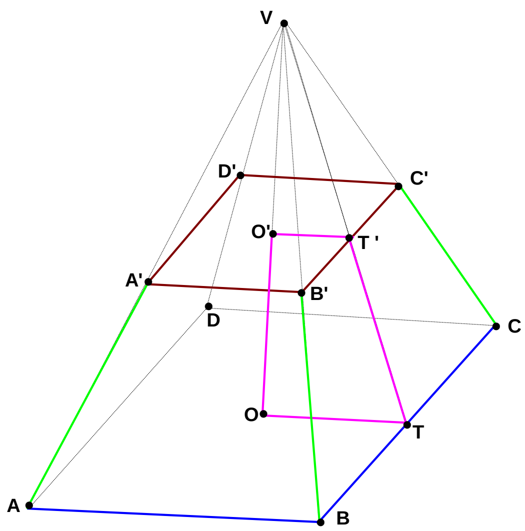
$$\overline{AN} = \overline{BP} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

$$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell$$

$$\overline{VO} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell \qquad S_t = \ell^2 \cdot \sqrt{3} \qquad V = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$$



Tronco di piramide

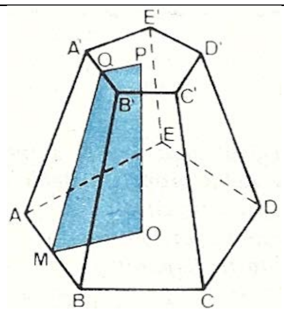
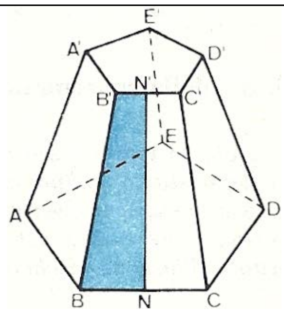
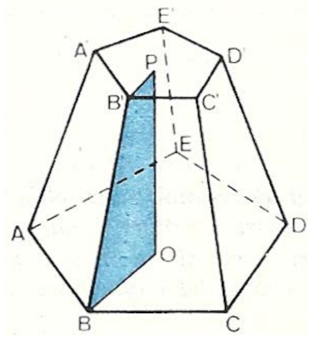


Definizione

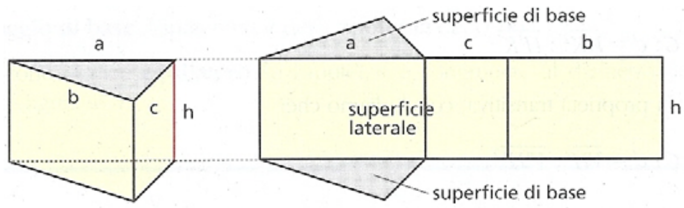
Dicesi **tronco di piramide la parte di piramide compresa tra la sua base ed una sezione parallela alla base.**

Tre particolari trapezi rettangoli in un tronco di piramide regolare

In un tronco di piramide regolare si hanno tre particolari importanti trapezi rettangoli, che è utile tenere presente nella risoluzione di molti problemi.

Un trapezio rettangolo ha per altezza l'**altezza** del tronco di piramide, per basi gli **apotemi** delle due basi e per lato obliquo l'**apotema** del tronco di piramide.	
Un trapezio rettangolo ha per altezza l'**apotema** del tronco di piramide, per basi la metà dei lati delle due basi del tronco e per lato obliquo lo **spigolo laterale**.	
Un trapezio rettangolo ha per altezza l'**altezza** del tronco di piramide, per basi i **raggi** dei poligoni basi del tronco e per lato obliquo lo **spigolo laterale**.	

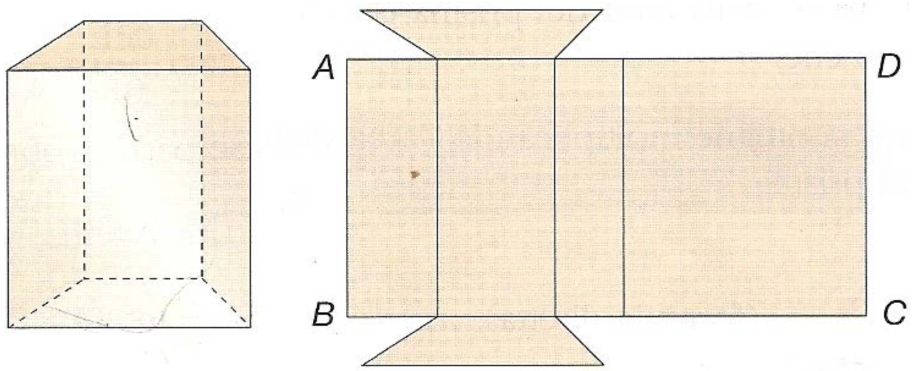
Lo sviluppo su un piano della superficie di un poliedro



Superficie laterale, totale e volume di un prisma

Il prisma è un poliedro limitato da due poligoni uguali e paralleli, le basi, e da tanti parallelogrammi, le facce laterali, quanti solo i lati del poligono di base. Se tutte le facce sono perpendicolari alle basi il prisma si dice retto; se è retto ed i poligoni di base sono poligoni regolari il prisma si dice regolare.

Per calcolare la misura della superficie laterale consideriamo un prisma retto ed il suo sviluppo.



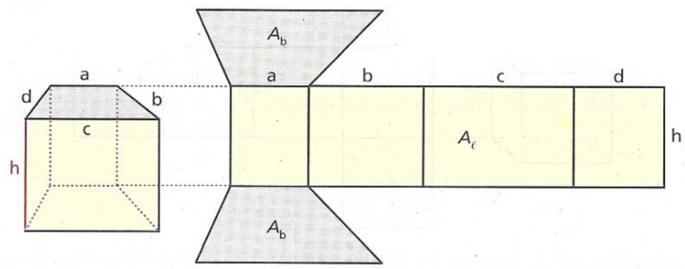
La superficie laterale del prisma coincide con la superficie del rettangolo *ABCD* dello sviluppo: questo rettangolo ha la base uguale al perimetro di base del prisma e l’altezza uguale all’altezza del prisma. Resta così giustificata la seguente regola:

L’area della superficie laterale di un prisma retto è uguale al prodotto della misura del perimetro della sua base per la misura della sua altezza. $S_l = p \cdot h$ $\quad p = \dfrac{S_l}{h}$ $\quad h = \dfrac{S_l}{p}$

Per ottenere l’area della superficie totale del prisma retto, basta addizionare all’area della superficie laterale la somma delle aree delle due basi (che sono uguali).

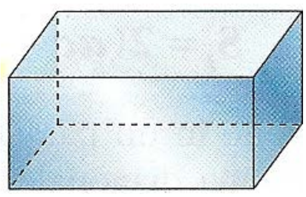
$$S_t = S_l + 2 \cdot A = p \cdot h + 2 \cdot A \qquad S_l = S_t - 2 \cdot A \qquad A = \frac{S_t - S_l}{2}$$

Lo sviluppo della superficie di un prisma retto



Il volume di un prisma è uguale al prodotto dell’area della superficie della sua base per la misura dell’altezza. $V = A_b \cdot h$ $\quad A_b = \dfrac{V}{h}$ $\quad h = \dfrac{V}{A_b}$

Superficie laterale, totale e volume di un parallelepipedo rettangoli

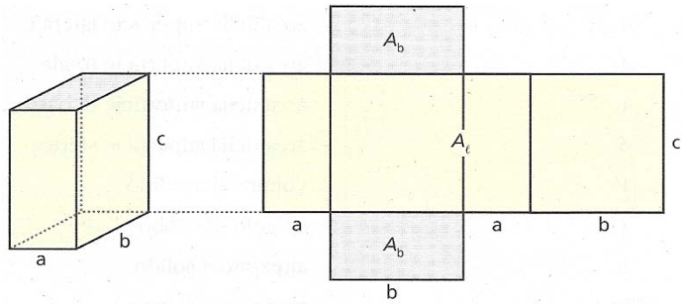


Il parallelepipedo è un prisma le cui basi sono dei parallelogramma. Esso è retto se tutte le facce sono perpendicolari alle basi, è rettangolo se è retto e le sue basi sono dei rettangoli per cui tutte e sei le facce sono uguali e parallele a due a due.

L’area della superficie laterale di un parallelepipedo retto si ottiene moltiplicando il perimetro di base per la misura dell’altezza.

L'area della superficie totale è data dalla somma dell'area della superficie laterale e dell'area delle due basi.

Lo sviluppo della superficie di un parallelepipedo rettangolo

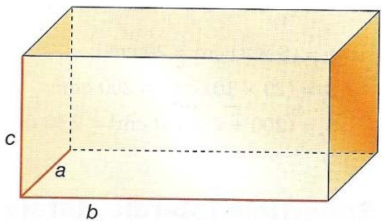


Il volume si ottiene moltiplicando l'area di base per la misura dell'altezza.

$$S_l = p \times h \qquad p = \frac{S_l}{h} \qquad h = \frac{S_l}{p} \qquad S_t = S_l + 2A_b \qquad S_l = S_t - 2A_b \qquad A_b = \frac{S_t - S_l}{2}$$

$$V = A_b \times h \qquad A_b = \frac{V}{h} \qquad h = \frac{V}{A_b}$$

Indicando con a, b, c le tre dimensioni del parallelepipedo rettangolo abbiamo:



$$A_b = a \times b \qquad p = 2(a+b) \qquad h = c$$

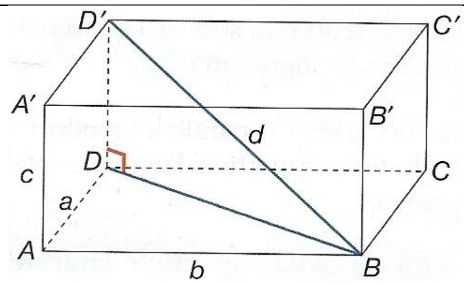
$$S_l = 2(ac + bc) = 2(a+b) \cdot c \qquad S_t = 2(ab + ac + bc) \qquad V = a \cdot b \cdot c$$

Il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle lunghezze delle sue tre dimensioni.

Diagonale del parallelepipedo rettangolo:

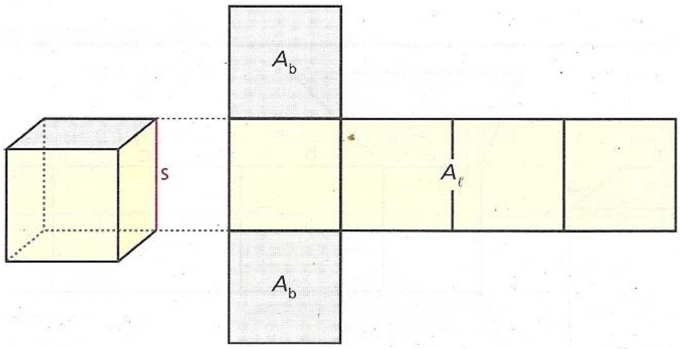
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$$



Per un cubo, essendo $a = b = c = \ell$ abbiamo: $A_b = \ell^2$ $S_\ell = 4\ell^2$ $S_t = 6\ell^2$ $d = \ell\sqrt{3}$

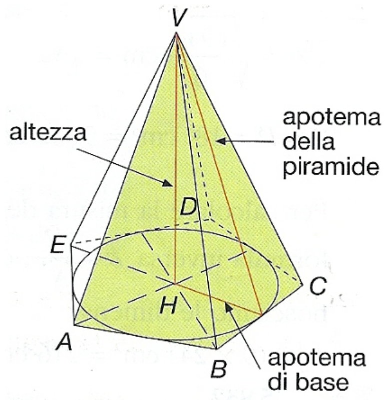
Lo sviluppo della superficie di un cubo



Il volume di un cubo è uguale al cubo della misura del suo lato $\mathbf{V} = \ell^3$

Superficie laterale, totale e volume di una piramide retta

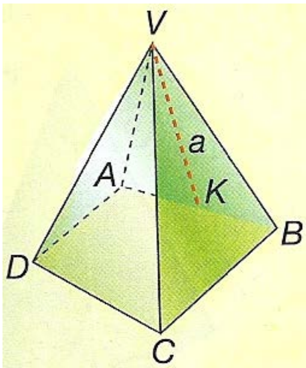
La piramide è un poliedro limitato da un poligono qualsiasi, detto base, e da tanti triangoli quanti sono i lati della base, aventi tutti un vertice in comune, detto vertice della piramide. Una piramide è retta se il poligono di base è circoscrittibile ad una circonferenza ed il piede dell'altezza coincide con il centro di questa circonferenza. L'altezza di una qualsiasi faccia laterale è l'apotema della piramide.

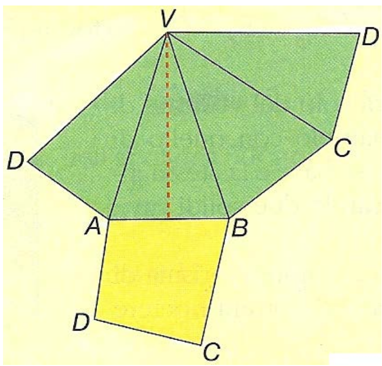


Una piramide è regolare se è retta ed il **poligono di base è un poligono regolare**.

Per calcolare la misura della superficie laterale consideriamo una piramide retta ed il suo sviluppo.

$$\mathbf{S_l = \frac{p \times a}{2}} \quad \mathbf{p = \frac{S_l \times 2}{a}} \quad a = \frac{S_l \times 2}{p}$$





L'area della superficie laterale di una **piramide retta** si calcola moltiplicando il perimetro di base per la misura dell'apotema della piramide e dividendo tale prodotto per 2.

Se la piramide non è retta, l'area della superficie laterale si calcola sommando le aree delle singole facce.

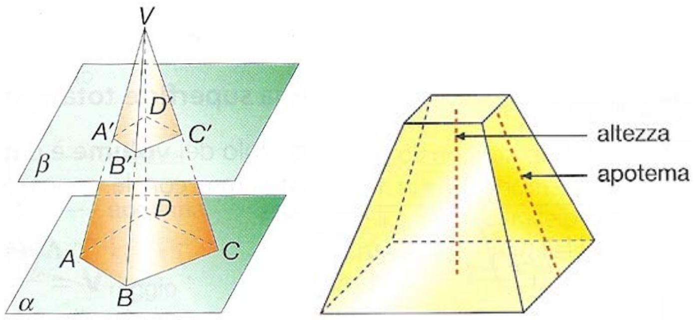
L'area della superficie totale di una qualsiasi piramide si ottiene sommando all'area della superficie laterale quella della sua base. $\mathbf{S_t = S_l + A_b}$ $\quad \mathbf{S_l = S_t - A_b}$ $\quad \mathbf{A_b = S_t - S_l}$

Teorema: la **piramide è equivalente** ad un terzo di un prisma avente base equivalente ed altezza uguale rispettivamente alla base ed all'altezza della piramide.

Il volume di **una piramide** si ottiene moltiplicando l'area della base per la misura dell'altezza e dividendo tale prodotto per 3. $V=\frac{A_b \times h}{3}$ $A_b=\frac{V\times 3}{h}$ $h=\frac{V\times 3}{A_b}$

Superficie laterale, totale e volume di un tronco di piramide retta

Se sezioniamo una piramide con un piano parallelo al piano contenente la base otteniamo due solidi, uno è una piramide più piccola che ha per base la sezione della piramide col piano, l'altro è un solido detto tronco di piramide a basi parallele o semplicemente tronco di piramide.



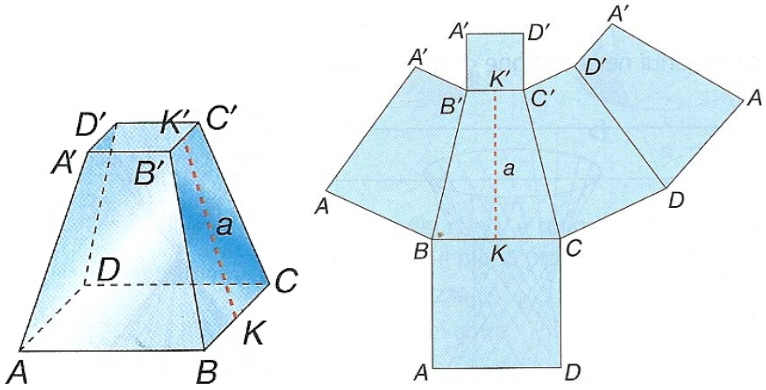
Definizione: Si dice tronco di piramide a basi parallele la parte di piramide compresa fra la base ed una sezione ad essa parallela.

Un tronco di piramide si dice **triangolare**, **quadrangolare**, *pentagonale*, etc. secondo che ha per basi **triangoli**, **quadrangoli**, *pentagoni*, etc. Il tronco di piramide è limitato da due poligoni, simili fra loro, che si dicono basi del tronco (**base maggiore** e **base minore**), e da tanti trapezi, che costituiscono la superficie laterale del tronco di piramide. La somma della superficie laterale e delle due basi costituisce la superficie totale.

Si dice altezza del tronco di piramide la distanza fra i piani delle due basi. Un tronco di piramide si dice retto se è stato generato da una piramide retta. In questo caso le facce laterali sono trapezi aventi uguale altezza e questa altezza si dice apotema del tronco di piramide.

Un tronco di piramide si dice regolare se è stato generato da una piramide regolare. In questo caso le facce laterali sono trapezi isosceli uguali altezza la cui altezza si dice apotema del tronco di piramide.

Per calcolare l'area della superficie laterale di un cono consideriamo il suo sviluppo sopra un piano.



$$S_l = \frac{(p_1 + p_2) \times a}{2} \qquad p_1 + p_2 = \frac{2S_l}{a} \qquad a = \frac{2S_l}{p_1 + p_2}$$

L'area della superficie laterale del tronco di piramide retta è uguale al prodotto della semisomma delle misure dei perimetri delle due basi per la misura dell'apotema.

L'area della superficie totale del tronco di piramide si ottiene aggiungendo all'area della superficie laterale l'area delle due basi $S_t = S_l + A_{b1} + A_{b2} = \frac{1}{2} \cdot (p_1 + p_2) \cdot a + A_{b1} + A_{b2}$

Per calcolare l'area del volume di un tronco di piramide bisogna applicare la seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h \times \left(A_{b1} + A_{b2} + \sqrt{A_{b1} \times A_{b2}} \right)$$

Il volume di un tronco di piramide è uguale alla terza parte del prodotto della misura della sua altezza per la somma delle aree delle due basi e della radice quadrata del loro prodotto.

h = altezza del tronco di piramide

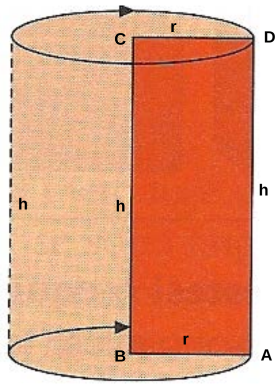
A_{b1} = base maggiore del tronco di piramide

A_{b2} = base minore del tronco di piramide

I solidi di rotazione

Il cilindro circolare retto

Definizione: Si chiama cilindro circolare retto, o semplicemente cilindro, il solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.



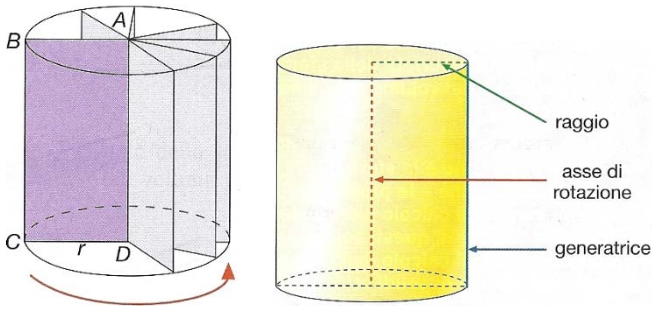
Nella rotazione del rettangolo $ABCD$ attorno al lato BC, questo lato rimane fisso e si chiama asse del cilindro.

Un cilindro si dice equilatero se la sua altezza è uguale al diametro della base.

I due lati opposti AB e CD descrivono due cerchi uguali, situati su piani paralleli, che prendono il nome di basi del cilindro, ed il loro raggio si dice raggio del cilindro. Il lato AD, nella rotazione, descrive una superficie curva, detta superficie cilindrica, che costituisce la superficie laterale del cilindro. L'insieme della superficie laterale e della superficie delle due basi, costituisce la superficie totale del cilindro. La distanza fra i piani delle due basi si chiama altezza del cilindro.

Superficie laterale, totale e volume di un cilindro

Il cilindro è il solido ottenuto dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad un suo lato. Il lato attorno al quale ruota il rettangolo è l'asse di rotazione e rappresenta l'altezza del cilindro.



Il lato parallelo a questo è la generatrice e gli altri due lati del rettangolo sono i raggi dei due cerchi che formano le basi del cilindro.

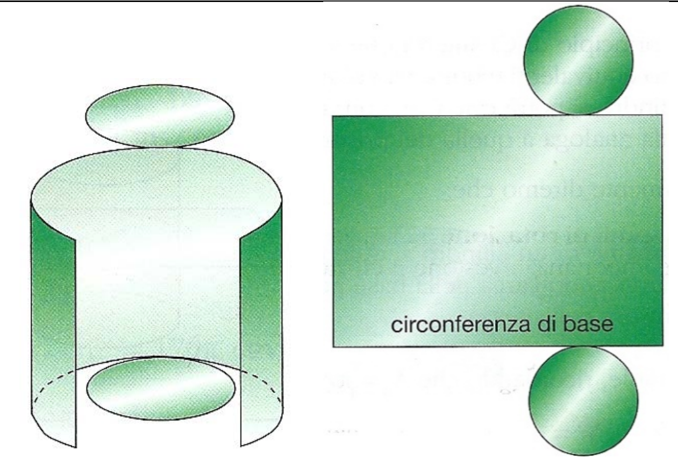
Per calcolare l'area della superficie laterale del cilindro consideriamo il suo sviluppo come indicato in figura.

La superficie laterale del cilindro equivale ad un rettangolo avente per base la circonferenza rettificata del cerchio di base e per altezza l'altezza del cilindro. Questo ci consente di affermare che l'**area della superficie laterale** di un cilindro si ottiene moltiplicandola lunghezza della circonferenza per la misura dell'altezza,

$$S_l = C \times h \quad C = \frac{S_l}{h} \quad h = \frac{S_l}{C} \quad C = 2\pi r$$

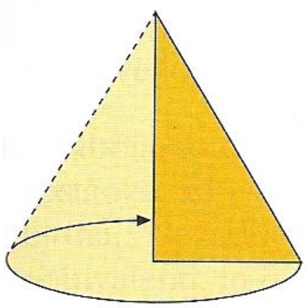
$$S_l = 2\pi r h \qquad r = \frac{S_l}{2\pi h}$$

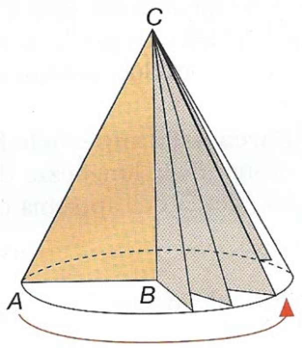
$$h = \frac{S_l}{2\pi r}$$

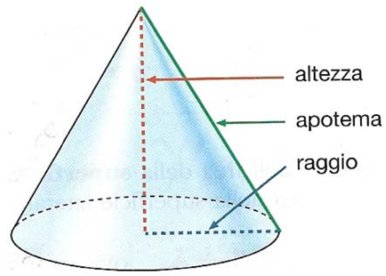


Per calcolare l'**area della superficie totale** sommeremo all'area della superficie laterale quella delle due basi. $S_t = S_l + 2A_b \quad S_l = S_t - 2A_b \quad A_b = \dfrac{S_t - S_l}{2}$

Il cono circolare retto





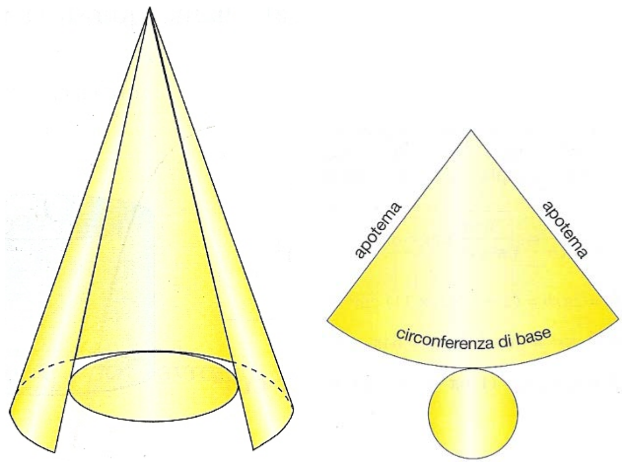


Definizione: Si chiama **cono circolare retto**, o semplicemente **cono**, il solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti. Il cateto attorno al quale ruota è l'**asse di rotazione** rappresenta l'**altezza** del cono, l'altro cateto è il **raggio** del cerchio che forma la **base** del cono. Una qualsiasi delle posizioni assunte dall'ipotenusa CA nella rotazione si chiama **generatrice** o **apotema** o **lato** del cono. Il punto C si chiama **vertice** del cono, mentre il cateto CB, che rappresenta la distanza del vertice dal piano della base, prende il nome di **altezza** del cono.

L'ipotenusa CA, durante la rotazione, genera una superficie curva detta **superficie conica** che costituisce la **superficie laterale** del cono. L'insieme della superficie laterale e della superficie di base, costituisce la superficie totale del cono. Un cono si dice equilatero quando la sua apotema è uguale al diametro della base.

Superficie laterale, totale e volume di un cono

Per calcolare l'area della superficie laterale di un cono consideriamo il suo sviluppo sopra un piano. La superficie laterale è equivalente alla superficie di un settore circolare il cui arco è uguale alla circonferenza di base del cono ed il cui raggio è uguale all'apotema.



Poiché l'area di un settore circolare si ottiene moltiplicando la lunghezza dell'arco per la misura del raggio e dividendo tale prodotto per due, possiamo affermare che: l'area della superficie laterale di un cono si ottiene moltiplicando la misura della lunghezza della circonferenza di base per la misura della lunghezza dell'apotema e dividendo tale prodotto per 2.

$$S_l = \frac{C \times a}{2} = \pi r a \qquad r = \frac{S_l}{\pi a} \qquad a = \frac{S_l}{\pi r}$$

Per ottenere l'area della superficie totale di un cono basta sommare l'area della superficie laterale e l'area della base del cono. $S_t = S_l + A_b = \pi r a + \pi r^2 = \pi r (a + r)$

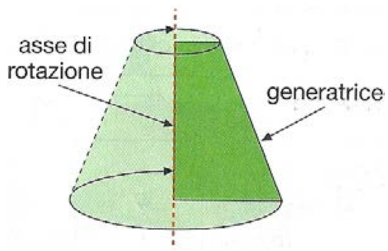
Il cono è equivalente ad un terzo di un cilindro avente base ed altezza uguali rispettivamente alla base ed all'altezza del cono.

Il volume di un cono si ottiene moltiplicando l'area della base per la misura dell'altezza e dividendo tale prodotto per 3. $V = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $\qquad r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$ $\qquad h = \frac{3V}{\pi r^2}$

Se l'apotema del cono è uguale al diametro della base il cono è equilatero. Valgono le seguenti formule: $a = 2r$ $\quad h = r\sqrt{3}$ $\quad S_l = \pi r a = 2\pi r^2$ $\quad S_t = \pi r a + \pi r^2 = 3\pi r^2$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \pi r^3$$

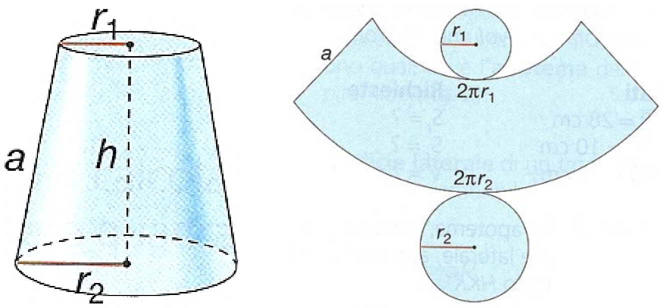
Si chiama tronco di cono (circolare retto) la parte di cono compresa fra il piano contenente la base ed un piano, ad esso parallelo, secante il cono (e non passante per il vertice). Il cerchio di base e quello della sezione si dicono basi del tronco di cono, la distanza dei loro piani altezza del tronco di cono.



I segmenti delle generatrici comprese tra le due basi si dicono ancora generatrici del tronco, o anche lati o apotemi del tronco.

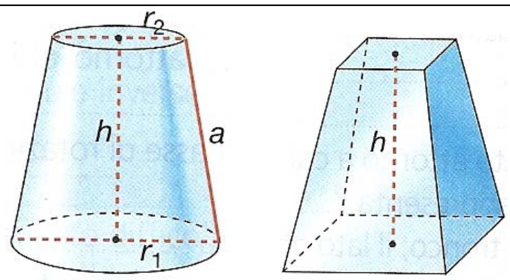
La parte della superficie conica compresa tra le basi, si dice superficie laterale del tronco di cono. Questa, insieme alle due basi, ne costituisce il contorno o la superficie totale. L'asse del cono contenente il tronco, dicesi asse del tronco di cono.

Per calcolare l'area della superficie laterale di un **tronco di cono** consideriamo il suo sviluppo sopra un piano.



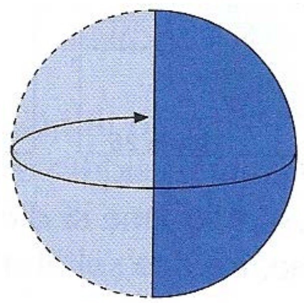
$$S_l = \pi(r_1 + r_2) \times a \qquad r_1 + r_2 = \frac{S_l}{\pi \times a} \qquad a = \frac{S_l}{\pi \times (r_1 + r_2)}$$

$$S_t = S_l + A_{b1} + A_{b2} = \pi\left(r_1 + r_2\right) \times a + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

Per il principio di Cavalieri un **tronco di cono** è **equivalente ad un tronco di piramide** aventi altezze uguali e basi equivalenti. Possiamo utilizzare la formula trovata per il tronco di cono ricordando che le basi del tronco di cono sono cerchi:	

$$V = \frac{\left(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \times \pi r_2^2}\right) \times h}{3} = \frac{1}{3}\pi h \times \left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2\right)$$

Superficie laterale, totale e volume di una sfera



Definizione: Si chiama superficie sferica la superficie generata dalla rotazione completa di una **semicirconferenza** attorno al suo diametro. Si chiama sfera il solido generato da una rotazione completa di un **semicerchio** attorno al suo diametro.

La superficie sferica è il contorno della sfera.

Il centro del semicerchio si chiama centro della sfera; il diametro del semicerchio generatore è il diametro della sfera e della superficie sferica.

Un piano passante per il centro della sfera si dice piano diametrale: esso taglia la sfera (la sua superficie sferica) secondo un **cerchio massimo** (una **circonferenza massima**). Una retta passante per il centro della sfera è una retta diametrale.

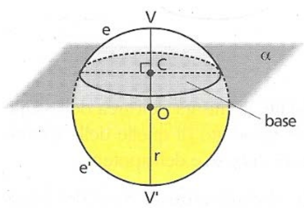
La sfera e la superficie sferica definite come luoghi geometrici.

Definizione: La superficie sferica è il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno distanza dal centro uguale al raggio.

Definizione: La sfera è il luogo geometrico dei punti dello spazio che hanno distanza dal centro minore o uguale al raggio.

Teorema: L'area della superficie di una sfera è uguale a quattro volte l'area di un suo cerchio massimo. $\mathbf{S=4\pi r^2}$ Volume della sfera $\mathbf{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$

Parti della superficie sferica e della sfera



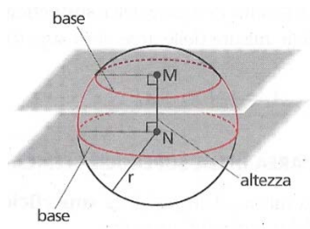
Definizione: Si chiama calotta sferica ciascuna delle due parti in cui la superficie sferica è divisa da un piano secante.

Definizione: Si chiama segmento sferico ad una base ciascuna delle due parti in cui viene divisa una sfera da un piano secante.

Il cerchio sezione del piano con la sfera è la base del segmento sferico ad una base. La circonferenza del cerchio sezione prende il nome di base della calotta sferica.

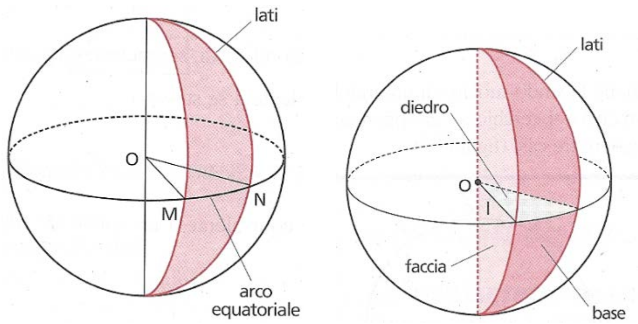
L'altezza del segmento sferico o della calotta sferica è La distanza VC del centro C della base dal punto V di intersezione del diametro perpendicolare al piano secante. Il punto V dicesi vertice del segmento sferico o della calotta sferica.

Definizione: Dati due piani tra loro paralleli ed entrambi secanti una stessa sfera, si dice zona sferica la parte di superficie sferica compresa tra questi due piani, mentre la parte di sfera compresa tra questi piani si chiama segmento sferico a due basi.



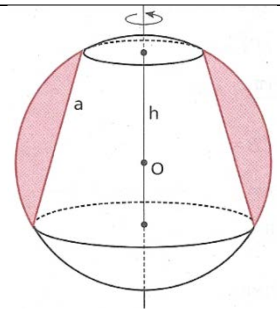
L'altezza del **segmento sferico a due basi** o della **zona sferica** è la distanza NM tra i piani delle due basi; essa coincide con la distanza dei centri delle due basi.

Definizione: Dati due semipiani aventi come origine una retta diametrale, si dice fuso sferico la parte di superficie sferica compresa tra questi due semipiani, mentre si dice spicchio sferico la parte di sfera compresa tra questi semipiani.

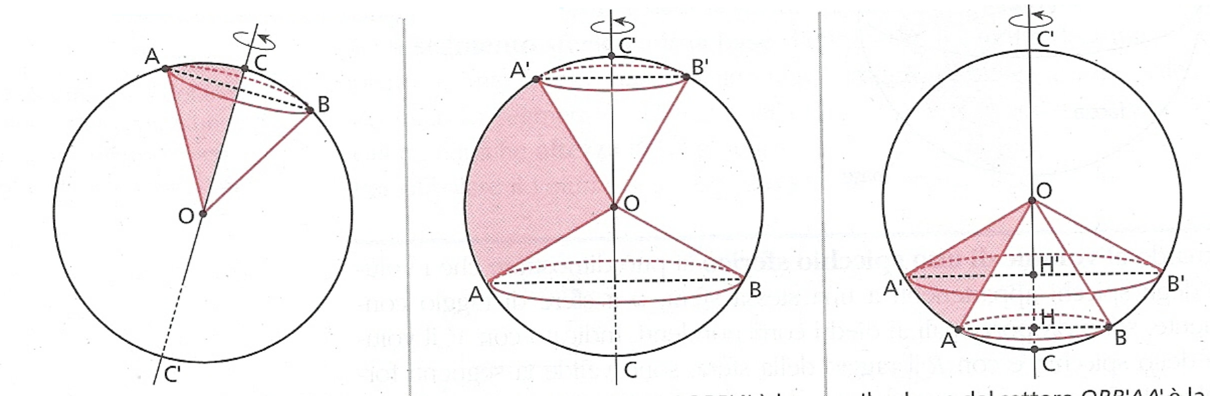


L'arco di circonferenza massima che giace sul fuso si chiama arco equatoriale. Le semicirconferenze intercettate dai due semipiani sono dette lati del fuso.

L'anello sferico: In una sfera consideriamo un segmento sferico a due basi ed il tronco di cono inscritto le cui basi coincidono con quelle del segmento. La parte di sfera limitata dalla superficie laterale del tronco di cono e dalla zona sferica corrispondente al segmento sferico si chiama anello sferico.



Il settore sferico: Il **settore sferico** è quel solido che si ottiene facendo ruotare di un angolo giro un settore circolare attorno ad un diametro del cerchio a cui appartiene ma che non lo attraversa. Possiamo distinguere tre casi:



a. Il volume del settore *OACB* è la somma dei volumi del segmento *ACB* e del cono *AOB*.

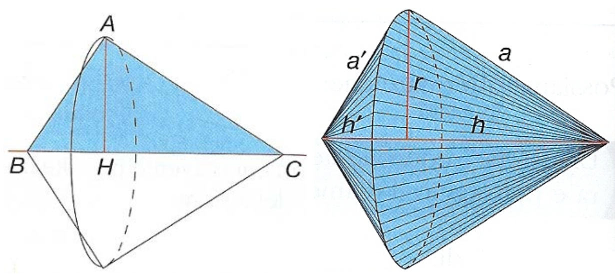
b. Il volume del settore *AOBB'A'* è la differenza fra il volume del segmento *ABB'A'* e i volumi dei due coni *AOB* e *A'OB'*.

c. Il volume del settore *OBB'AA'* è la differenza fra il volume del settore *OA'CB'* e quello del settore *OACB*.

Il volume di un settore sferico si può ottenere come somma o differenza dei volumi di altri solidi.

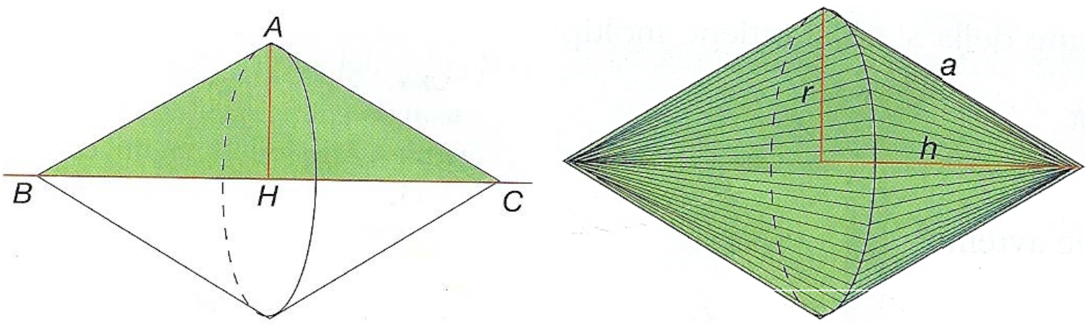
Altri solidi di rotazione

Solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno all'ipotenusa. Si ottiene un solido formato da due coni con la base in comune.



$$S = S_{cono1} + S_{cono2} \qquad V = V_{cono1} + V_{cono2}$$

Solido ottenuto dalla rotazione completa di un triangolo isoscele attorno alla base



Si ottiene un solido formato da due coni uguali con la base in comune

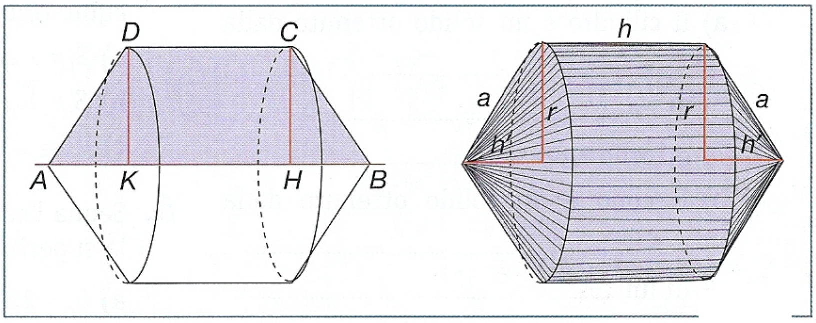
$$S = 2 \cdot S_{lateralecono} \qquad V = 2 \cdot V_{cono}$$

Solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio isoscele attorno alla base maggiore.

Si ottiene un solido formato da un cilindro e due coni congruenti aventi le basi coincidenti con quelle del cilindro; per esso:

$S = S_{l\,cil.} + 2 \times S_{l\,cono}$

$V = V_{cil.} + 2 \times V_{cono}$

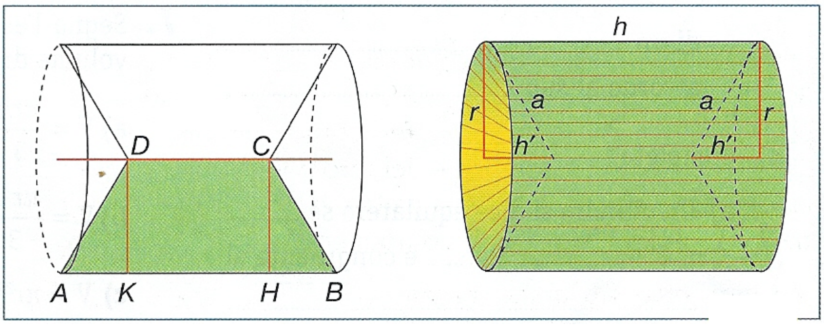


Solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio isoscele attorno alla base minore.

Si ottiene un cilindro con due cavità coniche congruenti; per esso:

$S = S_{l\,cil.} + 2 \times S_{l\,cono}$

$V = V_{cil.} - 2 \times V_{cono}$

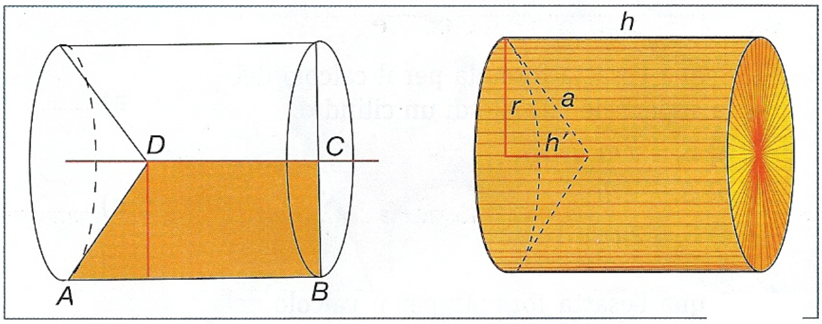


Solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno alla base minore.

Si ottiene un cilindro con una cavità conica; per esso:

$S = A_{b\,cil.} + S_{l\,cil.} + S_{l\,cono}$

$V = V_{cil.} - V_{cono}$

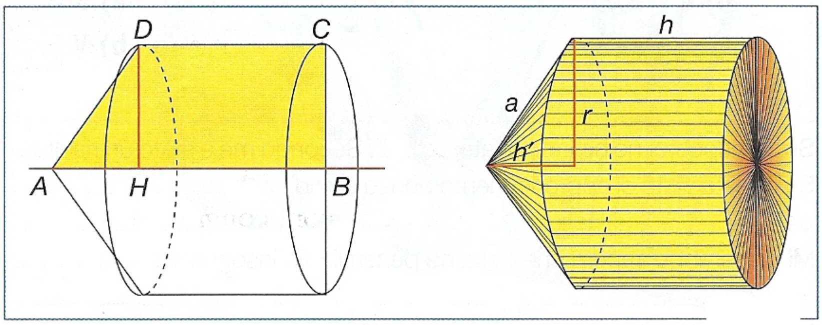


Solido ottenuto dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno alla base maggiore.

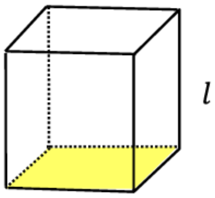
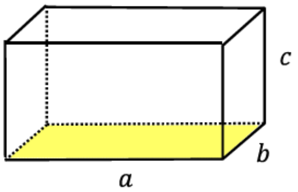
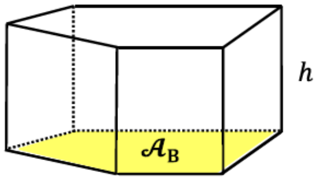
Si ottiene un solido formato da un cilindro sormontato da un cono con la base coincidente con quella del cilindro; per esso:

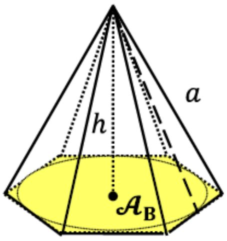
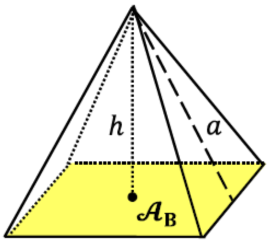
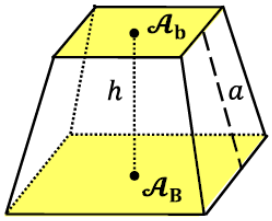
$S = A_{b\,cil.} + S_{l\,cil.} + S_{l\,cono}$

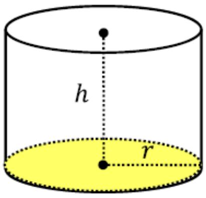
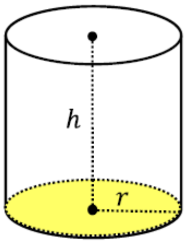
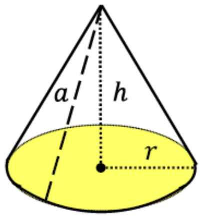
$V = V_{cil.} + V_{cono}$

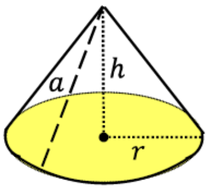
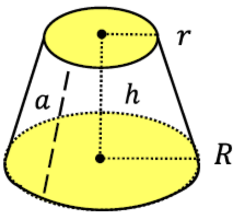
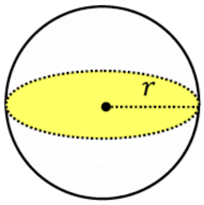


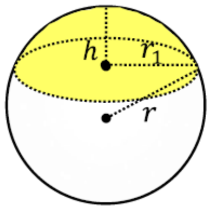
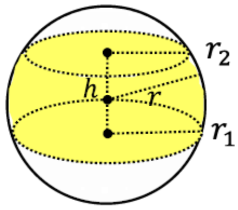
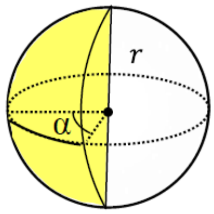
Volumi V e superfici S delle principali figure solide

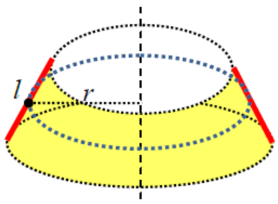
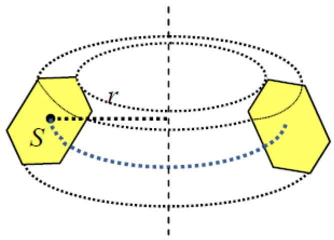
cubo		parallelepipedo rettangolo		prisma retto	
					
$\mathcal{V} = l^3$		$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$		$\mathcal{V} = \mathcal{A}_B \cdot h$	
$\mathcal{S}_B = 2l^2$	$\mathcal{S}_L = 4l^2$	$\mathcal{S}_B = 2ab$	$\mathcal{S}_L = 2(a+b)c$	$\mathcal{S}_B = 2\,\mathcal{A}_B$	$\mathcal{S}_L = \text{perimetro di base} \cdot h$

piramide retta a base regolare		piramide retta		tronco di piramide	
					
$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_B \cdot h}{3}$		$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_B \cdot h}{3}$		$\mathcal{V} = \frac{1}{3} h\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b}\right)$	
$\mathcal{S}_B = \mathcal{A}_B$	$\mathcal{S}_L = \frac{\text{perimetro di base} \cdot a}{2}$	$\mathcal{S}_B = \mathcal{A}_B$	$\mathcal{S}_L =$ somma aree facce laterali	$\mathcal{S}_B = \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$	$\mathcal{S}_L =$ somma aree facce laterali

cilindro		cilindro equilatero ($h = 2r$)		cono	
					
$\mathcal{V} = \pi r^2 \cdot h$		$\mathcal{V} = 2\pi r^3$		$\mathcal{V} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$	
$\mathcal{S}_B = 2\pi r^2$	$\mathcal{S}_L = 2\pi r h$	$\mathcal{S}_B = 2\pi r^2$	$\mathcal{S}_L = 4\pi r^2$	$\mathcal{S}_B = \pi r^2$	$\mathcal{S}_L = \pi r a$

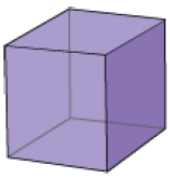
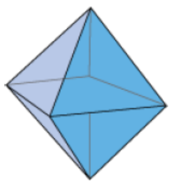
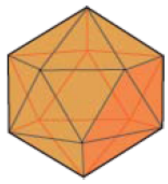
cono equilatero ($a = 2r \quad h = \sqrt{3}\,r$)		tronco di cono		sfera	
					
$\mathcal{V} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$		$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$		$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$	
$\mathcal{S}_B = \pi r^2$	$\mathcal{S}_L = 2\pi r^2$	$\mathcal{S}_B = \pi R^2 + \pi r^2$	$\mathcal{S}_L = \pi(r+R)a$	$\mathcal{S} = 4\pi r^2$	

segmento sferico ad 1 base	segmento sferico a 2 basi	spicchio sferico
		
$\mathcal{V} = \frac{h}{2}\pi r_1^2 + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$	$\mathcal{V} = \frac{h\pi}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3$	$\mathcal{V} = \frac{\alpha^\circ}{270^\circ}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 \alpha_{rad}$
$\mathcal{S} = 2\pi r h$	$\mathcal{S} = 2\pi r h$	$\mathcal{S} = \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\pi r^2 = 2\pi r^2 \alpha_{rad}$

1^0 teorema di Guldino	2^0 teorema di Guldino
la **superficie** generata da una linea (o da un poligono) in rotazione intorno ad un asse è uguale al prodotto della circonferenza descritta dal suo baricentro per la sua lunghezza (o perimetro)	il **volume** generato da una superficie in rotazione intorno ad un asse è uguale al prodotto della circonferenza descritta dal suo baricentro per la sua superficie
	
$\mathcal{S} = 2\pi r l$	$\mathcal{V} = 2\pi r S$

solidi platonici o poliedri regolari

I solidi platonici sono quei solidi le cui facce, tutte uguali tra loro, sono formate da poligoni regolari e tali che in ogni vertice concorrono lo stesso numero di spigoli. Sono solo cinque:

tetraedro 4 triangoli equilateri	*esaedro (cubo)* 6 quadrati	*ottaedro* 8 triangoli equilateri	*dodecaedro* 12 pentagoni regolari	*icosaedro* 20 triangoli equilateri
				

Il volume dei solidi platonici si calcola moltiplicando il cubo dello spigolo per un numero caratteristico del solido:

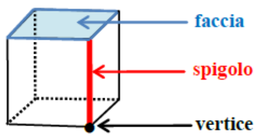
$\mathcal{V} = l^3 \cdot 0,117$	$\mathcal{V} = l^3$	$\mathcal{V} = l^3 \cdot 0,471$	$\mathcal{V} = l^3 \cdot 7,663$	$\mathcal{V} = l^3 \cdot 2,182$

formula di Eulero

Indicato con:

poliedro = solido dello spazio la cui frontiera è l'unione delle facce
faccia = figura piana che compone il poliedro
spigolo = segmento di incontro delle facce
vertice = punto di incontro degli spigoli

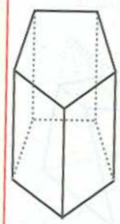
per tutti i poliedri vale la **formula di Eulero:** $\boldsymbol{Facce + Vertici - Spigoli = 2}$



6, 8. LE AREE E I VOLUMI DEI SOLIDI NOTEVOLI

Formule per il calcolo della **misura delle aree delle superfici e dei volumi** dei principali solidi.

PRISMA RETTO

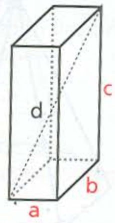


$A_\ell = 2p \cdot h$

$A_t = A_\ell + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO



$A_b = ab$

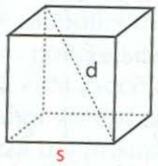
$A_\ell = 2(ac + bc)$

$A_t = 2(ac + ab + bc)$

$V = a \cdot b \cdot c$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

CUBO



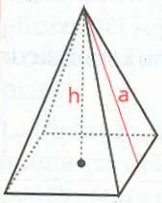
$A_b = s^2$

$A_t = 6s^2$

$V = s^3$

$d = s\sqrt{3}$

PIRAMIDE RETTA

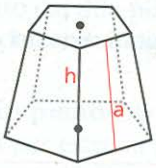


$A_\ell = p \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b$

$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

TRONCO DI PIRAMIDE RETTA

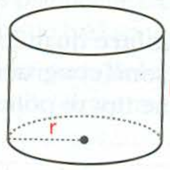


$A_\ell = (p + p') \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3} h (A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b})$

CILINDRO



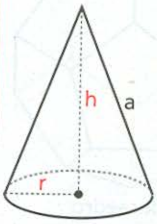
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = 2\pi r \cdot h$

$A_t = 2\pi r (h + r)$

$V = \pi r^2 \cdot h$

CONO



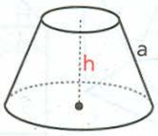
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = \pi r a$

$A_t = \pi r (a + r)$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

TRONCO DI CONO



$A_b = \pi r^2$

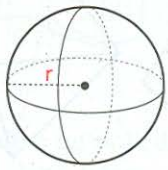
$A'_b = \pi r'^2$

$A_\ell = \pi a (r + r')$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

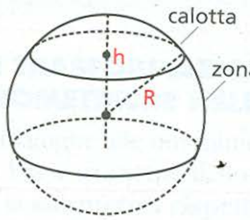
SFERA



$A = 4\pi r^2$

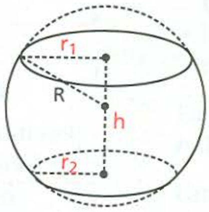
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

CALOTTA E ZONA SFERICA



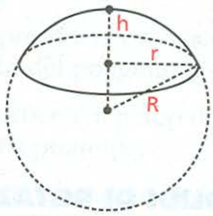
$S = 2\pi R h$

SEGMENTO SFERICO A DUE BASI



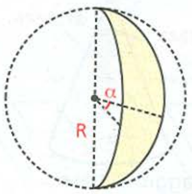
$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2 \frac{h}{2} + \pi r_2^2 \frac{h}{2}$

SEGMENTO SFERICO A UNA BASE



$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$

FUSO SFERICO

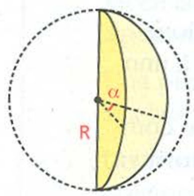


$S_f = 2R^2 \alpha^{rad} = \frac{\alpha^\circ}{90^\circ} \pi R^2$

α^{rad}: ampiezza del diedro in radianti

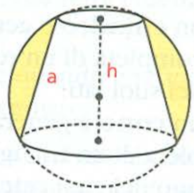
α° : ampiezza del diedro in gradi

SPICCHIO SFERICO



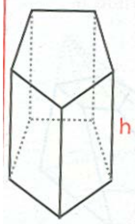
$V_s = \frac{2}{3} \alpha^{rad} R^3 = \frac{\alpha^\circ}{270^\circ} \pi R^3$

ANELLO SFERICO



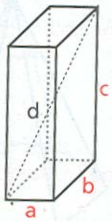
$V_a = \frac{1}{6} \pi a^2 h$

PRISMA RETTO



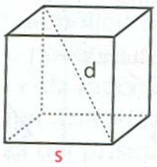
$A_\ell = 2p \cdot h$
$A_t = A_\ell + 2A_b$
$V = A_b \cdot h$

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO



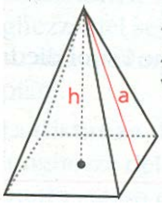
$A_b = ab$
$A_\ell = 2(ac + bc)$
$A_t = 2(ac + ab + bc)$
$V = a \cdot b \cdot c$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

CUBO



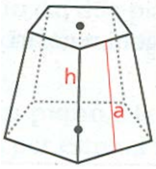
$A_b = s^2$
$A_t = 6s^2$
$V = s^3$
$d = s\sqrt{3}$

PIRAMIDE RETTA



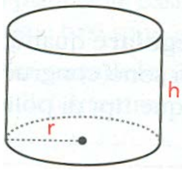
$A_\ell = p \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b$
$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

TRONCO DI PIRAMIDE RETTA



$A_\ell = (p + p') \cdot a$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3} h \left(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b}\right)$

CILINDRO



$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = 2\pi r \cdot h$
$A_t = 2\pi r(h + r)$
$V = \pi r^2 \cdot h$

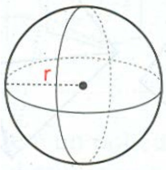
CONO

$A_b = \pi r^2$
$A_\ell = \pi ra$
$A_t = \pi r(a + r)$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

TRONCO DI CONO

$A_b = \pi r^2$
$A'_b = \pi r'^2$
$A_\ell = \pi a(r + r')$
$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$
$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

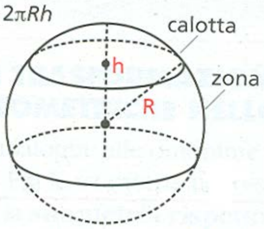
SFERA



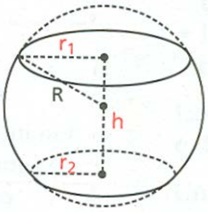
$A = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

CALOTTA E ZONA SFERICA

$S = 2\pi Rh$

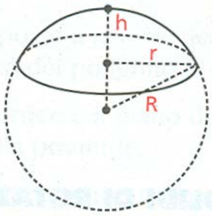


SEGMENTO SFERICO A DUE BASI



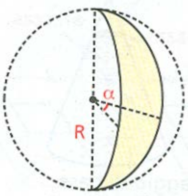
$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3+\pi r_1^2\frac{h}{2}+\pi r_2^2\frac{h}{2}$

SEGMENTO SFERICO A UNA BASE



$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3+\pi r^2\frac{h}{2}=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$

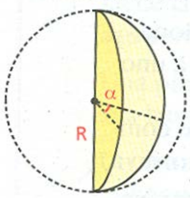
FUSO SFERICO



$S_f = 2R^2\alpha^{rad} = \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\pi R^2$

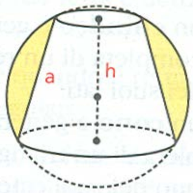
α^{rad}: ampiezza del diedro in radianti
α° : ampiezza del diedro in gradi

SPICCHIO SFERICO



$V_s = \frac{2}{3}\alpha^{rad}R^3 = \frac{\alpha^\circ}{270^\circ}\pi R^3$

ANELLO SFERICO



$V_a = \frac{1}{6}\pi a^2 h$