Leggi di capitalizzazione e di sconto

Premesse

- Si chiama capitale una somma impiegata per un certo tempo: data in prestito, investita in titoli,…
- Un capitale impiegato per un certo tempo frutta altro capitale e si chiama interesse il frutto di un capitale impiegato per un certo tempo. L'interesse prodotto da un capitale **C** si ritiene funzione del capitale e del tempo t, cioè: $I = f(C,t)$ Infatti, l'interesse viene commisurato al tempo d'uso ed all'entità del capitale. Di solito l'interesse viene stabilito in un <<tanto per cento>> del capitale impiegato per ogni unità di tempo d'impiego che di solito è l'anno, ma può anche essere il semestre**,** il trimestre**, il** mese**,…**

La misura dell'interesse, stabilita in percentuale del capitale, per ogni unità d'impiego, si dice tasso percentuale annuo, o semestrale, o trimestrale, o mensile,… a seconda dell'unità di tempo cui viene riferita. Cioè il tasso percentuale annuo denota l'interesse prodotto da 100 lire in un anno. Dicesi tasso unitario d'interesse, l'interesse prodotto dall'unità di capitale nell'unita di tempo. Pertanto il tasso unitario annuo i denota l'interesse prodotto da una lira in un anno, e risulta uguale a: $i = \frac{r}{100}$ $r = 100i$

Il tasso percentuale annuo del 5% indica che 100 lire fruttano in un anno 5 lire. Il tasso percentuale del 5% corrisponde al tasso unitario di: $i = \frac{5}{100} = 0{,}05$.

Il tasso unitario, oltre ad annuo può essere semestrale, trimestrale,…

Per comodità di studio e di calcolo noi faremo riferimento al tasso unitario d'interesse .

- Per unità di capitale in Italia **l'**euro, per unità di tempo ordinariamente l'anno, ma si usa anche il semestre**, il** trimestre,…
- Il capitale generalmente si suole indicare col simbolo C, il tempo con **t**, l'interesse prodotto dal capitale C nel tempo t con **I**, il tasso unitario con **i**.
- L'operazione per cui l'interesse prodotto da un capitale va ad accumularsi al capitale stesso determinandone un aumento si dice capitalizzazione.

Il tipo di capitalizzazione dipende dal modo con cui vengono determinati gli interessi. I più comuni regimi di capitalizzazione sono due:

a) regime di capitalizzazione semplice, che si ha quando l'interesse $\mathcal{J}$ viene calcolato per tutto il periodo di impiego sulla somma originariamente impiegata. In altre parole l'interesse viene aggiunto al capitale soltanto alla fine di tutto il periodo di impiego, e pertanto esso non è fruttifero di altro interesse. (tale regime di capitalizzazione viene usato per la determinazione periodica degli interessi nelle operazioni a lunga scadenza o per operazioni a breve scadenza).

b) regime di capitalizzazione composta, che si ha quando l'interesse prodotto dal capitale si aggiunge al capitale stesso alla fine di ogni unità di tempo d'impiego e diventa a sua volta fruttifero di interesse col capitale originario. In sostanza l'interesse si capitalizza periodicamente. (tale regine si usa per le operazioni a lunga scadenza)

- Dicesi montante (o capitale finale o valore finale del capitale) di un capitale **C**, impiegato per il tempo **t**, la somma del capitale **C** e dell'interesse prodotto **I**, cioè: $\mathbf{M = C + \mathcal{J}}$ **[1]**

Interesse semplice

Si dice che un prestito è fatto ad **interesse semplice** se si ammette che l'interesse **I** sia proporzionale al capitale impiegato **C** ed al tempo d'impiego **t**, cioè se:

$$\mathcal{J} = \mathbf{Cit} \quad [2] \qquad \mathbf{M = C + Cit = C(1+it)} \qquad \mathbf{M = C\cdot(1+it)} \quad [3]$$

$1 + it$ = fattore di montante semplice = **fattore di capitalizzazione semplice**

Bisogna tenere presente che il tempo d'impiego deve essere espresso nella stessa unità del tasso unitario. Questo significa che se il tasso unitario è semestrale allora il tempo deve essere espresso in semestri. Dalle formule [2] e [3] ricaviamo le seguenti formule inverse:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathcal{J}}{\mathbf{it}} \qquad \mathbf{i} = \frac{\mathcal{J}}{\mathbf{Ct}} \qquad \mathbf{t} = \frac{\mathcal{J}}{\mathbf{Ci}} \qquad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{1+it}} \quad [4]$$

Osservazioni

A) l'anno civile è uguale a 365 giorni • l'anno commerciale è uguale a 360 giorni, cioè considera ciascun mese costituito da 30 giorni

B) L'interesse $\mathcal{J}$ può essere pagato posticipatamente, cioè il **mutuatario** riceve oggi il capitale **C** ed al tempo **t** paga il **montante M**. L'interesse può essere pagato anticipatamente, cioè il mutuatario riceve oggi il capitale $C - I$ ed al tempo **t** paga il capitale **M**.

C) $t=n$ = tempo espresso in anni , $t = m$ = tempo espresso in mesi , $t = g$ = tempo espresso in giorni. Se il **tasso unitario** è annuo (**i) ed il tempo** t **è espresso in mesi o in giorni, avremo:**

$t = \frac{m}{12}$ $t = \frac{g}{360}$ **(anno commerciale)** $t = \frac{g}{365}$ **(anno civile)** Le formule precedenti diventano

$\mathcal{I} = Cin$ $\quad \mathcal{I} = \frac{Cim}{12}$ $\quad \mathcal{I} = \frac{Cig}{360}$ $\quad C = \frac{\mathcal{I}}{in}$ $\quad C = \frac{12\mathcal{I}}{in}$ $\quad C = \frac{12\mathcal{I}}{im}$

$i = \frac{I}{Cn}$ $\quad i = \frac{12I}{Cm}$ $\quad i = \frac{360I}{Cg}$ $\quad n = \frac{I}{Ci}$ $\quad m = \frac{12I}{Ci}$ $\quad g = \frac{360I}{Ci}$

$M = C(1+in)$ $\quad M = \frac{C(12+im)}{12}$ $\quad M = \frac{C(360+ig)}{360}$ $\quad C = \frac{M}{1+in}$ $\quad C = \frac{12M}{1+im}$ $\quad C = .\frac{360M}{1+ig}$

Capitalizzazione composta

Calcolo del montante

Abbiamo detto che si ha il **regime di capitalizzazione composta** quando si procede alla capitalizzazione periodica degli interessi semplici. Dicesi **periodo di capitalizzazione** l'intervallo di tempo alla fine del quale gli interessi si convertono in capitale, o come si dice **vengono capitalizzati**. Il **periodo di capitalizzazione** è di solito l'**anno** o un suo sottomultiplo (semestre, trimestre,..). Supponiamo di impiegare un capitale **C**, ad interesse composto e con capitalizzazione annua, per un periodo di tempo $t = n$ anni, con n numero intero.

Vediamo quale sarà il montante dopo n anni.

1°) Alla fine del 1° periodo (1° anno) il montante è: $M_1 = C(1+i) \quad t = 1[a]$

2°) Alla fine del 2° periodo (2° anno) il montante è: $M_2 = M_1(1+i) = C(1+i)^2 \quad t = 1[a] \quad t = 1[a]$

3°) Alla fine del 3° periodo (3° anno) il montante è: $M_3 = M_2(1+i) = C(1+i)^3 \quad t = 1[a] \quad t = 1[a]$

Alla fine dell'ennesimo periodo (ennesimo anno) avremo: $\mathbf{M = C \cdot (1+i)^n = C \cdot u^n}$ b **[5]**

$(1+i)^n = u^n$ = fattore di capitalizzazione composta

Se $C = 1$ lira , allora $M = (1+i)^n = u^n$ cioè : << fattore di capitalizzazione composta $(1+i)^n = u^n$ esprime il montante (ad interesse composto con capitalizzazione annua) di 1 lira dopo n anni al tasso unitario annuo i>>

E' chiaro che la [5] è ancora valida, anche quando il periodo di capitalizzazione è diverso dall'anno (cioè quando la capitalizzazione avviene semestralmente, trimestralmente, …) purché **i** indichi il **tasso unitario semestrale, trimestrale, mensile** ed **n** il numero di semestri, trimestri, mesi.

$$I = M - C = C(1+i)^n - C = C\left[(1+i)^n - 1\right] \qquad \mathcal{I} = \mathbf{C(u^n - 1)} \qquad \textbf{[6]}$$

Se il capitale C viene impiegato per **t** periodi (t semestri, t mesi ,…) la [5] assume la forma più generale: $\mathbf{M = C \cdot (1+i)^t = C \cdot u^t}$ **[7]**

Supponiamo adesso che il tempo d'impiego sia costituito da un numero intero (n) di periodi e da una frazione (f) di periodo , cioè supponiamo che: $\boxed{t = n + f}$ con $0<f<1$

Vediamo come si calcola il montante in questo caso.

Si conviene che per il numero intero di periodi si faccia la capitaliz=
=zazione composta del capitale impiegato , mentre per la frazione finale di periodo il montante così formatosi venga ulteriormente capitalizzato secondo il regime di capitalizzazione semplice ,cioè

1°) il montante M' dopo n periodi è , in base alla [5] : $M' = C(1+i)^n$

2°) il montante M al tempo t è il montante ad interesse semplice del capitale M' per il tempo f,cioè: $M=M'(1+if)$ cioè:

$$\boxed{M = C(1+i)^n.(1+if)} \qquad [8]$$

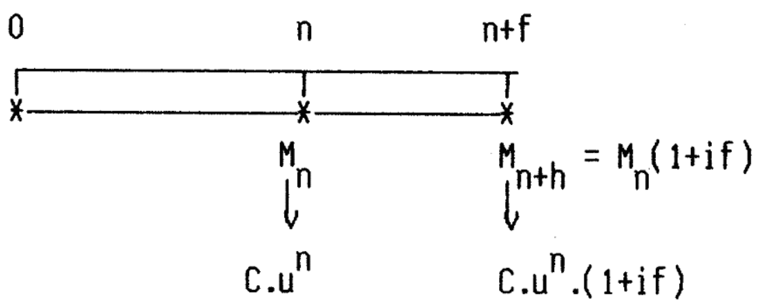
La [8] rappresenta la FORMULA LINEARE e viene usata raramente .

La [9] è usata dalle banche nella capitalizzazione dei depositi in conto corrente.

Nel caso di t=n+f si usa la CONVENZIONE ESPONENZIALE,che consiste nella estensione ad intervalli di tempo non interi della formula [8] nel regime di capitalizzazione composta . Pertanto:

$$\boxed{M = C(1+i)^{n+f} = C.u^{n+f} = C.u^t} \qquad [9]$$

La [9] è detta formula esponenziale.



b) Calcolo pratico di M

1°) METODO ARITMETICO

Si esegue aritmeticamente (quando è possibile) la potenza $(1+i)^n$ e la si moltiplica per C .

2°) METODO LOGARITMICO

$$\text{Log } M = \text{Log } C + t.\text{Log}(1+i) \quad , \quad \text{Log } M = \text{Log } C + (n+f)\text{Log}(1+i)$$

3°) USO DELLE TAVOLE FINANZIARIE

Apposite tavole danno il valore della funzione finanziaria $y = (1+i)^t = u^t$

Se il valore di t è compreso fra due valori consecutivi delle tavole, $y = (1+i)^t$ lo si ricava attraverso una interpolazione .

Se anche i è compreso fra due valori consecutivi delle tavole finanziarie, invece di usare una doppia interpolazione ,si usano i logaritmi.

c) PROBLEMI INVERSI

1°) Ponendo: $v = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$ otteniamo: $C = M.(1+i)^{-t} = M.v^t$ [10]

$t = \dfrac{\text{Log } M - \text{Log } C}{\text{Log}(1+i)}$, $\text{Log}(1+i) = \dfrac{\text{Log } M - \text{Log } C}{t}$ [11] (Da usare raramente)

2°) CALCOLO PRATICO DI C

Coi logaritmi : $\text{Log } C = \text{Log } M - t.\text{Log}(1+i)$

Con le tavole : si calcola il valore di v^t

Con l'interpolazione quanto t (oppure i) è compreso fra due valori consecutivi delle tavole.

3°) CALCOLO PRATICO DI t ED i

$$\boxed{(1+i)^t = M/C}$$

Noti M/C e t si calcola i

Noti M/C ed i si calcola t

Tassi effettivi, equivalenti, nominali

Consideriamo il seguente esempio :
Calcolare il montante di £ 500.000 impiegato per 3 anni:

a) al tasso annuo del 6 % (M = 595.508)

b) al tasso semestrale del 3 % (M = 597.026)

c) al tasso trimestrale dell' 1,5 % (M = 597.809)

Otteniamo montanti diversi , cioè il tasso semestrale del 3 % non è equivalente al tasso annuo del 6 % , nè il tasso trimestrale dell' 1,5 % è equivalente al tasso semestrale del 3 % , etc....

Dividendo per 2 un tasso annuo non otteniamo un tasso semestrale,nè moltiplicando per due un tasso semestrale otteniamo un tasso annuo .

Questo perchè deve esserci corrispondenza fra l'unità di tempo prescelta per la misurazione del tasso e l'unità di tempo prescelta per il periodo di capitalizzazione .

Cosi se abbiamo ‹‹ 100 lire ›› impiegate per ‹‹ 1 anno ›› a capitalizzazione composta , il montante è : M = 106 lire .

Se l'impieghiamo (sempre per un anno) al 3 % semestrale abbiamo :

1° semestre : 103 + 3 = 103 lire

2° semestre : 103 + 3,09 = 106,09 lire

In un anno , il capitale di 100 lire , impiegato al tasso del 3 % semestrale produrrà complessivamente l'interesse di £ 6,09 (3 + 3,09) .

E' evidente che (nel regime di capitalizzazione composta) il tasso semestrale del 3 % non è equivalente al tasso annuo del 6 % , ma è equivalente al tasso annuo del 6,09 % .

<< Un capitale C impiegato per un intervallo di tempo t . Impiegato al 6 % nnuo , al 3 % semestrale , all' 1,5 % produrrà montanti diversi >>

Adesso vogliamo determinare la relazione che intercorre fra il tasso relativo ad un periodo unitario di capitalizzazione uguale ad una frazione di anno ed il tasso annuo equivalente .

<< Si dice che due tassi (relativi a due diversi periodi di capitalizzazione) sono **EQUIVALENTI** , quando conducono (a parità capitale e di tempo) a montanti uguali >>

Sia << i >> il tasso unitario annuo ed << i_k >> il tasso relativo ad 1/k di anno (i_2 = tasso semestrale , i_4 = tasso trimestrale ,...) .

Il montante M_n del capitale C impiegato per n anni al tasso unitario annuo i è :

$$\boxed{M_n = C.(1 + i)^n}$$

Il montante M_k del capitale C impiegato per n anni al tasso relativo i_k è :

$$\boxed{M_k = C.(1 + i_k)^{nk}}$$

contenendo << 1 anno >> k periodi .

i e i_k sono << **equivalenti** >> se $M_n = M_k$ cioè se :

$$C.(1 + i)^n = C.(1 + i_k)^{nk} \qquad \boxed{1 + i = (1 + i_k)^k} \qquad [A]$$

che è la condizione necessaria e sufficiente perchè i due tassi i e i_k siano << <u>equivalenti</u> >> .

In tale caso,però,generalmente,il tasso annuo indicato è un << <u>tasso</u> >> puramente << <u>nominale</u> >> , non un effettivo tasso di rendimento del capitale durante un anno .

Si parla pertanto di << <u>tasso annuo nominale convertibile semestralmente,trimestralmente,mensilmente</u> ,... >> .

In generale il **tasso nominale** convertibile k volte all'anno (j_k tasso espresso formalmente in riferimento all'anno , ma con capitalizzazione degli interessi alla fine di ciascun k^{mo} di anno:

$$\frac{j_k}{k} = i_k$$

ossia il <u>tasso nominale convertibile</u>, diviso per il numero dei periodi di capitalizzazione esistenti nell'anno, esprime il <u>tasso relativo</u> a ciascuno di detti periodi .

j_2 = tasso annuo nominale convertibile 2 volte all'anno = tasso semestrale

j_{12} = tasso annuo nominale convertibile 12 volte all'anno = tasso mensile

Dato ‹‹ j_k ›› calcolare i [Tavola 71 pag. 954]

‹‹ Calcolare il tasso annuo effettivo (i) equivalente al tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente (j_k) del 7,50 % ››

100 j_3 = 7,50 % = tasso annuo nominale convertibile quadrimestralmente (cioè k = 3 volte l'anno)

A questo tasso nominale corrisponde il tasso annuo effettivo
100 i = 7,689063 %

100 j_k	tasso annuo 100 i			
	k = 2 semestre	k = 3 quadrimestre	k = 4	.....
7,50	⟶	7,689063		

Dato i_k calcolare i [tavola 71 pag. 954]

‹‹ Calcolare il tasso annuo effettivo equivalente al tasso del 2 % trimestrale (i_4) ››

100 i_4 = 2 % = tasso trimestrale (esso equivale al tasso nominale dell' 8 % convertibile trimestralmente)

Mi calcolo $j_4 = 4.i_4$, $100\ j_4 = 4.100.i_4 = 8$ %

100 j_k	tasso annuo 100 i			
	k = 2 semestre	k = 4 trimestre	k = 5	.....
8	⟶	8,243216		

Dato i calcolare i_k (e quindi j_k) [Tavola 70 pag. 953]

‹‹ Calcolare il tasso trimestrale equivalente al tasso effettivo annuo del 7 % ›› $100\,i = 7 \longmapsto i_4 = 1{,}705853$

100 i tasso annuo	100 i_2 semestre	100 i_3 quadrimestre	100 i_4 trimestre	100 i_6 bimestre	100 i_{12} mese
7 ⟼			1,705853		

Capitalizzazione frazionata

Si ha la ‹‹ capitalizzazione frazionata ›› quando il periodo di capitalizzazione è un ‹‹ sottomultiplo ›› dell'anno .

I problemi della capitalizzazione frazionata sono simili a quelli della capitalizzazione annua .

L'unica differenza consiste nel fatto che dobbiamo imporre la coincidenza fra l'unità di tempo a cui è riferito il tasso d'interesse, il periodo di capitalizzazione ed il tempo d'impiego.

Riepilogo e conclusioni

a) Il tasso unitario di interesse , nei problemi di capitalizzazione composta , può essere indicato come :

- tasso relativo (i_k) ad un periodo di capitalizzazione inferiore all'anno, come il semestre, il trimestre,….
- tasso effettivo annuo (i), ossia tasso relativo ad un periodo di capitalizzazione uguale all'anno

■ **tasso annuo nominale convertibile** k volte
tasso espresso in riferimento all'anno ma con capitalizzazione degli interessi per periodi unitari inferiori all'anno .

b) Per la soluzione di qualunque problema di capitalizzazione occorre che il tasso d'interesse sia correlativo all'unità di tempo prescelta

per la misurazione della durata d'impiego :

■■■ così se il tempo è misurato in anni bisogna usare il tasso annuo effettivo

■■■ se il tempo è misurato in semestri bisogna usare il tasso semestrale, etc .....

c) Da quanto detto risulterebbe necessario che il tempo fosse misurato in unità di tempo uguale al periodo di capitalizzazione degli interessi:

■■■ così se la capitalizzazione fosse annua il tempo dovrebbe essere misurato in anni

■■■ se la capitalizzazione fosse semestrale il tempo dovrebbe essere misurato in semestri , etc ....

Si può tuttavia prescindere da questa condizione .

■■■ Così, se la capitalizzazione degli interessi è semestrale e si vuole misurare il tempo in anni, bisogna usare il tasso annuo effettivo equivalente al tasso semestrale assunto per la determinazione dell'interesse .

■■■ Per contro, se la capitalizzazione è annua e si vuole misurare il tempo in semestri, bisogna usare il tasso semestrale corrispondente al asso annuo indicato dal problema .

f) Il ‹‹ tasso annuo nominale convertibile j_k ›› è un tasso formale, non un tasso effettivo .

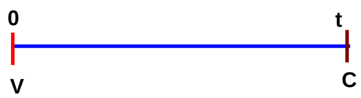
Esso non può mai essere usato, così come è espresso, in nessun problema di capitalizzazione.

Bisogna, infatti, convertirlo in tasso relativo al periodo di capitalizzazione degli interessi (i_k) oppure in tasso effettivo annuo (i) secondo che si voglia misurare il tempo i n unità corrispondenti al periodo di capitalizzazione od in unità uguali dell'anno.

e) Per passare da un tipo di tasso ad un altro bisogna ricordare le seguenti relazioni:

$$\frac{j_k}{k} = i_k \qquad j_k = k \cdot i_k \qquad i = (1+i_k)^k - 1 \qquad i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

g) Si chiama valore attuale V di un capitale C disponibile fra t anni il capitale V da impiegare oggi per avere fra t anni come montante il capitale C.



$$C = V \cdot (1+i)^t = V \cdot u^t \qquad V = C \cdot (1+i)^{-t} = C \cdot v^t$$

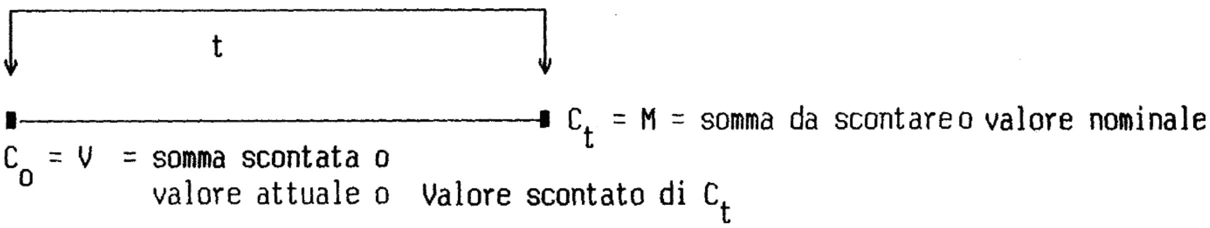
Leggi di sconto

- Si chiamano operazioni di sconto quelle operazioni finanziarie per cui un capitale C_t (che potrebbe essere indicato col simbolo M di montante), esigibile fra un periodo di tempo t, si esige il capitale C_0 (che potrebbe essere indicato col simbolo V di valore attuale) oggi.

- Si chiama sconto il compenso S che spetta all'ente che esegue il pagamento in anticipo. Risulta sempre: $\mathbf{C_o + S = C_t}$ $[\mathbf{V + S = M}]$

- Chiamiamo tasso unitario d'interesse annuo (posticipato), e lo indichiamo col simbolo i, la somma pagata a fine anno su ogni euro prestato ad inizio di anno. Ciò significa che, per ogni euro prestato ad inizio di anno, vengono restituiti **1+i** euro a fine anno.

- Chiamiamo tasso annuo unitario di sconto (o tasso annuo unitario di interesse anticipato), e lo indichiamo col simbolo d o col simbolo s (o, a volte, impropriamente ancora col simbolo i) la somma d che viene trattenuta oggi su ogni euro rimborsabile fra un anno. Questo significa che per ogni euro esigibile fra un anno, oggi incassiamo **1-d=1-s** euro.



- I valori i e d rappresentano misure che si riferiscono a grandezze diverse e, nell'uso corrente, non dovranno essere confuse tra loro.

- In una operazione di prestito il tasso annuo unitario (i) che si enuncia rappresenta l'interesse di un euro in un anno. In una operazione di sconto il tasso annuo unitario (d) che si enuncia è lo sconto di un euro rimborsabile fra un anno.

- Quando si usa lo sconto commerciale il tasso enunciato i coincide col tasso di sconto d, cioè: $i = d$. Quando si usa lo sconto razionale o quello composto il tasso enunciato i non coincide col tasso di sconto d, ma si ha: $\mathbf{d = \frac{1}{1+d}}$ $\mathbf{i = \frac{d}{1-d}}$

- tasso enunciato = **tasso unitario d'interesse posticipato**

▮▮▮ tasso enunciato = tasso unitario d'interesse posticipato

Sconto commerciale

Si ha lo sconto commerciale quando lo sconto S viene calcolato sul valore nominale (cioè sulla somma S_t da scontare) per un tempo t pari al tempo di anticipazione del capitale C_0 al tasso unitario di sconto $d=s$. $\mathbf{S=C_t \cdot d \cdot t=C_t \cdot s \cdot t=C_t \cdot i \cdot t}$

In questo caso il tasso enunciato i (tasso unitario annuo di interesse) $\mathbf{C_0+S=C_t}$

C_0 = somma scontata o somma che si percepisce oggi al posto della somma $C_t=S_t$

$C_t=S_t$ = somma da scontare o valore nominale o somma disponibile tra t anni S = sconto

$$\mathbf{C_0=C_t-S=C_t-C_t \cdot d \cdot t=C_t(1-d \cdot t)=C_t(1-s \cdot t)=C_t(1-i \cdot t)}$$

$1-d \cdot t=1-s \cdot t=1-i \cdot t$ = fattore di sconto commerciale

$C_t=1 \wedge t=1 \Rightarrow S=d=s=i$

a) Lo sconto commerciale si usa per intervalli di tempo t non troppo lunghi e sempre per: $t<\frac{1}{d}$

Per $t>\frac{1}{d}$ avremmo $C_t-S<0$ e quindi $S>C_t$ cioè lo sconto S sarebbe maggiore della somma da scontare.

b) Se impieghiamo la somma scontata C_0 al tasso d per un tempo t troveremo un valore $C_t'<C_t$.

Sconto razionale

Lo sconto razionale può essere considerato come una operazione di interesse semplice, dove la somma scontata C_0 rappresenta il valore attuale, la somma da scontare C_t rappresenta il montante, lo sconto S_R rappresenta l'interesse semplice maturato dalla somma C_0 impiegata per il tempo t.

Si ha il regime di sconto razionale quando lo sconto S_R viene calcolato come interesse semplice sulla somma scontata C_0 al tasso enunciato i e per il tempo t, cioè se: $S_R=C_0 \cdot i \cdot t$

$$C_0+S_R=C_t \qquad C_0+C_0 \cdot i \cdot t=C_t \qquad C_t=C_0(1+i \cdot t) \qquad \mathbf{C_0=\frac{C_t}{1+i \cdot t}}$$

$$S_R=C_t-C_0=C_t-\frac{C_t}{1+i \cdot t}=\left(\frac{1+it-1}{1+i \cdot t}\right) \cdot C_t=\frac{i \cdot t}{1+i \cdot t} \cdot C_t \qquad \mathbf{S_R=\frac{i \cdot t}{1+i \cdot t} \cdot C_t}$$

$\frac{1}{1+i \cdot t}$ = fattore di sconto razionale $C_t=1 \wedge t=1$ otteniamo lo sconto calcolato sul capitale di un euro esigibile fra un anno.

In questo caso il tasso enunciato i non coincide col tasso di sconto $d_R = s_R$

Tale tasso lo abbiamo chiamato tasso di sconto unitario e lo abbiamo indicato col simbolo $d_R = s_R$.

Risulta: $\mathbf{d_R = s_R = \frac{i}{1+i}}$ $\quad i = \frac{1}{1-d_R}$

- Lo sconto commerciale (rispetto allo sconto razionale) è più favorevole all'ente che effettua l'operazione di sconto.

Equivalenza fra lo sconto razionale e lo sconto commerciale

- Come scegliere i tassi enunciati i_R e i_C perché siano uguali gli sconti dei due regimi?

$$S_C = C_t \cdot i_C \cdot t \quad S_R = \frac{i_R \cdot t}{1+i_R \cdot t} \cdot C_t \quad \mathbf{S_C = S_R} \Rightarrow C_t \cdot i_C \cdot t = \frac{i_R \cdot t}{1+i_R \cdot t} \cdot C_t \Rightarrow i_C = \frac{i_R}{1+i_R \cdot t} \quad \mathbf{i_R = \frac{i_C}{1-i_C \cdot t}}$$

- $S_C > S_R$ Infatti: $S_C - S_R = C_t \cdot i \cdot t - \frac{i \cdot t}{1+i \cdot t} \cdot C_t = \frac{i^2 \cdot t^2}{1+it} \cdot C_t > 0$
- $\mathbf{S_C = S_R(1+it)}$ Lo sconto commerciale è il montante dello sconto razionale
- $\mathbf{S_R = \frac{S_C}{1+it}}$ Lo sconto razionale è il valore attuale dello sconto commerciale
- $\mathbf{S_C - S_R = \frac{it}{1+it} \cdot S_C}$ = sconto razionale dello **sconto commerciale**
- $\mathbf{S_C - S_R = S_R \cdot it}$ = sconto commerciale dello sconto razionale

Sconto composto

Si ha lo sconto composto quando si assume come valore attuale (al tasso enunciato i) della somma esigibile fra t anni la somma scontata C_0; si ha:

$$C_t = C_o \cdot (1+i)^t = C_o \cdot u^t \quad C_0 = C_t \cdot (1+i)^{-t} = C_t \cdot \mathrm{v}^t \quad S_c = C_t - C_0 = C_t - C_t \cdot (1+i)^{-t} = C_t \cdot \left[1-(1+i)^{-t}\right]$$

$$S_c = C_t - C_0 = C_o \cdot (1+i)^t - C_o = C_o \cdot \left[(1+i)^t - 1\right] \quad C_t = 1 \wedge t = 1 \Rightarrow$$

$s_c = \frac{i}{1+i}$ in questo caso il tasso enunciato i non coincide col tasso di sconto composto s_c.

- tasso enunciato = **tasso unitario d'interesse posticipato**

Unificazione di più crediti

Siano $C_1;C_2;C_3;C_4;\cdots$ dei crediti da riscuotere rispettivamente ai tempi $t_1;t_2;t_3;t_4;\cdots$. Se vogliamo conoscere il credito C da riscuotere ad un prefissato tempo t quando si stabilisce il tasso i (riduzione di più crediti ad una scadenza data) dobbiamo applicare la seguente formula:

$$\mathbf{C \cdot v^{t} = C_1 \cdot v^{t_1} + C_2 \cdot v^{t_2} + C_3 \cdot v^{t_3} + C_4 \cdot v^{t_4}} \qquad [A]$$

dove C è l'incognita dell'equazione, essendo C il capitale unico da riscuotere al tempo t.

La suddetta equazione si ottiene tenendo presente il principio dell'equilibrio finanziario dei prestiti che nel caso nostro va enunciato nella seguente maniera: <<**Il valore attuale del credito C esigibile al tempo t è uguale alla somma dei valori attuali dei crediti** $C_1;C_2;C_3;C_4;\cdots$ **esigibili rispettivamente ai tempi** $t_1;t_2;t_3;t_4;\cdots$>>. Potremmo scegliere come data di riferimento una data diversa da oggi. In tal caso quale valore attuale potrebbe diventare montante.

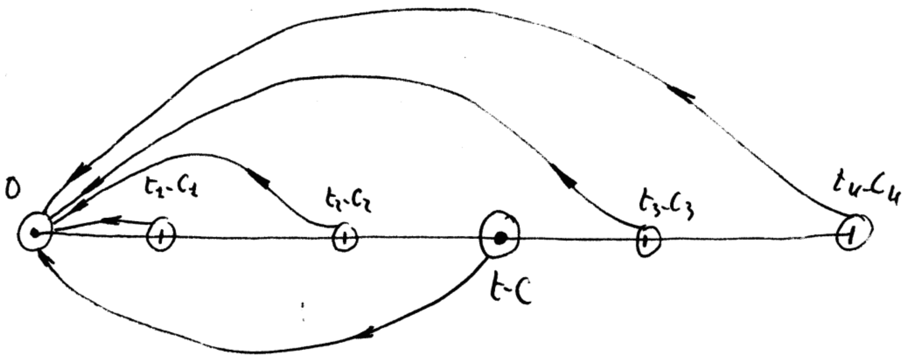
A saldo di più debiti con diversa scadenza si conviene di pagare una somma determinata C, di cui si vuole calcolare la scadenza. Si applica la formula [A] ; però adesso l'incognita è il tempo t

t dicesi scadenza comune dei capitali $C_1;C_2;C_3;C_4;\cdots$ se C viene fissato in modo generico

t dicesi scadenza media dei capitali $C_1;C_2;C_3;C_4;\cdots$ se C viene fissato in modo che risulti:

$$\mathbf{C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \cdots}$$

Cioè se si vuole che la somma da riscuotere (o da pagare) sia esattamente la somma dei crediti (o dei debiti).



Principio di equivalenza finanziaria

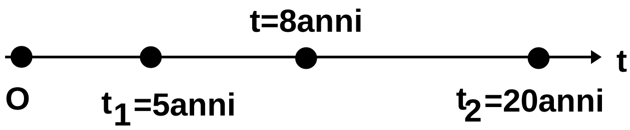
- Due capitali C_1 e C_2 disponibili rispettivamente ai tempi t_1 e t_2 (ad esempio $t_2 > t_1$) si dicono equivalenti finanziariamente fra di loro in un determinato regime di capitalizzazione al tasso i, se risultano uguali i loro valori ad un generico istante t.

Il capitale C_1 disponibile al tempo $t_1 = 5\,anni$ è equivalente al capitale C_2 disponibile al tempo $t_2 = 20\,anni$ si risultano uguali i loro valori al tempo t (ad esempio al tempo $t = 8\,anni$), cioè se il valore $M_1 = C_1(1+i)^3$ al tempo $t = 8\,anni$ è uguale al valore $V_2 = C_2(1+i)^{-12}$, cioè se:

$$C_1(1+i)^3 = C_2(1+i)^{-12} \qquad C_2 = C_1(1+i)^{15}$$

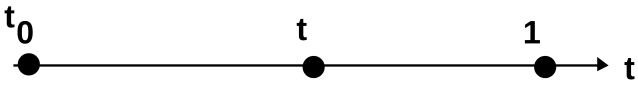
Questo in regime di capitalizzazione composta al tasso i. In regime di capitalizzazione semplice si ha: $C_1(1+3i) = \dfrac{C_2}{1+12i}$ $\qquad C_2 = C_1(1+3i)(1+12i)$

Naturalmente i due capitali sono finanziariamente equivalenti se le uguaglianze $C_2 = C_1(1+i)^{15}$ e $C_2 = C_1(1+3i)(1+12i)$ sono valide in un qualsiasi istante diverso da $t = 8\,anni$.



- Un insieme di più capitali disponibili a diverse scadenze si dice equivalente finanziariamente ad un insieme di altri capitali, in un determinato di regime di capitalizzazione ad un tasso i assegnato ed in relazione ad una data epoca t, se la somma dei valori dei capitali del primo insieme, riferiti all'epoca t, risulta uguale alla somma dei valori dei capitali del secondo insieme riferiti alla stessa epoca.
- Il principio di **equilibrio delle operazioni finanziarie** detto anche principio dell'equivalenza finanziaria secondo **Insolera** può essere così enunciato:

Per una data operazione finanziaria, avente inizio al tempo $t = t_o$ e fine al tempo $t = t_1 > t_o$, quando siano date ed accettate le condizioni formali e sostanziali dell'operazione stessa, si dirà che gli impegni delle parti contraenti sono equi o equivalenti se in ogni istante t dell'intervallo $t_o \le t \le t_1$, la somma della frazione di impegno assolto e di quella dell'impegno da assolvere dalla parte contraente è uguale alla somma della parte di impegno da assolvere e di quella dell'impegno assolto dalla controparte.



$$I_{\text{assolti}} + I_{\text{da assolvere}} = J_{\text{da assolvere}} + J_{\text{assolti}}$$

- In maniera più semplice il principio dell'equivalenza finanziaria può essere così enunciato: <<Un capitale C disponibile al tempo è equivalente all'insieme di altri capitali $C_1; C_2; C_3; \cdots$ disponibili ai tempi $t_1; t_2; t_3; \cdots$ se il capitale C è uguale allo somma dei montanti al tempo t dei capitali disponibili in epoche anteriori, e dei valori attuali al tempo t dei capitali disponibili in epoche posteriori>>.

Per applicare il principio dell'equivalenza finanziaria in regime di capitalizzazione composta, la scelta della data di valutazione o di riferimento può essere fatta ad arbitrio. Questo non è possibile in regime di capitalizzazione semplice dove bisogna fissare l'epoca di riferimento in relazione ai dati del problema.

In regime di capitalizzazione composta è indifferente la scelta dell'epoca di valutazione. **Questo non si verifica in regime di capitalizzazione semplice**.