Rendite

Nozioni generali

- Si chiama rendita una successione di capitali $R_1; R_2; R_3; \cdots; R_n$ da esigere o da versare rispettivamente ai tempi $t_1; t_2; t_3; \cdots; t_n$.
- I capitali $R_1; R_2; R_3; \cdots; R_n$ si dicono rate o termini della rendita, i tempi $t_1; t_2; t_3; \cdots; t_n$ scadenze, gli intervalli di tempi $t_{h+1} - t_h$ periodi della rendita: cioè il periodo di una rendita è il tempo che intercede tra una rata e la successiva. Di solito si considerano periodi uguali. Il numero dei periodi costituisce la durata della rendita.
- Se le rate della rendita sono tutte uguali fra di loro, la rendita si dice costante, altrimenti dicesi variabile.
- Una rendita si dice anticipata o posticipata secondo che le rate sono disponibili al principio o alla fine di ogni periodo. Una rendita è immediata se ha inizio subito, ossia se la prima rata è pagabile all'inizio o al termine (secondo che sia anticipata o posticipata) del primo periodo decorrente dalla data rispetto alla quale se ne fa la valutazione. Si dice differita di p periodi se debbono trascorrere p periodi dalla data di valutazione prima che abbia inizio il primo periodo nel quale è pagabile la prima rata. Una rendita differita può essere anticipata o posticipata.
- il periodo della rendita può essere l'anno, il semestre, il trimestre etc…e la rendita si dice rispettivamente annuale, semestrale, trimestrale etc…; mentre la rata si dice annualità, semestralità, trimestralità etc…
- Una rendita si dice temporanea o perpetua secondo che è costituita da un numero limitato o illimitato di termini.
- In una rendita temporanea di n termini si chiama durata l'intervallo di tempo $t_n - t_0$ fra l'inizio del primo periodo e l'ultima scadenza.

Rendite

- Una rendita è certa quando il versamento delle singole rate non è soggetto ad alcuna condizione; è invece vitalizia quando è soggetta alla condizione di esistenza in vita di una o più persone.

- Le rate di una rendita sono dei capitali disponibili in epoche diverse per cui ciascuna di esse è suscettibile di capitalizzazione (generalmente) composta, ad un tasso i che dicesi tasso di valutazione della rendita. Importa quindi il calcolo del valore di una rendita ad un'epoca determinata, e particolarmente il suo valore attuale o il suo valore finale o montante.

Dicesi valore attuale di una rendita la somma dei valori attuali delle sue singole rate, riferite all'inizio del primo periodo. Esso esprime il valore della rendita come se fosse un capitale unico: cioè rappresenta il capitale che potrebbe ottenersi in prestito (al tasso i) contro la cessione delle successive rate che costituiscono la rendita stessa. Dicesi valore finale o montante di una rendita la somma dei montanti delle sue singole rate, riferiti alla fine dell'ultimo periodo. Esso esprime il capitale realizzato alla fine (da chi gode della rendita) accumulando le rate ed i relativi interessi: cioè esprime quale capitale alla fine della rendita può costituirsi mediante il collocamento (ad interesse composto al tasso i) delle successive rate che costituiscono la rendita.

- Noi studieremo i 3 seguenti tipi di rendite: 1) Rendite annue a rate costanti 2) rendite frazionate e poliennali a rate costanti 3) rendite annue a rate variabili in progressione aritmetica o geometrica.

Rendite

- Rendite
  - Immediate
    - temporanee
      - Anticipate
      - Posticipate
    - Illimitate o perpetue
      - Anticipate
      - Posticipate
  - Differite
    - temporanee
      - Anticipate
      - Posticipate
    - Illimitate o perpetue
      - Anticipate
      - Posticipate

Simbolismo

Una rendita a rata costante si dice UNITARIA se la rata (annua) è di 1 lira.

$s_{\overline{n}|i}$ = Montante al tasso i di una rendita annua unitaria immediata posticipata di n rate
(s figurato n al tasso i)

$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ = Montante al tasso i di una R. A. U. I. A. di n rate
(s anticipato figurato n al tasso i)

$a_{\overline{n}|i}$ = V. A. al tasso i di una R. A. U. I. P. di n rate
(a figurato n al tasso i)

Rendite

$\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ = V. A. al tasso i d'una R.A.U.I.A di n rate
(a anticipato figurato n al tasso i)

$p/a_{\overline{n}|i}$ = V. A. al tasso i di una R.A.U.D.P. di n rate
(a differito p figurato n al tasso i)

$p/\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ = V. A. al tasso i d'una R.A.U.D.A. di n rate
(a anticipato differito p figurato n al tasso i)

$_{p/}s_{\overline{n}|i}$ = montante al tasso i di una rendita unitaria differita posticipata

(s differito p figurato n al tasso i)

$_{p/}\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ = montante al tasso i di una rendita unitaria differita anticipata

(s anticipato differito p figurato n al tasso i)

$s_{\overline{\infty}|i}$ = montante di una rendita posticipata unitaria perpetua al tasso i

$\ddot{s}_{\overline{\infty}|i}$ = montante di una rendita anticipata unitaria perpetua al tasso i

$_{p/}s_{\overline{\infty}|i}$ = montante di una rendita unitaria posticipata perpetua al tasso i

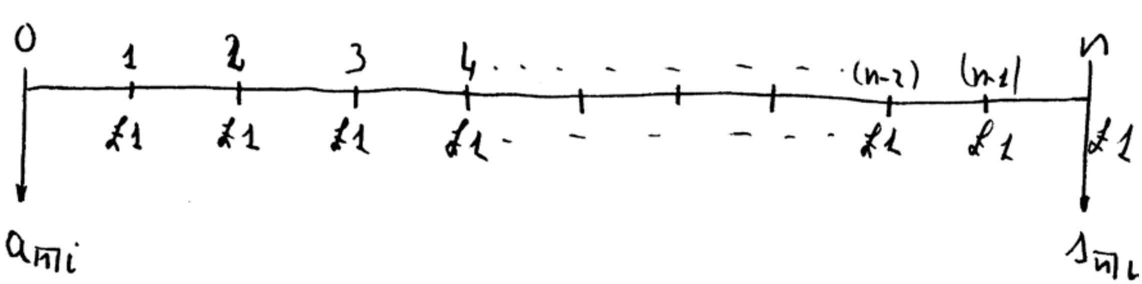
$_{p/}\ddot{s}_{\overline{\infty}|i}$ = montante di una rendita unitaria anticipata perpetua al tasso i

$a_{\overline{\infty}|i}$ = valore attuale di una rendita posticipata unitaria immediata e perpetua

$_{p/}a_{\overline{\infty}|i}$ = valore attuale di una rendita posticipata unitaria differita e perpetua

Rendite annue a rate costanti

a) **Relazioni fra il valore attuale ed il montante di una rendita annua costante unitaria posticipata**



Rendite

Sia $a_{\overline{n}|i}$ il valore attuale al tasso i di una rendita annua costante unitaria posticipata di n rate

$s_{\overline{n}|i}$ il montante al tasso i di una rendita annua costante unitaria posticipata di n rate

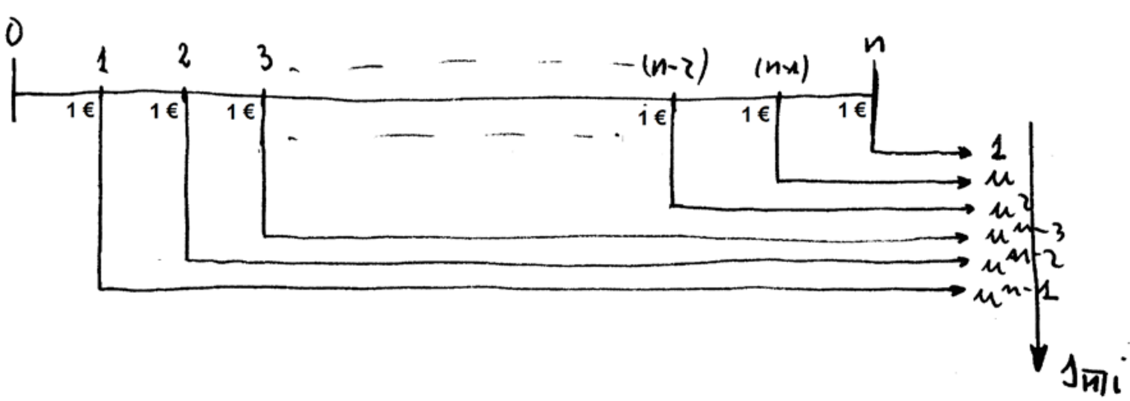
Tenendo presente il meccanismo del trasferimento dei capitali nel tempo, si possono trovare le relazioni fra $a_{\overline{n}|i}$ ed $s_{\overline{n}|i}$, cioè:

$$\begin{cases} a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot v^n \\ s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot u^n \end{cases}$$

b) Valore attuale e montante di una rendita immediata, temporanea, posticipata

Consideriamo la rendita annuale immediata posticipata costituita da n annualità di 1 lira ciascuna e calcoliamo il Montante ed il Valore Attuale di tale rendita nel regime di capitalizzazione composta al tasso annuo i.

Montante



Rendite

Il montante complessivo $s_{\overline{n}|i}$ è la somma dei montanti parziali u^h ($h = n-1, n-2, \dots 2, 1, 0$), cioè:

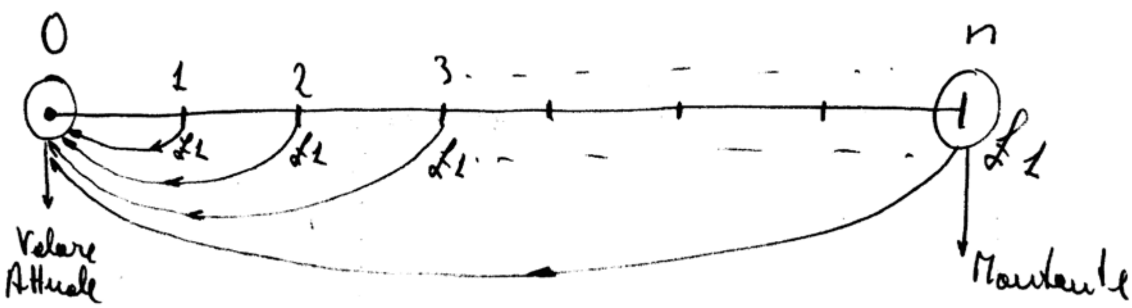
$$s_{\overline{n}|i} = u^{n-1} + u^{n-2} + u^{n-3} + \dots + u^3 + u^2 + u + 1 =$$
$$= 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^{n-3} + u^{n-2} + u^{n-1}$$

Si tratta della somma di n termini in Progressione geometrica di ragione $q = u = 1+i > 0$, il primo termine è $a_1 = 1$ $\left(S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \right)$ onde:

$$s_{\overline{n}|i} = 1 \cdot \frac{u^n - 1}{u-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Valore attuale



Il valore attuale complessivo $a_{\overline{n}|i}$ è la somma dei valori attuali parziali v^h ($h = 1, \dots n$), cioè:

$a_{\overline{n}|i} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n =$ somma di n termini in progressione geometrica di ragione $q = v < 1$ e primo termine $a_1 = v$

$$\left(S = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

$$a_{\overline{n}|i} = v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{u-uv} =$$

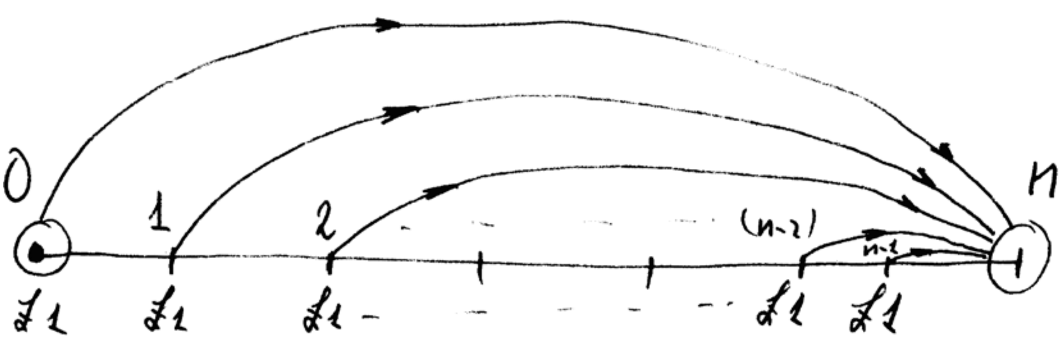
$$= \frac{1-v^n}{(1+i)-1} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (u \cdot v = 1)$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore della (42) per u^n si ha: $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

Montante e Valore Attuale di una rendita immediata temporanea anticipata

Consideriamo la rendita annuale immediata anticipata costituita da n annualità di 1 lira ciascuna e calcoliamo il montante ed il valore attuale di tale rendita nel regime di capitalizzazione composta al tasso annuo i.



Il montante complessivo $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ è la somma dei montanti parziali u^h $(h = n, n-1, \dots, 2, 1)$, cioè:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u^n + u^{(n-1)} + \dots + u^2 + u = u + u^2 + \dots + u^{n-1} + u^n =$$

= somma di n termini in progressione geometrica di ragione $q = u = 1+i > 0$ e primo termine $a_1 = u$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u \cdot \frac{u^n - 1}{u - 1} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

Tenendo presente la (41) si ha: $\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$

Sviluppando la (44) si ha:

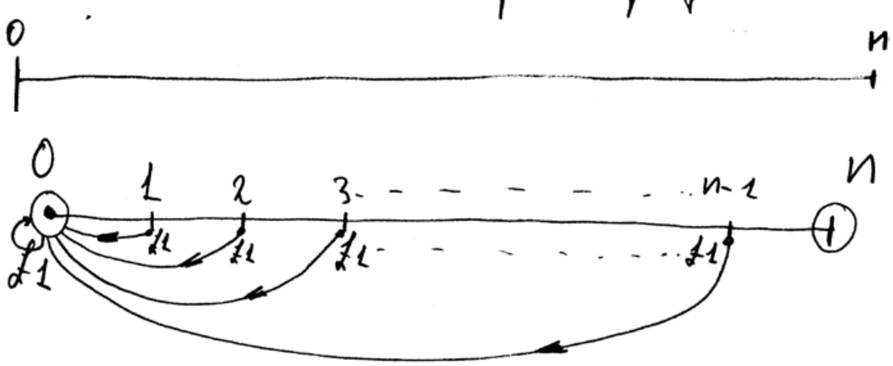
$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 = s_{\overline{n+1}|} - 1$$

cioè

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|} - 1}$$

tale formula è quella che si usa nella pratica

La (46) è chiarita dal seguente grafico:



Rendite

Il valore attuale complessivo $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ è la somma dei valori attuali parziali v^h $(h = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-2, n-1)$, cioè:

$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1}$ = somma di n termini in progressione geometrica di ragione $q = v < 1$

$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 \cdot \dfrac{1-v^n}{1-v}$; $1 - v = 1 - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{i}{1+i}$ anche:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}(1+i)$$

Tenendo presente la (42) si ha: $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)$

Tenendo presente la (43) si ha: $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}$

Sviluppando la (42) si ha:

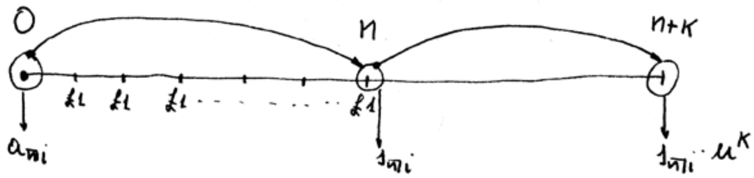
$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i) - u v^n}{i} = \dfrac{1+i-v^{n-1}}{i} = \dfrac{1-v^{n-1}}{i} + 1$ cioè:

$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1$ Tale formula è quella che si usa nella pratica

Montante e valore attuale di una rendita differita

Montante

Calcoliamo il montante di una rendita k anni dopo l'ultimo versamento.



Rendite

Montante di una rendita unitaria immediata temporanea posticipata calcolato k anni dopo l'ultimo versamento $= M_{\overline{n+k}|i} = s_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)^k$ cioè: $M_{\overline{n+k}|i} = s_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)^k$

Sviluppando la (51) si ha:

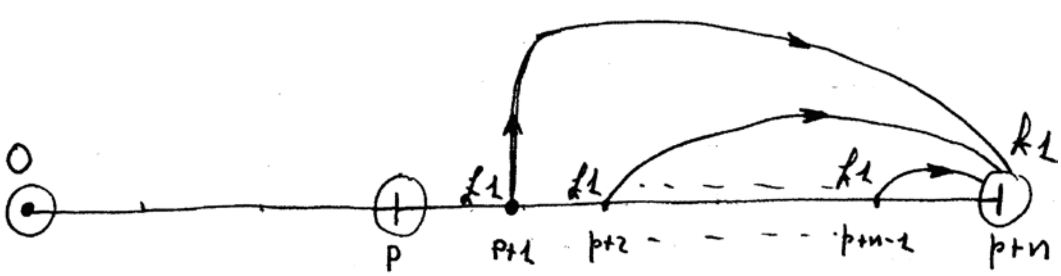
$$s_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)^k = \frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot(1+i)^k = \frac{(1+i)^{n+k}-(1+i)^k}{i} =$$

$$= \frac{(1+i)^{n+k}-1-(1+i)^k+1}{i} =$$

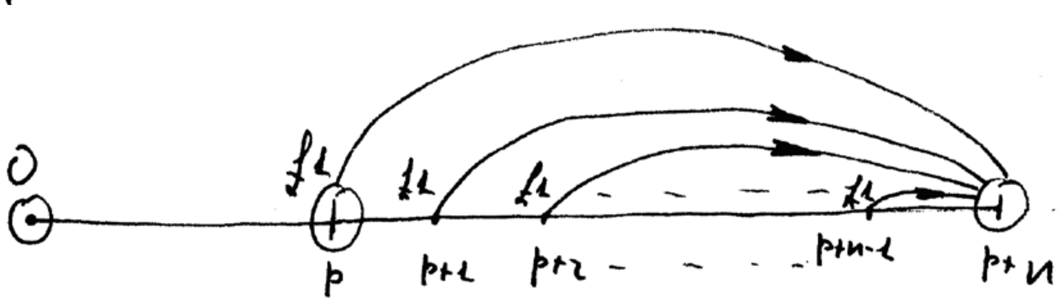
$$= \frac{(1+i)^{n+k}-1}{i} - \frac{(1+i)^k-1}{i} = s_{\overline{n+k}|i} - s_{\overline{k}|i}$$

$s_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^k = s_{\overline{n+k}|i} - s_{\overline{k}|i}$ Tale formula è quella che si usa nella pratica

Montante e valore attuale di una rendita differita



$$p/s_{\overline{n}|i} = u^{n-1}+u^{n-2}+\dots+u^2+u+1 = s_{\overline{n}|i}$$



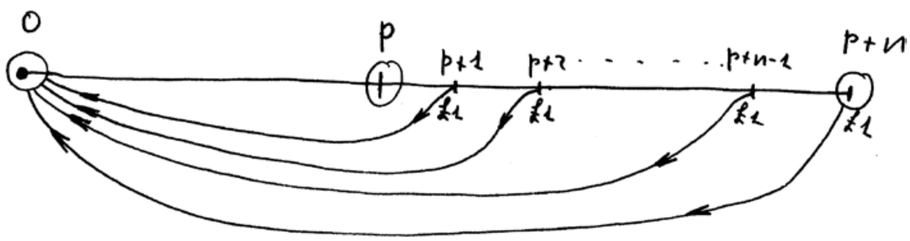
Rendite

$$p/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = u^n + u^{n-1} + \dots + u^2 + u = \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

Quindi i montanti di rendite differite e temporanee sono uguali alle corrispondenti rendite temporanee

$$\begin{cases} p/s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \\ p/\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1 \end{cases}$$

Valore attuale



$$p/a_{\overline{n}|i} = v^{p+1} + v^{p+2} + \dots + v^{p+n-1} + v^{p+n} =$$

$$= v^p\left(v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n\right) = v^p \cdot a_{\overline{n}|i} \qquad p/a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot v^p$$

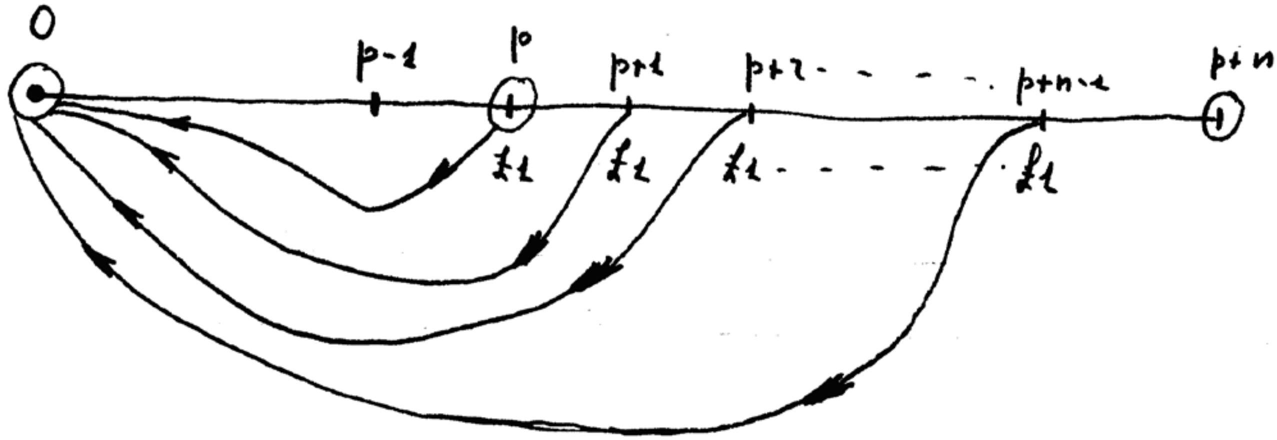
Tenendo presente la (42) la (54) diventa

$$p/a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i} \cdot v^p = \frac{v^p - v^{p+n}}{i} = \frac{v^p - 1 + 1 - v^{p+n}}{i} =$$

$$= \frac{1-v^{p+n}}{i} - \frac{1-v^p}{i} = a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{p}|i}$$

$p/a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{p}|i}$ Tale formula è quella che si usa nella pratica

Rendite



$$p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^p + v^{p+1} + v^{p+2} + \dots + v^{p+n-1} = v^p(1+v+v^2+\dots+v^{n-1}) = v^p \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

$$p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot v^p$$

In pratica però una rendita differita e anticipata si può sempre considerare differita e posticipata, cioè:

$$p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (p-1)/a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+p-1}|i} - a_{\overline{p-1}|i}$$

Rendite perpetue

Essendo una rendita perpetua costituita da ∞ rate, è evidente che il suo montante sarà ∞, cioè:

$$s_{\overline{\infty}|i} = \ddot{s}_{\overline{\infty}|i} = p/s_{\overline{\infty}|i} = p/\ddot{s}_{\overline{\infty}|i} = \infty$$

Pertanto nelle rendite perpetue hanno importanza solamente i valori attuali.
Tenendo presente che:

$$\lim_{n\to\infty} u^n = \lim_{n\to\infty} (1+i)^n = (1+i)^\infty = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} v^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

possiamo ricavare le seguenti relazioni:

Rendite

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i} \qquad \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i}(1+i) = \frac{1+i}{i} = \frac{1}{i}+1$$

$$p/a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} p/a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i}\cdot v^p = \frac{1}{i} v^p = \frac{v^p}{i}$$

$$p/\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} p/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i}\cdot v^p = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i}\cdot v^p = \frac{1+i}{i}\, v^p = \frac{v^{p-1}}{i}$$

$$a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i} \qquad \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}+1 \qquad p/a_{\overline{\infty}|i} = \frac{v^p}{i} \qquad p/\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{v^{p-1}}{i}$$

Formulario sulle rendite unitarie temporanee

$$\mathbf{u=1+i} \qquad \mathbf{v=\frac{1}{u}=\frac{1}{1+i}=(1+i)^{-1}} \qquad v^n = u^{-n} \qquad \sigma_{\overline{n}|i} = \frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{1+i})^{\mathbf{n}}\mathbf{-1}} \qquad \alpha_{\overline{n}|i} = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{1-(1+i)^{-n}}}$$

$s_{\overline{n}\|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	**Montante** di una rendita unitaria immediata temporanea **posticipata**
$a_{\overline{n}\|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	**Valore attuale** di una rendita unitaria immediata temporanea posticipata
$a_{\overline{n}\|i} = s_{\overline{n}\|i}\cdot v^n$ $s_{\overline{n}\|i} = a_{\overline{n}\|i}\cdot u^n$	**Legame fra valore attuale e montante** di una rendita unitaria immediata temporanea **posticipata**
$\ddot{s}_{\overline{n}\|i} = s_{\overline{n}\|i}\cdot(1+i) = s_{\overline{n+1}\|i} - 1$	**Montante** di una rendita unitaria immediata temporanea **anticipata**
$\ddot{a}_{\overline{n}\|i} = a_{\overline{n}\|i}\cdot(1+i) = a_{\overline{n-1}\|i} + 1$	**Valore attuale** di una rendita unitaria immediata temporanea **anticipata**
$s_{\overline{n}\|i}\cdot(1+i)^k = s_{\overline{n+k}\|i} - s_{\overline{k}\|i}$	**Montante** calcolato k anni dopo l'ultimo versamento
$p/s_{\overline{n}\|i} = s_{\overline{n}\|i} \quad p/\ddot{s}_{\overline{n}\|i} = \ddot{s}_{\overline{n}\|i}$	**Montanti** di rendite unitarie differite temporanee
$p/a_{\overline{n}\|i} = a_{\overline{n}\|i}\cdot v^p = a_{\overline{n+p}\|} - a_{\overline{p}\|i}$	**Valore attuale** di una rendita unitaria differita temporanea **posticipata**
$p/\ddot{a}_{\overline{n}\|i} = \ddot{a}_{\overline{n}\|i}\cdot v^p = {}_{(p-1)}/a_{\overline{n}\|i} =$ $= a_{\overline{n+p-1}\|i} - a_{\overline{p-1}\|i}$	**Valore attuale** di una rendita unitaria differita temporanea **anticipata**

Montanti e valori attuali delle rendite temporanee

$R\cdot s_{\overline{n}\|i}=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$	**Montante** di una rendita annua immediata temporanea **posticipata**
$R\cdot a_{\overline{n}\|i}=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	**Valore attuale** di una rendita unitaria immediata temporanea posticipata
$R\cdot a_{\overline{n}\|i}=R\cdot s_{\overline{n}\|i}\cdot \mathrm{v}^{\mathrm{n}}$ $R\cdot s_{\overline{n}\|i}=R\cdot a_{\overline{n}\|i}\cdot \mathrm{u}^{\mathrm{n}}$	**Legame fra valore attuale e montante** di una rendita unitaria immediata temporanea **posticipata**
$R\cdot \ddot{s}_{\overline{n}\|i}=R\cdot s_{\overline{n}\|i}\cdot(1+i)=R\cdot\left(s_{\overline{n+1}\|i}-1\right)$	**Montante** di una rendita unitaria immediata temporanea **anticipata**
$R\cdot \ddot{a}_{\overline{n}\|i}=R\cdot a_{\overline{n}\|i}\cdot(1+i)=R\cdot\left(a_{\overline{n-1}\|i}+1\right)$	**Valore attuale** di una rendita unitaria immediata temporanea **anticipata**
$R\cdot s_{\overline{n}\|i}\cdot(1+i)^k=R\cdot\left(s_{\overline{n+k}\|i}-s_{\overline{k}\|i}\right)$	**Montante** calcolato k anni dopo l'ultimo versamento
$R\cdot {}_{p/}s_{\overline{n}\|i}=R\cdot s_{\overline{n}\|i}\quad R\cdot {}_{p/}\ddot{s}_{\overline{n}\|i}=R\cdot \ddot{s}_{\overline{n}\|i}$	**Montanti** di rendite unitarie differite temporanee
$R\cdot {}_{p/}a_{\overline{n}\|i}=R\cdot a_{\overline{n}\|i}\cdot \mathrm{v}^{\mathrm{p}}=R\cdot\left(a_{\overline{n+p}\|}-a_{\overline{p}\|i}\right)$	**Valore attuale** di una rendita unitaria differita temporanea **posticipata**
$R\cdot {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}\|i}=R\cdot \ddot{a}_{\overline{n}\|i}\cdot \mathrm{v}^{\mathrm{p}}=R\cdot {}_{(p-1)/}a_{\overline{n}\|i}=$ $=R\cdot\left(a_{\overline{n+p-1}\|i}-a_{\overline{p-1}\|i}\right)$	**Valore attuale** di una rendita unitaria differita temporanea **anticipata**

Formulario sulle rendite unitarie perpetue

$s_{\overline{\infty}\mid i} = \ddot{s}_{\overline{\infty}\mid i} = {}_{p/}s_{\overline{\infty}\mid i} = {}_{p/}\ddot{s}_{\overline{\infty}\mid i} = \infty$	Montanti di rendite perpetue
$a_{\overline{\infty}\mid i} = \frac{1}{i}$	Valore attuale di una rendita unitaria immediata perpetua posticipata
$\ddot{a}_{\overline{\infty}\mid i} = \frac{1}{i} + 1$	Valore attuale di una rendita unitaria immediata perpetua anticipata
${}_{p/}a_{\overline{\infty}\mid i} = \frac{v^p}{i}$	Valore attuale di una rendita unitaria immediata differita perpetua posticipata
${}_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}\mid i} = \frac{v^{p-1}}{i}$	Valore attuale di una rendita unitaria immediata differita perpetua anticipata

Problemi inversi sulle rendite

$M=R\cdot s_{\overline{n}\mid i}$	$M=R\cdot\ddot{s}_{\overline{n}\mid i}$	$\sigma_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{1}{s_{\overline{n}\mid i}}$	$\ddot{\sigma}_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}\mid i}}$
$V=R\cdot a_{\overline{n}\mid i}$	$V=R\cdot\ddot{a}_{\overline{n}\mid i}$	$\alpha_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{1}{a_{\overline{n}\mid i}}$	$\ddot{\alpha}_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}\mid i}}$
$\alpha_{\overline{n}\mid i}-\sigma_{\overline{n}\mid i}=i$	$\ddot{\alpha}_{\overline{n}\mid i}-\ddot{\sigma}_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{i}{1+i}$	$\ddot{\sigma}_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{\sigma_{\overline{n}\mid i}}{1+i}$	$\ddot{\sigma}_{\overline{n}\mid i}=\ddot{\alpha}_{\overline{n}\mid i}\cdot\mathrm{v}^{\mathrm{n}}$
$\ddot{\alpha}_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{\alpha_{\overline{n}\mid i}}{1+i}$	$\ddot{\alpha}_{\overline{n}\mid i}=\ddot{\sigma}_{\overline{n}\mid i}\cdot\mathrm{u}^{\mathrm{n}}$		
$R=M\cdot\sigma_{\overline{n}\mid i}$	$R=M\cdot\ddot{\sigma}_{\overline{n}\mid i}$	Ricerca della rata per costituire il capitale M	
$R=V\cdot\alpha_{\overline{n}\mid i}$	$R=V\cdot\ddot{\alpha}_{\overline{n}\mid i}$	Ricerca della rata per estinguere il debito V	
Ricerca del tasso			
$s_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{M}{R}=\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$	per difetto	$\sigma_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{R}{M}=\dfrac{i}{(1+i)^n-1}$	per eccesso
$a_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{V}{R}=\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	per eccesso	$\alpha_{\overline{n}\mid i}=\dfrac{R}{V}=\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	per difetto