Costituzione di un capitale

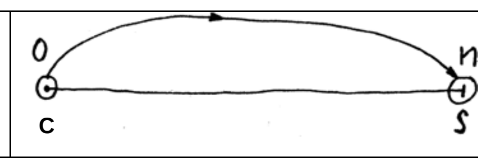
1) **Generalità**

Uno dei problemi che spesso si presenta nella pratica è quello di stabilire quale somma deve essere depositata periodicamente per potere formare dopo un certo tempo t un determinato capitale S, noto il tasso di interesse applicato alle somme depositate: è questo il problema della costituzione di un capitale. Il capitale che si vuole costituire rappresenta il valore finale complessivo, cioè il montante di tutte le rate che verranno depositate. In generale si tratta di un problema di rendita temporanea nel quale, noti ilo montante della rendita stessa, il numero dei versamenti periodici ed il tasso di interesse, si deve ricercare l'ammontare di ogni singolo versamento o rata.

La costituzione del capitale può avvenire:

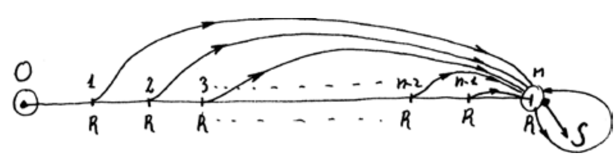
- mediante un versamento unico iniziale
- mediante versamenti periodici. Di solito si tratta di versamenti costanti: si ha la costituzione a rate costanti (posticipate o anticipate)

2) **Costituzione di un capitale in una sola volta**

Se fra n anni voglio costituire il capitale S, quale capitale C debbo versare oggi? $C \cdot (1+i)^n = S$ $\quad$ $\mathbf{C = S \cdot v^n}$	

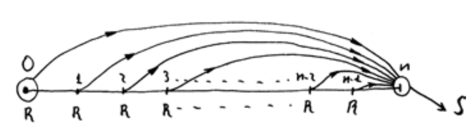
3) **Costituzione di un capitale a rate costanti**

Voglio costituire la somma S con n rate R costanti annue. Il capitale S da costituire è il montante di una rendita annua formata da n rate.



Rate posticipate: $S = R \cdot s_{\overline{n}|i}$ $\qquad$ $R = \dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}} = S \cdot \sigma_{\overline{n}|i}$

Rate anticipate: $S = R \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|i}$ $\qquad$ $R = \dfrac{S}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = S \cdot \ddot{\sigma}_{\overline{n}|i}$



$R = \dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}} = S \cdot \sigma_{\overline{n}|i}$ = rata annua posticipata per la costituzione della somma S in n anni

$R = \dfrac{S}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = S \cdot \ddot{\sigma}_{\overline{n}|i}$ = rata annua anticipata per la costituzione della somma S in n anni

Costituzione di un capitale   Ammortamento Obbligazioni

Piano di costituzione

Spesso conviene redigere un piano di costituzione della somma S, per avere una visione chiara della graduale formazione della somma S. Dicesi fondo il montante ad un dato momento.

Fondo iniziale + **Interesse** + *Rata annua* = **Fondo finale**

Esempio: Redigere il piano di costituzione della somma S di $4'000'000\,€$ con 4 versamenti annui posticipati, sapendo che il tasso annuo è $i=0,05$.

Mi calcolo la rata di costituzione R

$R=S\cdot\sigma_{\overline{n}|i}=4\cdot10^6\cdot\sigma_{\overline{4}|0,05}=4\cdot10^6\cdot0,23201183=928'047\,€=F_1\qquad F_k=F_{k-1}+I_k+R$

F_1 = fondo costituito al termine del primo anno

$I=C\cdot i$ (capitalizzazione annua ad interesse semplice) $\quad I_1=0$

$I_2=F_1\cdot i=928'047\cdot0,05=46'402\,€\qquad F_2=F_1+I_2+R=928'047+46'402+928'047=1'902'496\,€$

$I_3=F_2\cdot i=1'902'496\cdot0,05=95'125\,€$

$F_3=F_2+I_3+R=1'902'4967+95'125+928'047=2'925'668\,€$

$I_4=F_3\cdot i=2'925'668\cdot0,05=146'283\,€$

$F_4=F_3+I_4+R=2'925'668+146'283+928'047=3'999'998\,€$

Anni	Fondo ad inizio d'anno	Interessi sul fondo I_k	Rata annua	Fondo all'inizio dell'anno
1			928'047	928'047
2	928'047	46'402	928'047	1'902'496
3	1'902'496	95'125	928'047	2'925'668
4	2'925'668	146'283	928'047	3'999'998 €

Fondo costituito

Il fondo che figura nell'ultima colonna può essere calcolato direttamente senza redigere il piano. Sia F_k il fondo costituito al termine dell'anno k: tale fondo è il montante di una rendita di k rate di R € ciascuna.

Rate posticipate: $\mathbf{F_k=R\cdot s_{\overline{k}|i}=S\cdot\sigma_{\overline{n}|i}\cdot s_{\overline{k}|i}}$ Rate anticipate: $\mathbf{F_k=R\cdot\ddot{s}_{\overline{k}|i}=S\times\ddot{\sigma}_{\overline{n}|i}\cdot\ddot{s}_{\overline{k}|i}}$

La formula di F_k può servire per controllare il piano: il controllo si ha sempre all’ultima riga (l’ultimo fondo deve coincidere con la somma da costituire), ma, se il piano è molto lungo, conviene fare il controllo ogni 4 o 5 righe, per evitare di dovere fare tutto daccapo. La determinazione del fondo è utile ogni volta che si vuole modificare il piano di costituzione.

Ricerca del numero delle rate necessarie a costituire un capitale S

Il problema è il seguente: <<Si vuole costituire un capitale S depositando delle rate tutte uguali ad R che vengono capitalizzate al tasso anno i. Quante rate occorre depositare?>>

Rate posticipate

$$S = R \cdot s_{\overline{n}|i} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{R(1+i)^n - R}{i} \qquad R \cdot (1+i)^n = i \cdot S + R$$

$$(1+i)^n = \frac{i \cdot S + R}{R} \qquad n \log(1+i) = \log(S \cdot i + R) - \log R$$

$$n = \frac{\log(S \cdot i + R) + \operatorname{colog} R}{\log(1+i)}$$

n può essere calcolato anche con le tavole utilizzando la relazione: $s_{\overline{n}|i} = \frac{S}{R}$

Se il valore di n che così si trova è un numero intero, il problema è risolto . Se ciò non si verifica bisogna fare le seguenti considerazioni. Supponiamo che sia:

$\boxed{n' < n < n'+1}$ cioè : $\boxed{n = n' + f}$ con n' numero intero ed f frazione minore di 1.

a) Se si prende $\underline{n = n'}$ allora bisogna aumentare la R in modo che bastino n' versamenti, cioè si calcola la nuova rata R' che deve sostituire R applicando la seguente formula:

$$R' = S \cdot \sigma_{\overline{n'}|i}$$

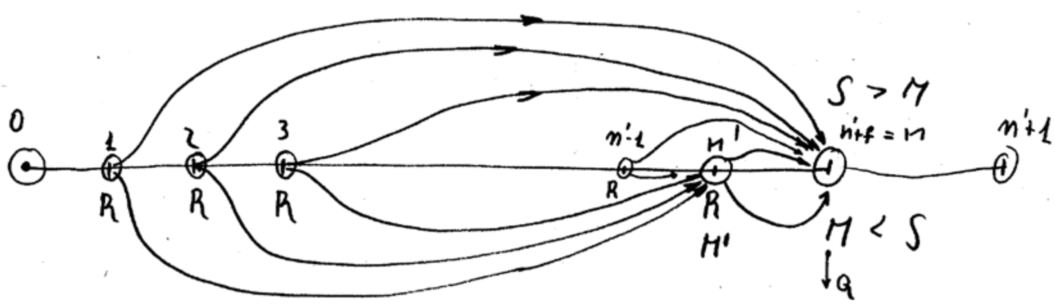
b) Se si prende $\underline{n = n'+1}$ allora bisogna prendere una rata $R'' < R$ tale che:

$$R'' = S \cdot \sigma_{\overline{n'+1}|i}$$

c) Si può fare n' versamenti dell'importo prefissato R ed un versamento complementare per completare la costituzione del capitale. Tale versamento può essere fatto assieme all'ultima rata oppure un periodo dopo. In tal caso conviene seguire il seguente procedimento: **<<Il capitale S può essere costituito mediante il versamento di n' rate annue uguali ad R ed il versamento di una rata complementare Q da effettuarsi trascorso il tempo f dal pagamento della rata n' , cioè trascorso il tempo $n'+f$** >>. Calcoliamo Q.

Il montante delle prime n' rate è: $M' = R \cdot s_{\overline{n'}|i}$

e dopo la frazione f diviene: $M = M' \cdot (1+i)^f = R \cdot s_{\overline{n'}|i} \cdot (1+i)^f < S$



$Q = S - M = R \cdot s_{\overline{n}|i} - R\, s_{\overline{n'}|i} \cdot (1+i)^f = R \cdot \frac{u^n - 1}{i} - R \cdot \frac{u^{n'} - 1}{i} \cdot u^f = \frac{R}{i}\left[u^n - 1 - (u^{n'} - 1)u^f\right] =$

$= \frac{R}{i} \cdot \left[\cancel{u^n} - 1 - \cancel{u^{n'+f}} + u^f\right] = \frac{R}{i}(u^f - 1) \qquad Q = \frac{R}{i}(u^f - 1)$

Ma: $u^f \approx 1 + if$ si ha: $Q \approx R \cdot f$

Ammortamento di prestiti indivisi

Generalità

a) Si chiama AMMORTAMENTO l'operazione finanziaria che stabilisce le modalità per l'estinzione graduale di un PRESTITO o di un "MUTUO", entro un certo periodo di tempo, mediante una serie di versamenti successivi che servono per il rimborso del capitale ed il pagamento dei dovuti interessi.

Pertanto «AMMORTIZZARE-UN-DEBITO-» significa fare un certo numero di pagamenti in determinate epoche, in guisa da estinguerlo pagandone anche gli interessi».

b) I prestiti si dicono INDIVISI quando il creditore è una sola persona.

c) L'ente che concede il prestito (cioè il creditore) si chiama MUTUANTE e quello che lo chiede (cioè il debitore) MUTUATARIO

d) L'intervallo di tempo durante il quale si estingue il prestito si chiama DURATA-DELL'AMMORTAMENTO. La durata è compresa fra l'INIZIO e la SCADENZA del prestito.

e) Naturalmente i modi di estinzione graduale possono essere diversi in relazione alle condizioni di rimborso

pattuite fra Creditore e Debitore:
pertanto i singoli versamenti possono essere annuali, semestrali ecc., possono essere tutti uguali oppure diversi d'anno in anno.
In ogni caso però l'ammortamento di prestiti avviene mediante pagamenti (costanti o variabili) i quali devono essere composti sempre di 2 parti:

— Una che serve a rimborsare il capitale avuto in prestito
— L'altra che serve a corrispondere gli interessi sul debito residuo, cioè sulla parte di debito non ancora rimborsata.

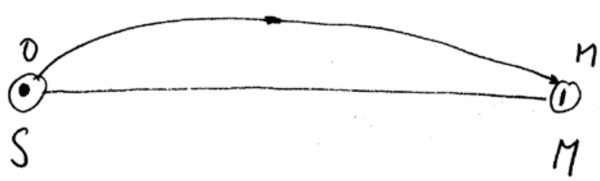
La prima parte dicesi QUOTA-DI-CAPITALE, la seconda parte QUOTA-DI-INTERESSI.
La somma delle delle due quote costituisce naturalmente l'importo del versamento rateale che dicesi RATA-DI-AMMORTAMENTO.

Le forme di ammortamento più usate in pratica sono le seguenti:

1°) Ammortamento a quote costanti di capitale, detto anche <u>AMMORTAMENTO COSTANTE</u>

2°) Ammortamento a rate costanti, detto anche AMMORTAMENTO <u>PROGRESSIVO</u> o <u>Francese</u>

RIMBORSO GLOBALE



S = capitale prestato oggi

M: capitale da pagare all'età n per estinguere il debito S

Il mutuatario paga in una sola volta (ad una prefissata scadenza) il capitale prestato S più l'interesse I, cioè il montante M.

Risulta: $\mathbf{M = S \cdot (1 + i)^n}$ Tale tipo di ammortamento è usato raramente.

Ammortamento globale con pagamento periodico degli interessi

Il mutuatario paga periodicamente gli interessi (che possono essere anticipati o posticipati) sul debito ed, alla scadenza convenuta, in sola volta l'intero capitale.

Simboli e relazioni fondamentali

- $R_1; R_2; R_3; \cdots; R_k; \cdots$ rate di ammortamento
- $I_1; I_2; I_3; \cdots; I_k; \cdots$ quote interessi
- $C_1; C_2; C_3; \cdots; C_k; \cdots$ quote capitale
- E_k = debito estinto dopo avere pagato la rata k

- D_k = **debito residuo** dopo avere pagato la rata k, cioè **debito da pagare** dopo avere versato la rata k

Per un debito S da ammortizzare in n anni valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{R_k = \mathcal{J}_k + C_k} \qquad \mathbf{\mathcal{J}_k = R_k - C_k} \qquad \mathbf{C_k = R_k - \mathcal{J}_k} \qquad \mathbf{E_k = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_{k-1} + C_k}$$

$$\mathbf{S = E_k + D_k} \qquad \mathbf{D_k = S - E_k}$$

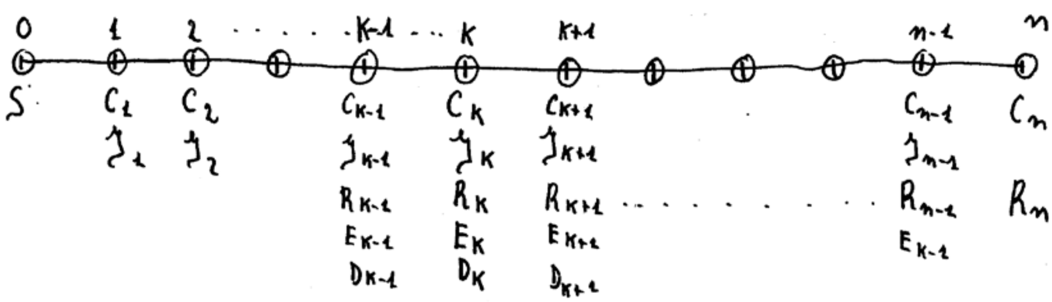
La quota di interesse di ciascun anno è l'interesse per un anno sul debito residuo dell'anno precedente (in quanto si paga posticipatamente), perciò si ha, per il primo anno:

$I_1 = S \cdot i \quad I_2 = D_1 \cdot i \qquad I_2 = D_2 \cdot i$ In generale si ha: $\mathbf{\mathcal{J}_k = D_{k-1} \cdot i}$

$$\mathbf{C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_k + \cdots\cdots + C_n = S}$$

Dalla $\mathbf{C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_k + \cdots\cdots + C_n = S}$ ricaviamo:

$$\mathbf{E_k + C_{k+1} + C_{k+2} + \cdots + C_n = S} \qquad D_k = C_{k+1} + C_{k+2} + \cdots C_s = S$$



c) Spesse volte per ammortizzare un debito S ci si serve solamente delle rate R_k senza suddividerle nei due termini delle Quote Capitali C_k, e delle Quote Interessi I_k.
In tal caso si tiene presente il principio di equilibrio finanziario dei prestiti.

In base a tale principio possiamo dire che:

<< Un debito S, contratto oggi, è AMMORTIZZATO dalle n rate annue posticipate $R_1, R_2, \dots, R_n$, quando la somma dei valori attuali di tali rate (riferite all'origine dei tempi, cioè ad oggi) risulta uguale al valore S del debito >>.

In base a tale definizione abbiamo: $S = R_1 \cdot v + R_2 \cdot v^2 + R_3 \cdot v^3 + \cdots + R_n v^n$

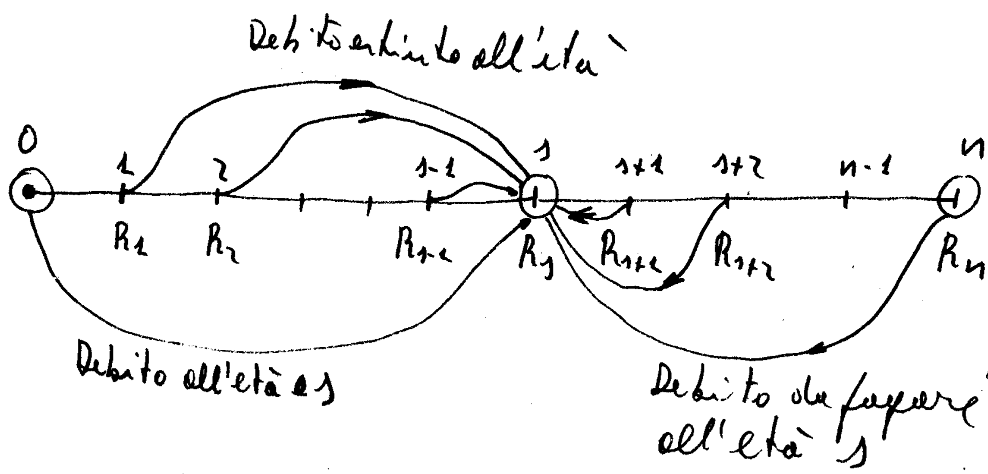
Se: $R_1 = R_2 = R_3 = \cdots\cdots = R_n = R$ si ha: $\mathbf{S} = \mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{v} + \mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^3 + \cdots\cdots + \mathbf{v}^n\right) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}_{\overline{n}|i}$ **[17°]**

relazione a noi già nota.

D_k = montante del debito S – montante delle s rate versate, cioè:

$$D_k = S \cdot u^k - \left(R_1 \cdot u^{s-1} + R_2 \cdot u^{s-2} + \cdots + R_{s-1} \cdot u + R_s\right)$$

$$D_k = R_{k+1} \cdot v + R_{k+2} \cdot v^2 + R_{k+3} \cdot v^3 + \cdots + R_n \cdot v^{n-s}$$



Piano di ammortamento

Quando un prestito viene estinto con rimborso graduale, si compila di solito un piano di ammortamento, cioè un prospetto che dimostra il progressivo rimborso del debito.

Scadenza	D_{k-1} Debito residuo inizio anno	I_k Quota interessi	C_k Quota capitale	R_k Rata annua	E_k debito estinto	D_k debito residuo
1	$D_0 = S$	I_1	C_1	R_1	E_1	D_1
2	D_1	I_2	C_2	R_2	E_2	D_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	D_{k-1}	I_k	C_k	R_k	E_k	D_k
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	D_{n-1}	I_n	C_n	R_n	E_n	D_n

Ammortamento uniforme o a quote capitali costanti

In questo tipo di ammortamento si stabilisce che il debitore rimborsi ad ogni periodo una quota sempre uguale del capitale ricevuto in prestito e che, in più, paghi gli interessi dovuti per quel periodo sul debito residuo.

E' evidente che la quota costante di capitale che deve essere versata ad ogni periodo è uguale al capitale S da rimborsare diviso per il numero n dei periodi. Mentre si effettuano i rimborsi di capitale, debito residuo diminuisce e di conseguenza anche gli interessi da corrispondere ad ogni versamento. Pertanto le rate complessive d'ammortamento risulteranno decrescenti.

Calcoliamo gli elementi essenziali di questo tipo di ammortamento. Se S è il debito da estinguere in n anni, allora la quota di capitale da versare in ciascun periodo è: $\mathbf{C = \frac{S}{n}}$

Il debito estinto E_k dopo k anni è: $E_k = k \cdot \frac{S}{n}$, il debito residuo dopo k anni è:

$$\mathbf{D_k = S - k \cdot \frac{S}{n} = S \cdot \left(\frac{n-k}{n} \right)}$$

La quota interesse I_k contenuta nella rata k è:

$$I_k = D_{k-1} \cdot i = S \cdot \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \cdot I = S \cdot i \cdot \left(\frac{n-k+1}{n} \right) = \frac{S \cdot i}{n} \cdot (n-k+1) \qquad \mathbf{\mathcal{J}_k = \frac{S \cdot i}{n} \cdot (n-k+1)}$$

$$R_k = I_k + C = S \cdot \left(\frac{n-k+1}{n} \right) + \frac{S}{n} = \frac{S}{n} \left[i \cdot (n-k+1) + 1 \right] \qquad \mathbf{R_k = S \cdot \left[\frac{1 + i \cdot (n-k+1)}{n} \right]}$$

E' opportuno sapere che le quote interessi, nei vari periodi, costituiscono una progressione aritmetica decrescente, la cui ragione negativa è: $\mathbf{-\frac{S}{n} \cdot i}$. Lo stesso dicasi per le rate.

Per i problemi inversi bisogna tenere presente le seguenti relazioni:

$$\mathbf{S = \frac{R_k \cdot n}{1 + i(n-k+1)}} \qquad \mathbf{n = \frac{S \cdot k}{E_k}} \qquad \mathbf{i = \frac{\mathcal{J}_k \cdot n}{S(n-k+1)}}$$

Prospetto tabellare per un piano di ammortamento a quote costanti di capitali per estinguere un mutuo di S € in n anni al tasso i.

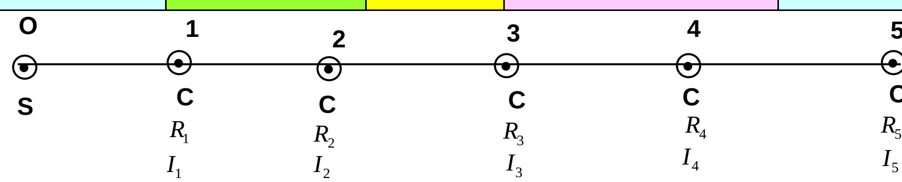
Scadenza	D_{k-1} Debito residuo inizio anno	I_k Quota interessi	C_k Quota capitale	R_k Rata annua	E_k debito estinto	D_k debito residuo
1	$D_0 = S$	$S \cdot i$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}(1+ni)$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}(n-1)$
2	$\frac{Si}{n}(n-1)$	$\frac{S}{n}(n-1)i$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}\left[1+(n-1)i\right]$	$\frac{S}{n}\cdot 2$	$\frac{S}{n}(n-2)$
3	$\frac{Si}{n}(n-2)$	$\frac{S}{n}(n-2)i$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}\left[1+(n-2)i\right]$	$\frac{S}{n}\cdot 3$	$\frac{S}{n}(n-3)$
4	$\frac{Si}{n}(n-3)$	$\frac{S}{n}(n-3)i$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}\left[1+(n-3)i\right]$	$\frac{S}{n}\cdot 4$	$\frac{S}{n}(n-4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	D_{n-1}	$\frac{Si}{n}(n-k+1)$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}\left[1+i(n-k+1)\right]$	$\frac{S}{n}\cdot k$	$\frac{S}{n}(n-k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\frac{S}{n}\cdot 2$	$\frac{Si}{n}\cdot 2$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}(1+2\cdot i)$	$\frac{S}{n}(n-1)$	$\frac{S}{n}$
n	$\frac{S}{n}$	$\frac{Si}{n}$	$\frac{S}{n}$	$\frac{S}{n}(1+i)$	S	0

Prospetto tabellare per un piano di ammortamento a quote costanti di capitali per estinguere un mutuo di S € in 10 anni al tasso i.

Scadenza	D_{k-1} Debito residuo inizio anno	I_k Quota interessi	C_k Quota capitale	R_k Rata annua	E_k debito estinto	D_k debito residuo
1	$D_0=S$	$S\cdot i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+10i)$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}\cdot 9$
2	$\frac{Si}{10}\cdot 9$	$\frac{S}{10}\cdot 9i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+9i)$	$\frac{S}{10}\cdot 2$	$\frac{S}{10}\cdot 8$
3	$\frac{Si}{10}\cdot 8$	$\frac{S}{10}\cdot 8i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+8i)$	$\frac{S}{10}\cdot 3$	$\frac{S}{10}\cdot 7$
4	$\frac{Si}{10}\cdot 7$	$\frac{S}{10}\cdot 7i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+7i)$	$\frac{S}{10}\cdot 4$	$\frac{S}{10}\cdot 6$
5	$\frac{Si}{10}\cdot 6$	$\frac{S}{10}\cdot 6i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+6i)$	$\frac{S}{10}\cdot 5$	$\frac{S}{10}\cdot 5$
6	$\frac{Si}{10}\cdot 5$	$\frac{S}{10}\cdot 5i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+5i)$	$\frac{S}{10}\cdot 6$	$\frac{S}{10}\cdot 4$
7	$\frac{Si}{10}\cdot 4$	$\frac{S}{10}\cdot 4i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+4i)$	$\frac{S}{10}\cdot 7$	$\frac{S}{10}\cdot 3$
8	$\frac{Si}{10}\cdot 3$	$\frac{S}{10}\cdot 3i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+3i)$	$\frac{S}{10}\cdot 8$	$\frac{S}{10}\cdot 2$
9	$\frac{Si}{10}\cdot 3$	$\frac{S}{10}\cdot 2i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+2i)$	$\frac{S}{10}\cdot 9$	$\frac{S}{10}$
10	$\frac{Si}{10}$	$\frac{S}{10}\cdot i$	$\frac{S}{10}$	$\frac{S}{10}(1+i)$	S	0

Prospetto tabellare per un piano di ammortamento a quote costanti di capitali per estinguere un mutuo di 1'000'000€ in 5 anni al tasso del 5% ($i=0,05$).

Scadenza	D_{k-1} Debito residuo inizio anno	I_k Quota interessi	C_k Quota capitale	R_k Rata annua	E_k debito estinto	D_k debito residuo
1	1'000'000	50'000	200'000	250'000	200'000	800'000
2	800'000	40'000	200'000	240'000	400'000	600'000
3	600'000	30'000	200'000	230'000	600'000	400'000
4	400'000	20'000	200'000	220'000	800'000	200'000
5	200'000	10'000	200'000	210'000	1'000'000	0



Posso ottenere i risultati della precedente tabella utilizzando le formule generali anno per anno.

Troviamo: Primo anno: $\mathcal{I}_1 = S \cdot i = 1'000'000 \cdot 0,05 = 50'000$ $\quad C_1 = \dfrac{S}{n} = \dfrac{1'000'000}{5} = 200'000$

$$R_1 = \frac{S}{n}(1+ni) = 200'000 \cdot (1+5 \cdot 0,05) = 200'000 \cdot 1,25 = 250'000 \quad R_1 = I_1 + C_1$$

$$E_1 = \frac{S}{n} = 200'000 \qquad D_1 = \frac{S}{n}(n-1) = 200'000 \cdot 4 = 800'000$$

Secondo anno: $\mathcal{I}_2 = \dfrac{S}{n}(n-1)i = 200'000 \cdot 4i = 200'000 \cdot 0,2 = 40'000$

$$R_2 = \frac{S}{n}\left[1+(n-1)i\right] = 200'000 \cdot [1+4i] = 200'000 \cdot 1,2 = 240'000 \qquad R_2 = I_2 + C_2$$

$$E_2 = \frac{S}{n} \cdot 2 = 200'000 \cdot 2 = 400'000 \qquad D_2 = \frac{S}{n}(n-2) = 200'000 \cdot 3 = 600'000$$

Terzo anno: $\mathcal{I}_3 = \dfrac{S}{n}(n-2)i = 200'000 \cdot 3i = 200'000 \cdot 0,15 = 30'000$

$$R_3 = \frac{S}{n}\left[1+(n-2)i\right] = 200'000 \cdot [1+3i] = 200'000 \cdot 1,15 = 230'000 \qquad R_3 = I_3 + C_3$$

$$E_3 = \frac{S}{n} \cdot 3 = 200'000 \cdot 3 = 600'000 \qquad D_3 = \frac{S}{n}(n-3) = 200'000 \cdot 2 = 400'000$$

d'accordo con i valori trovati nel piano.

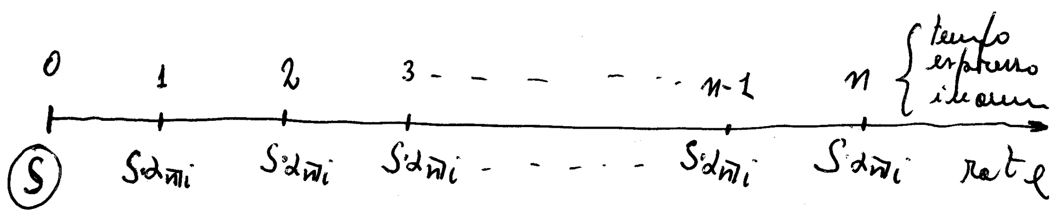
Costituzione di un capitale   Ammortamento Obbligazioni

Ammortamento progressivo o francese a rata costante

Con questo tipo di ammortamento si stabilisce che il debitore paghi alla scadenza di ciascun periodo una rata costante R comprensiva della quota capitale e degli interessi sul debito residuo. Per determinare il valore della rata annua posticipata R basta osservare che l'insieme di tali rate costituisce una rendita posticipata a termine costante. Questo ci consente di scrivere:

$$S = R \cdot a_{\overline{n}|i} \quad \text{da cui deduciamo} \quad \mathbf{R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}} = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i}}$$

Concludendo possiamo dire che per ammortizzare un debito S col metodo francese basta versare n rate costanti annue posticipate di importo $S \cdot \alpha_{\overline{n}|i}$.



Adesso vediamo come variano le quote capitali e le quote interessi per ciascun periodo. Essendo la rata $R_k = R = C_k + I_k$ è evidente che la quota interessi deve diminuire di quanto aumenta la quota capitale.

Primo anno: $I_1 = S \cdot i \qquad C_1 = R - I_1$

Secondo anno: $I_2 = (S - C_1) \cdot i = S \cdot i - C_1 \cdot i = I_1 - C_1 \cdot i \qquad C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1(1+i)$ in quanto la quota interessi deve diminuire di quanto aumenta la quota capitale

Terzo anno: $I_3 = (S - C_1 - C_2) \cdot i = (S - C_1) \cdot i - C_2 \cdot i = I_2 - C_2 \cdot i \qquad C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2 \cdot (1+i)$

C_k aumenta di quanto diminuisce I_k

Pertanto la quota capitale cresce, dall'uno all'altro periodo, di un valore corrispondente all'interesse sulla quota capitale precedente. Allora indicando con C_k la quota capitale della rata s e con C_{k-1} la quota capitale della rata precedente si ha: $C_k = C_{k-1} + C_{k-1} \cdot i$ $\qquad \mathbf{C_k = C_{k-1} \cdot (1+i)}$ $\qquad$ [ρ]

Da cui si deduce che nell'ammortamento francese le quote capitali costituiscono una progressione geometrica di ragione $1 + i$.

$$R = I_1 + C_1,\ C_1 = R - I_1,\ I_1 = S \cdot i,\ R = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i},\ C_1 = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i} - S \cdot i = S \cdot (\alpha_{\overline{n}|i} - i) = S \cdot \sigma_{\overline{n}|i},$$

$$\mathbf{C_1 = S \cdot \sigma_{\overline{n}|i} = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}}} \quad [\beta]$$

$[\sigma_{\overline{n}|i}=\dfrac{1}{\alpha_{\overline{n}|i}} \quad \alpha_{\overline{n}|i}-\sigma_{\overline{n}|i}=i \quad \alpha_{\overline{n}|i}-i=\sigma_{\overline{n}|i} \quad \mathrm{v}^n=u^{-n} \qquad u^n=\mathrm{v}^{-n} \quad u^{k-1}=\mathrm{v}^{-k+1}\ ]$

Dalla [ρ] deduciamo: $C_2=C_1(1+i) \quad C_3=C_2(1+i)=C_1(1+i)^2 \quad C_4=C_3(1+i)=C_1(1+i)^3$

$$\mathbf{C_k=C_1\cdot(1+i)^{k-1}} \qquad [\delta]$$

Confrontando la [β] e la [δ] otteniamo: $\mathbf{C_k=S\cdot\sigma_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)^{k-1}=\dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}}\cdot(1+i)^{k-1}}$ [Q]

Ricordando che $\sigma_{\overline{n}|i}=\dfrac{1}{s_{\overline{n}|i}}=\dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}\cdot u^n}=\alpha_{\overline{n}|i}\cdot\mathrm{v}^n$ possiamo scrivere:

$C_k=S\cdot\alpha_{\overline{n}|i}\cdot\mathrm{v}^n\cdot u^{k-1}=S\cdot\alpha_{\overline{n}|i}\cdot\mathrm{v}^{n-k+1} \qquad \mathbf{C_k=R\cdot v^{n-k+1}}$ [T]

Calcoliamo la formula che ci consente di calcolare il debito estinto.

$E_k=C_1+C_2+C_3+\cdots+C_k \quad E_k=\dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}}+\dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}}\cdot(1+i)+\dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}}\cdot(1+i)^2+\cdots+\dfrac{S}{s_{\overline{n}|i}}\cdot(1+i)^{k-1}$

$$\mathbf{E_k=\frac{S}{s_{\overline{n}|i}}\left[1+u+u^2+\cdots+u^{k-1}\right]=\frac{S}{s_{\overline{n}|i}}\cdot s_{\overline{k}|i}=S\cdot\sigma_{\overline{n}|i}\cdot s_{\overline{k}|i}} \quad [U]$$

Il debito residuo D_k, dopo k versamenti, è uguale al valore attuale delle $n-k$ rate posticipate che si dovranno ancora pagare. Possiamo scrivere:

$\mathbf{D_k=R\cdot a_{\overline{n-k}|i}=S\cdot\alpha_{\overline{n}|i}\cdot a_{\overline{n-k}|i}} \qquad \mathcal{J}_k=R-C_k=R-R\cdot\mathrm{v}^{n-k+1}=R\left(1-\mathrm{v}^{n-k+1}\right)$

$\mathcal{J}_k=D_{k-1}\cdot i=R\cdot a_{\overline{n-k+1}|i}\cdot i=S\cdot\alpha_{\overline{n}|i}\cdot a_{\overline{n-k+1}|i}\cdot i=S\cdot\dfrac{a_{\overline{n-k+1}|i}}{a_{\overline{n}|i}}\cdot i \qquad \mathbf{\mathcal{J}_k=S\cdot\alpha_{\overline{n}|i}\cdot a_{\overline{n-k+1}|i}\cdot i=S\cdot\dfrac{a_{\overline{n-k+1}|i}}{a_{\overline{n}|i}}\cdot i}$

Prospetto tabellare per un piano di ammortamento a progressino o francese per estinguere un mutuo di S € in n anni al tasso i.

Scadenza	R_k Rata annua	$\mathcal{J}_k$ Quota interessi	C_k Quota capitale	E_k debito estinto	D_k debito residuo
0					$D_0 = S$
1	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\vert i}} = = S \cdot \alpha_{\overline{n}\vert i}$	$S \cdot i$	$C_1 = S\sigma_{\overline{n}\vert i} = \frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}}$	$\frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}} = S \cdot \sigma_{\overline{n}\vert i}$	$S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-1}\vert i} = = S\frac{a_{\overline{n-1}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}}$
2	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\vert i}} = = S \cdot \alpha_{\overline{n}\vert i}$	$S\frac{a_{\overline{n-1}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}} i$ $S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-1}\vert i} i$	$S\sigma_{\overline{n}\vert i}(1+i) = = \frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}}(1+i)$	$S\frac{s_{\overline{2}\vert i}}{s_{\overline{n}\vert i}} = S\sigma_{\overline{n}\vert i} s_{\overline{2}\vert i}$	$S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-2}\vert i} = = S\frac{a_{\overline{n-2}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}}$
3	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\vert i}} = = S \cdot \alpha_{\overline{n}\vert i}$	$S\frac{a_{\overline{n-2}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}} i$ $S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-2}\vert i} i$	$S\sigma_{\overline{n}\vert i}(1+i)^2 = = \frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}}(1+i)^2$	$S\frac{s_{\overline{3}\vert i}}{s_{\overline{n}\vert i}} = S\sigma_{\overline{n}\vert i} s_{\overline{3}\vert i}$	$S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-3}\vert i} = = S\frac{a_{\overline{n-3}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}}$
4	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\vert i}} = = S \cdot \alpha_{\overline{n}\vert i}$	$S\frac{a_{\overline{n-3}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}} i$ $S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-3}\vert i} i$	$S\sigma_{\overline{n}\vert i}(1+i)^3 = = \frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}}(1+i)^3$	$S\frac{s_{\overline{4}\vert i}}{s_{\overline{n}\vert i}} = S\sigma_{\overline{n}\vert i} s_{4i}$	$S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-4}\vert i} = = S\frac{a_{\overline{n-4}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\vert i}} = = S \cdot \alpha_{\overline{n}\vert i}$	$S\frac{a_{\overline{n-k+1}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}} i$	$S\sigma_{\overline{n}\vert i}(1+i)^{k-1} = = \frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}}(1+i)^{k-1}$	$S \cdot \frac{s_{\overline{k}\vert i}}{s_{\overline{n}\vert i}} = S \cdot \sigma_{\overline{n}\vert i} s_{\overline{k}\vert i}$	$S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{n-k}\vert i} = = S\frac{a_{\overline{n-k}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\vert i}} = = S \cdot \alpha_{\overline{n}\vert i}$	$S\frac{a_{\overline{2}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}} i$ $S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{2}\vert i} i$	$S\sigma_{\overline{n}\vert i}(1+i)^{n-2} = = \frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}}(1+i)^{n-2}$	$S\frac{s_{\overline{n-1}\vert i}}{s_{\overline{n}\vert i}} = S\sigma_{\overline{n}\vert i} s_{\overline{n-1}\vert i}$	$S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{1}\vert i} = = S\frac{a_{\overline{1}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}}$
n	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\vert i}} = = S \cdot \alpha_{\overline{n}\vert i}$	$S\frac{a_{\overline{1}\vert i}}{a_{\overline{n}\vert i}} i$ $S\alpha_{\overline{n}\vert i} a_{\overline{1}\vert i} i$	$S\sigma_{\overline{n}\vert i}(1+i)^{n-1} = = \frac{S}{s_{\overline{n}\vert i}}(1+i)^{n-1}$	S	0

Costituzione di un capitale   Ammortamento Obbligazioni

Piano di ammortamento francese di un prestito di S lire, al tasso i e della durata di n anni

Metodo pratico per il calcolo di un tale piano di ammortamento

1) Si calcola la rata R utilizzando la formula: $\mathbf{R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}} = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i}}$

Primo anno

2) Poi si calcola I_1 utilizzando la formula: $\mathcal{I}_1 = S \cdot i$

3) Poi si calcola C_1 utilizzando la formula: $C_1 = R - \mathcal{I}_1$ Risulta: $E_1 = C_1$ $D_1 = S - E_1$

Secondo anno

4) $\mathbf{R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}} = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i}}$ $\mathcal{I}_2 = D_1 \cdot i$ $C_2 = R - \mathcal{I}_2$ $E_2 = E_1 + C_2$ $D_2 = S - E_2$

Alla stessa maniera si procede per gli anni successivi.

Piano di ammortamento di un prestito di **1000000 €** al tasso del 4% e della durata di 5 anni

s	D_{s-1}	R	I_s	C_s	E_s	D_s
1	1'000'000	224'627,11	40'000	184'627,11	184'627,11	815'372,89
2	815'372,89	224'627,11	32'614,91	192'012,20	376'639,31	623'360,69
3	623'360,69	224'627,11	24'934,42	199'692,69	576'332	423'668
4	423'668	224'627,11	16'946,72	207'680,39	784'012,39	215'897,61
5	215'897,61	224'627,11	8'639,5	215'587,61	1'000'000	—

Primo anno $R = 224 \cdot 627{,}11$

$$R = 1'000'000 \cdot \alpha_{\overline{5}|0,04} = 1'000'000 \cdot 0{,}22462711 = 224627{,}11$$

$$I_1 = S \cdot i = 1'000'000 \times \frac{4}{100} = 40'000$$

$$C_1 = R - I_1 = 224627{,}11 - 40'000 = 184'627{,}11$$

$$E_1 = C_1 = 184'627{,}11$$

$$D_1 = S - E_1 = 1'000'000 - 184'627{,}11 = 815'372{,}89$$

Secondo anno $R = 224 \cdot 627{,}11$

$$I_2 = D_1 \cdot i = 815'372{,}89 \times \frac{4}{100} = 32'614{,}9156$$

$$C_2 = R - I_2 = 224'627{,}11 - 32'614{,}91 = 192'012{,}20$$

$$E_2 = E_1 + C_2 = 184'627{,}11 + 192'012{,}20 = 376'639{,}31$$

$$D_2 = S - E_2 = 1'000'000 - 376'639{,}31 = 623'360{,}69$$

Terzo anno $R = 224 \cdot 627{,}11$

$$I_3 = D_2 \cdot i = 623'360 \cdot \frac{4}{100} = 24'934{,}4276$$

$$C_3 = R - I_3 = 224'627{,}11 - 24'934{,}42 = 199'692{,}69$$

$$E_3 = E_2 + C_3 = 376'639{,}31 + 199'692{,}69 = 576{,}332$$

$$D_3 = S - E_3 = 1'000'000 - 576'332 = 423'668$$

Quarto anno $R = 224 \cdot 627{,}11$

$$I_4 = D_3 \cdot i = 423'668 \times \frac{4}{100} = 16'946{,}72$$

$$C_4 = R - I_4 = 224'627,11 - 16'946,72 = 207'680,39$$

$$E_4 = E_3 + C_4 = 576'332 + 207'680,39 = 784'012,39$$

$$D_4 = S - E_4 = 1'000'000 - 784'012,59 = 215'987,61$$

Quinto anno $R = 224 \cdot 627{,}11$

$$I_5 = D_4 \cdot i = 215'987,61 \cdot \frac{4}{100} = 8'639,5044$$

$$C_5 = R - I_5 = 224'627,11 - 8639,50 = 215'987,61$$

$$E_5 = E_4 + C_5 = 784'012,39 + 215'987,61 = 1'000'000$$

$$D_5 = S - E_5 = 0$$

Ammortamento Uniforme o a quote costanti di capitale	
Quota interessi	$D_{k-1} \cdot i = \frac{Si}{n}(n-k+1)$
Quota capitale	$C = \frac{S}{n}$
Rata	$R_k = \frac{S}{n} \cdot \left[1 + (n-k+1) \cdot i\right]$
Debito estinto	$E_k = \frac{S}{n} \cdot k$
Debito residuo	$D_k = \frac{S}{n} \cdot (n-k)$
Nuda proprietà	$N_k = \frac{S}{n} \cdot a_{\overline{n-k}\rceil i_1}$
Usufrutto	$U_k = \frac{S}{n} \cdot \frac{i}{i_1} \cdot \left(n - k - a_{\overline{n-k}\rceil i_1}\right)$
Valore del prestito	$V_k = N_k + U_k$

Ammortamento progressivo o francese	
Rata	$R = \frac{S}{a_{\overline{n}\rvert i}} = S \cdot \alpha_{\overline{n}\rvert i}$
Quota interessi	$I_k = S \cdot \frac{a_{\overline{n-k+1}\rvert i}}{a_{\overline{n}\rvert i}} \cdot i = D_{k-1} \cdot i$
Quota capitale	$C_k = S \cdot \sigma_{\overline{n}\rvert i} \cdot (1+i)^{k-1} = \frac{S}{s_{\overline{n}\rvert i}} \cdot (1+i)^{k-1}$
Debito estinto	$E_k = S \cdot \frac{s_{\overline{k}\rvert i}}{s_{\overline{n}\rvert i}} = S \cdot \sigma_{\overline{n}\rvert i} \cdot s_{\overline{k}\rvert i}$
Debito residuo	$D_k = S \cdot \alpha_{\overline{n}\rvert i} \cdot a_{\overline{n-k}\rvert i} = S \cdot \frac{a_{\overline{n-k}\rvert i}}{a_{\overline{n}\rvert i}} = S - E_k$
Nuda proprietà	$N_k = R \cdot \frac{i \cdot a_{\overline{n-k}\rvert i} - i_1 \cdot a_{\overline{n-k}\rvert i_1}}{i - i_1}$
Usufrutto	$U_k = V_k - N_k$
Valore del prestito	$V_k = R \cdot \frac{a_{\overline{n-k}\rvert i_1}}{a_{\overline{n}\rvert i}}$

Valutazione di un prestito: prezzo d'acquisto, nuda proprietà, usufrutto.

Dicesi VALORE o Prezzo di Acquisto o CORSO di un prestito (in un dato istante compreso fra l'inizio ed il termine della durata dell'ammortamento) la somma dei valori attuali delle prestazioni future del debitore (rate rimaste da pagare) calcolati a quell'istante e secondo un determinato tasso i, detto TASSO-DI-VALUTAZIONE.

Talvolta si richiede di valutare separatamente le quote capitale e le quote interessi non ancora scadute.

Il valore attuale di tutte le quote capitali che ancora debbono essere rimborsate prende il nome di NUDA-PROPRIETA' o valore netto del prezzo.

Il valore attuale di tutte le quote interessi che ancora debbono essere corrisposte al creditore del prestito prende il nome di USUFRUTTO o godimento del prestito.

Possiamo concludere dicendo che il Valore d'acquisto, la Nuda Proprietà e l'Usufrutto di un prestito, ad un determinato ~~tasso~~ istante (compreso tra l'inizio e la scadenza dell'operazione finanziaria) ad un dato tasso, sono determinati dai valori attuali (a quell'istante ed a quel tasso) delle rendite costituite rispettivamente dalle Rate, dalle Quote-capitale, e dalle Quote-Interessi, non ancora scadute.

$$\begin{cases} A_s^{(i_2)} = \text{Nuda Proprietà} \\ U_s^{(i_2)} = \text{Usufrutto} \\ V_s^{(i_2)} = \text{Valore del prestito} \end{cases}$$

$R_s = C_s + I_s$ da cui

$$\boxed{V_s^{(i_2)} = A_s^{(i_2)} + U_s^{(i_2)} \qquad [38]}$$

Se $i \equiv i_1$ $\quad V_1 = D_1$ $\quad$ [39]

Valutazione di un prestito con ammortamento progressivo

PREZZO - D'ACQUISTO

$$V_1^{(i_1)} = R \cdot a_{\overline{n-1}|i_1} \quad ; \quad R = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i}$$

$$V_1^{(i_1)} = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i} \cdot a_{\overline{n-1}|i_1} = S \cdot \frac{a_{\overline{n-1}|i_1}}{a_{\overline{n}|i}} \qquad [40]$$

se $i \equiv i_1$ $\quad V_1 \equiv D_1$

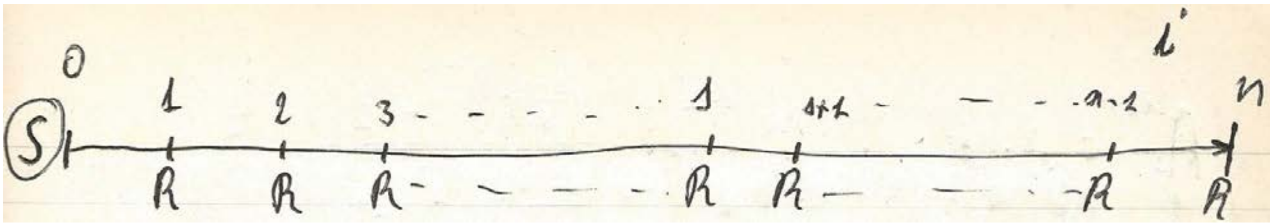
se $i \neq i_1$ $\quad V_1^{(i_1)}$ sarà tanto minore quanto maggiore sarà il tasso di valutazione i_1.

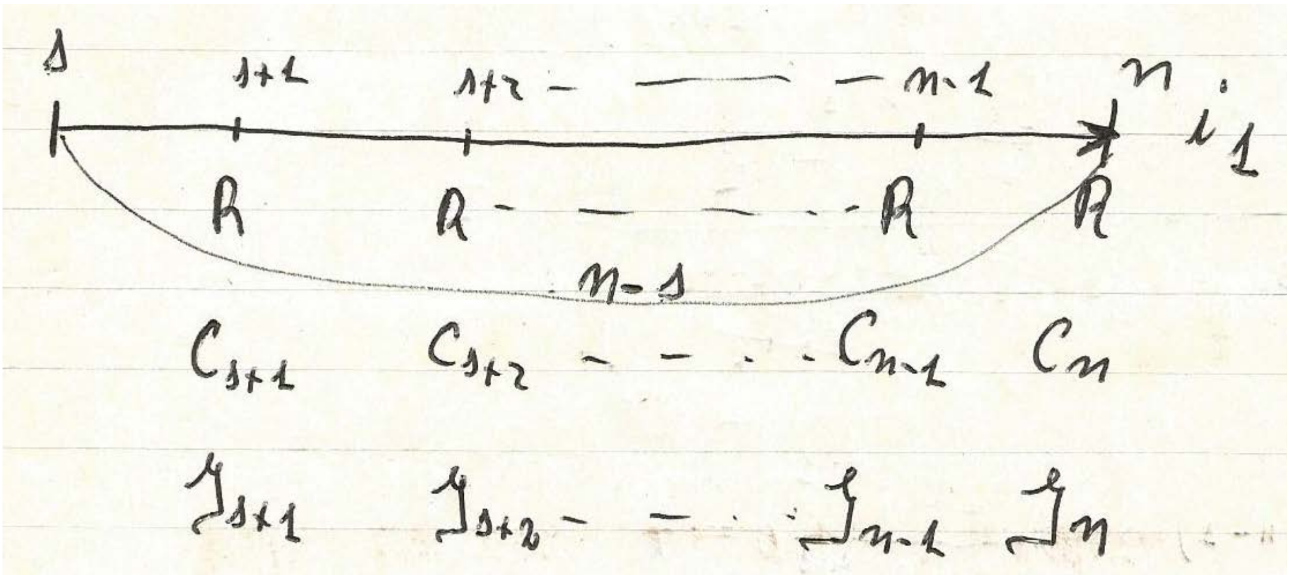
NUDA - PROPRIETÀ

$$\boxed{A_1^{(i_1)} = C_{1+1} \cdot v_1 + C_{1+2} \cdot v_1^{2} + \cdots + C_n \cdot v_1^{n-1}}$$

ma le quote-capitale nell'ammortamento francese sono in progressione geometrica di ragione $(1+i)$, per cui:

$$C_{s+1} = C_s\cdot(1+i),\quad C_{s+2} = C_s\cdot(1+i)^2;\ \dots;\ C_n = C_s\cdot(1+i)^{n-s}$$





$$A_0^{(i_1)} = \left(\frac{1+i}{1+i_1}\right)C_s + \left(\frac{1+i}{1+i_1}\right)^2\cdot C_s + \dots + \left(\frac{1+i}{1+i_1}\right)^{n-s}\cdot C_s \qquad [40a]$$

Gli n-s addendi a secondo membro costituiscono una progressione geometrica di ragione

$q = \dfrac{1+i}{1+i_1}$ e di primo termine

$$a_1 = C_s\cdot\frac{1+i}{1+i_1} = S\cdot\sigma_{\overline{n}|i}\cdot(1+i)^{s-1}\cdot\frac{1+i}{1+i_1}$$

poichè : $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, si ha :

$$A_s^{(i_1)} = S \cdot \frac{1+i}{1+i_1} \cdot \frac{(1+i)^{s-1}}{s_{\overline{n}|i}} \cdot \frac{\left(\frac{1+i}{1+i_1}\right)^{n-s} - 1}{\frac{1+i}{1+i_1} - 1} =$$

$$= S \cdot \frac{(1+i)^s}{(1+i)^n \cdot a_{\overline{n}|i}} \cdot \frac{\left(\frac{1+i}{1+i_1}\right)^{n-s} - 1}{\cancel{(1+i_1)}\left(\frac{1+i-1-i_1}{\cancel{1+i_1}}\right)} =$$

$$= \frac{S}{a_{\overline{n}|i}} \cdot (1+i)^{-(n-s)} \cdot \frac{\frac{(1+i)^{n-s}}{(1+i_1)^{n-s}} - 1}{i - i_1} =$$

$$= R \cdot \frac{(1+i_1)^{-(n-s)} - (1+i)^{-(n-s)}}{i - i_1}$$

$$A_s^{(i_1)} = R \cdot \frac{v_1^{(n-s)} - v^{(n-s)}}{i - i_1} \qquad [41]$$

La [41] può assumere un aspetto formale più semplice:

$$v^{n-1} - v_1^{n-1} = (1 - v_1^{n-1}) - (1 - v^{n-1}) =$$

$$= \left(i_1 \cdot \frac{1 - v_1^{n-1}}{i_1} \right) - \left(i \cdot \frac{1 - v^{n-1}}{i} \right) = i_1 \cdot a_{\overline{n-1}|i_1} - i\, a_{\overline{n-1}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n$$

$$A_1^{(i_1)} = R \cdot \frac{i_1 \cdot a_{\overline{n-1}|i_1} - i \cdot a_{\overline{n-1}|i}}{i_1 - i} \qquad [42]$$

Se $i = i_1$ le formule [41], [42] perdono di significato in quanto assumono la forma indeterminata 0/0.
In tal caso il valore di V_1 si ricava dalla [40 a]:

$$A_1 = (n-1) \cdot C_1 = (n-1) \cdot S \cdot \sigma_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^{s-1} \qquad [43]$$

USUFRUTTO

Dalla [38] si ricava:

$$U_1^{(i_1)} = V_1^{(i_1)} - A_1^{(i_1)} =$$

$$= R \cdot a_{\overline{n-1}|i_1} - R \cdot \frac{i_1 \cdot a_{\overline{n-1}|i_1} - i \cdot a_{\overline{n-1}|i}}{i_1 - i} =$$

$$= R \left(\frac{i_1 \cdot \cancel{a_{\overline{n-1}|i_1}} - i \cdot a_{\overline{n-1}|i_1} - i_1 \cdot \cancel{a_{\overline{n-1}|i_1}} + i \cdot a_{\overline{n-1}|i}}{i_1 - i} \right)$$

$$W_s^{(i_1)} = Ri \cdot \frac{a_{\overline{n-s}|i} - a_{\overline{n-s}|i_1}}{i_1 - i} \qquad [44]$$

Prestiti divisi in obbligazioni

1) Generalità

I prestiti di forte entità contratti da un ente pubblico o da grandi società non possono essere forniti da una sola persona o da un solo istituto di credito.

In tale caso il prestito viene suddiviso in parti tutte uguali fra loro ed offerto alla pubblica sottoscrizione: così più persone diventano PRESTATORI.

Si dice allora che il prestito viene DIVISO-IN-TITOLI.

Tutti i titoli sono di uguale valore cioè di uguale TAGLIO.

Per ogni somma sottoscritta viene rilasciato al sottoscrittore un certificato che, in generale, è un TITOLO-DI-CREDITO.

I titoli di credito si suddividono in:

1°) BUONI-DEL-TESORO i quali sono emessi dallo stato e sono rimborsabili a scadenza fissa: possono essere annuali, semestrali, trimestrali, oppure quinquennali, novennali, ecc.

Nei primi il pagamento dell'interesse è anticipato e nei secondi è semestrale posticipato

2°) OBBLIGAZIONI che sono quei titoli in cui il pagamento dell'interesse è periodico ed il rimborso del capitale avviene per estrazione a sorte secondo un piano prestabilito

3°) AZIONI che sono emesse dalle società e si distinguono dalle: obbligazioni perchè non sono a reddito fisso ma variabile inquanto danno diritto ad una parte nella suddivisione degli utili.

4°) TITOLI-DI-RENDITA che sono generalmente emessi dallo stato e sono quelli che non comportano il rimborso del capitale ma solo il pagamento periodico dell'interesse.

Tali prestiti si dicono IRREDIMIBILI o CONSOLIDATI.
I prestiti in cui avviene il rimborso dei capitali si dicono REDIMIBILI.

Nel seguito noi ci occuperemo solo di prestiti divisi in obbligazioni.

In ogni obbligazione è indicato il valore che essa rappresenta detto VALORE-NOMINALE, sul quale viene corrisposto l'interesse ad un tasso i detto TASSO-NOMINALE.

Si chiama VALORE-DI-EMISSIONE il valore del titolo al momento del lancio e sottoscrizione del prestito;

VALORE-DI-RIMBORSO il valore al tempo dell'estrazione;

VALORE-DI-BORSA o CORSO il valore assunto ad un dato tempo per le variazioni del mercato finanziario.

Il valore di una obbligazione si dice ALLA-PARI, SOPRA-LA-PARI, SOTTO-LA-PARI, secondo che è $\gtreqless$ di quello nominale.

Ordinariamente il valore di emissione è alla pari o sotto la pari, quello di rimborso è alla pari o sopra la pari.

Le obbligazioni possono essere di uguale taglio cioè dello stesso valore nominale o di diverso taglio.

$N_1 \cancel{C} = N \cancel{C}\, \sigma_{\overline{n}|i}$; $N_1 = N\cdot \sigma_{\overline{n}|i}$

$\boxed{\cancel{C_K = N_K \cdot C}}$ $\boxed{E_K = N_K^{(e)} \cdot C}$ $\boxed{D_K = N_K^{(v)} \cdot C}$

$\boxed{R = S \cdot \alpha_{\overline{n}|i} = NC \cdot \alpha_{\overline{n}|i}}$ $\boxed{N_K = N_{K-1}(1+i)}$ $\boxed{N_1 = N\cdot \sigma_{\overline{n}|i}}$

Praticamente il piano di ammortamento si effettua nel seguente modo:

Primo anno

Il debito da estinguere è $S = NC$; si calcola la rata teorica: $R = N\cdot C\cdot \alpha_{\overline{n}|i}$

poi la quota interessi $I_1 = CN\cdot i$, poi la quota capitale $C_1 = R - I_1$, poi $N_1 = \frac{C_1}{C}$ che si approssima per difetto a meno di 1.
Rata effettivamente pagata $R_1 = N_1 C + CNi$;
$N_1^{(e)} = N_1$; $N_1^{(v)} = N - N_1$ —
$\rho_1 = R - R_1$ = residuo che viene capitalizzato

Secondo anno

La rata disponibile diventa: $R + \rho_1(1+i) = R^*$
$I_2 = C\cdot N_1^{(v)}\cdot i$; $C_2 = R^* - I_2$; $N_2 = \frac{C_2}{C}$

0	1	2	3 ...	k ...	...	$n-1$	n
N	N_1	N_2	N_3 ...	N_k ...	...	N_{n-1}	N_n
$S=N\cdot C$	I_1	I_2	I_3 ...	I_k ...	...	I_{n-1}	I_n
	C_1	C_2	C_3 ...	C_k ...	...	C_{n-1}	C_n

Arrotondamento della quota capitale disponibile per il rimborso di obbligazioni:

Con le rate R si pagano, in ciascun periodo, gli interessi sul debito non ancora estinto (ossia sulle obbligazioni viventi) e poi, con la quota capitale si rimborsa un certo numero di obbligazioni estratte a sorte.

Però la quota capitale disponibile in ciascun periodo non corrisponde esattamente ad un multiplo del loro valore nominale; e poichè si deve necessariamente rimborsare un numero intero di obbligazioni, occorre trasferire (dall'uno all'altro periodo) piccole frazioni delle quote capitale onde operare gli opportuni aggiustamenti.
Ciò si può fare in tre modi:

1°) Metodo degli arrotondamenti:

La quota capitale viene arrotondata per difetto o per eccesso ad un multiplo del valore nominale delle obbligazioni secondo che il suo importo risulti più prossimo al multiplo inferiore od a quello superiore.
Infatti i numeri $N_1, N_2, \dots N_n$ delle obbligazioni da sorteggiare alla fine di ciascun anno risultano, in generale decimali.
Prenderemo i valori di N_k approssimati all'unità (per difetto o per eccesso a seconda che la parte decimale di N_k sia $\leq 0,5$) in modo che sia soddisfatta la condizione:

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = N$$

Il prodotto $N_k \cdot C = C_k$ dà l'ammontare delle obbligazioni che si rimborsano alla fine dell'anno k.

Esempio

Piano di ammortamento d'un prestito di 10'000 obbligazioni da £ 1000 ciascuna al tasso 0,05 rimborsabili alla pari in 5 anni, mediante sorteggio.

$$N_k = N_1 \cdot (1+i)^{k-1} = N_{k-1} \cdot (1+i)$$

	N_k teorici	N_k effettivi
$N_1 = N \cdot \sigma_{\overline{5}\mid i} = 10^4 \cdot 0,180975 =$	1809,75	1810
$N_2 = 1809,75 \times 1,05 =$	1900,24	1900
$N_3 = 1900,24 \times 1,05 =$	1995,25	1995
$N_4 = 1995,25 \times 1,05 =$	2095,01	2095
$N_5 = 2095,01 \times 1,05 =$	2199,76	2200
		$N = 10'000$

$$C_k = N_k \cdot C$$

$$\begin{cases} C_1 = N_1 C = 1810 \cdot 10^3 = 1'810'000 \\ C_2 = N_2 C = 1900 \cdot 10^3 = 1'900'000 \\ C_3 = N_3 C = 1995 \cdot 10^3 = 1'995'000 \\ C_4 = N_4 C = 2095 \cdot 10^3 = 2'095'000 \\ C_5 = N_5 C = 2200 \cdot 10^3 = 2'200'000 \end{cases}$$

$$S = 10'000'000$$

$N_0^{(v)} = 10'000$ $\qquad S = D_0 = N_0^{(v)} \cdot C = 10'000'000$

$N_1^{(v)} = N_0^{(v)} - N_1 = 8190$ $\qquad D_1 = N_1^{(v)} \cdot C = 8'190'000$

$N_2^{(v)} = N_1^{(v)} - N_2 = 6290$ $\qquad D_2 = N_2^{(v)} C = 6'290'000$