Unità Didattica N°2 Le funzioni

01) Prime proprietà sugli insiemi numerici.

02) Insieme finito, infinito, numerabile, discreto, denso, continuo.....

03) Insiemi equipotenti, insiemi separati, insiemi contigui.

04) Punto di accumulazione di un insieme.

05) Definizione di applicazione o funzione o mappa

06) Classificazione delle funzioni numeriche

07) Estremi di una funzione, funzioni limitate

08) La determinazione del dominio di una funzione numerica.

09) Il grafico di una funzione numerica

10) Funzioni monotone

11) Le funzioni pari e dispari e la simmetria rispetto agli assi cartesiani

12) Funzione inversa.

13) Funzione composta.

14) Funzione convessa

Prime proprietà sugli insiemi numerici

● Dicesi **insieme numerico** un qualsiasi insieme i cui elementi sono numeri. Quando parliamo di insiemi numerici senza specificare nulla intendiamo riferirci o all'insieme R o ad un suo sottoinsieme.

● Il numero $\alpha \in R$ è un **minorante** dell'insieme numerico $X = \{x\}$ se risulta: $\alpha \leq x \quad \forall x \in X$

Il più grande dei minoranti α dell'insieme numerico X si dice **estremo inferiore** dell'insieme X. Esso viene indicato con uno dei seguenti simboli: $e = \inf X$ = **estremo inferiore** dell'insieme **X**

Se l'estremo inferiore appartiene ad **X** allora prende il nome di **minimo** dell'insieme **X**.

$$\mathbf{m = \min X} = \textbf{ minimo } \text{dell'insieme } \mathbf{X}$$

Il numero $\beta \in R$ è un **maggiorante** dell'insieme **X** se risulta: $\beta \geq x \quad \forall x \in X$ Il più piccolo dei maggioranti β dell'insieme **X** dicesi **estremo superiore** dell'insieme X. Esso viene indicato con uno dei seguenti simboli: $\mathbf{E = \sup X}$ = **estremo superiore** dell'insieme **X**

Se l'estremo superiore appartiene ad **X** allora prende il nome di **massimo** dell'insieme **X**.

$$\mathbf{M = \max X} = \textbf{ massimo } \text{dell'insieme } \mathbf{X}$$

Se risulta $\mathbf{E = \sup X = +\infty}$ $(\mathbf{e = \inf X = -\infty})$ allora l'insieme **X** è detto **illimitato superiormente** (**inferiormente**). Un insieme numerico **X** è **illimitato superiormente** se risulta: $\mathbf{x > \beta \quad \forall \beta \in R}$. Questo significa che un insieme illimitato superiormente è privo di maggioranti. Un insieme numerico **X** è **illimitato inferiormente** se risulta: $\mathbf{x < \alpha \quad \forall \alpha \in R}$. Questo significa che un **illimitato inferiormente** è privo di minoranti.

Insieme finito, infinito, numerabile, discreto, denso, continuo

● Si dice che due insiemi A e B si **corrispondono biunivocamente** oppure che sono tra loro in **corrispondenza biunivoca**, oppure che tra i loro elementi intercede una *corrispondenza biunivoca* quando ad ogni elemento $a \in A$ si può associare un unico elemento $b \in B$ e viceversa ad ogni elemento $b \in B$ si può associare un unico elemento $a \in A$.

● Un insieme si dice **FINITO** quando non può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio

● Un insieme si dice **INFINITO** quando può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio

● Un insieme si dice NUMERABILE quando i suoi elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'insieme N.

● Un insieme di dice DISCRETO quando è costituito da un numero finito di elementi o quando è numerabile.

● Un insieme si dice DENSO se tra due suoi elementi distinti è sempre compreso almeno un altro elemento dell'insieme. L'insieme dei numeri naturali non è un insieme denso in quanto tra due suoi elementi consecutivi (ad esempio tra i numeri 7 e 8) non è compreso alcun altro elemento di N. L'insieme dei numeri decimali è un insieme denso in quanto tra due suoi elementi (ad esempio i numeri **2,5** e **2,6**) sono compresi infiniti numeri decimali.

● Un insieme si dice CONTINUO quando è denso ed i suoi elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'insieme R.

Insiemi equipotenti, separati, contigui

● Due insiemi si dicono EQUIPOTENTI o che hanno la STESSA POTENZA quando tra i loro elementi intercede una corrispondenza biunivoca.

La potenza dell'insieme **N** è detta potenza del numerabile, la potenza dell'insieme **R** è detta potenza del continuo.

● Due insiemi **X** ed **Y** si dicono SEPARATI quando ogni elemento di **X** è minore di ciascun elemento di **Y** .

I seguenti insiemi sono separati: $X = \{-8,-5,0,2,3\}$ $Y = \{7,9,12,15\}$

● Due insiemi **X** ed **Y** si dicono CONTIGUI quando godono delle due seguenti proprietà:

1) i due insiemi sono separati

2) scelto un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere) è possibile determinare almeno un elemento $y \in Y$ ed un elemento $x \in X$ la cui differenza sia minore di ε, cioè: $y - x < \varepsilon$

I due seguenti insiemi sono contigui: $X = \{ x : x > 3 \}$ $Y = \{ y : y < 3 \}$

Due insiemi numerici contigui **X** ed **Y** ammettono un unico elemento di separazione, cioè esiste un solo numero **μ** maggiore di ogni elemento di **X** e minore di ogni elemento di **Y** .

Il numero **3** è l'elemento di separazione degli insiemi **X** ed **Y** precedentemente considerati.

Punto di accumulazione di un insieme

- Si dice che x_o (appartenente o non appartenente ad $\mathbf{X}$) è un punto di accumulazione per l'insieme $X \subseteq R$, se in ogni intorno $\mathcal{J}(x_o)$ del punto x_o cade almeno un punto $x \in X$ distinto da x_o. La definizione di punto di accumulazione traduce in forma rigorosa il fatto intuitivo che esistono punti di $\mathbf{X}$ distinti da x_o ma prossimi ad x_o quanto si vuole. Se x_o è punto di accumulazione per l'insieme $\mathbf{X}$, allora in ogni intorno del punto x_o cadono infiniti punti dell'insieme $\mathbf{X}$. Se il punto di accumulazione traduce l'idea intuitiva che esistono punti di $\mathbf{X}$ prossimi ad x_o quanto si vuole, allora dire che ∞ è punto di accumulazione per l'insieme $\mathbf{X}$ significa affermare che esistono elementi di $\mathbf{X}$ in valore assoluto grandi quanto si vuole.

Definizione di funzione univoca

Dati due insiemi non vuoti $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ (eventualmente coincidenti) definiamo funzione univoca di $\mathbf{A}$ verso $\mathbf{B}$ (o mappa o applicazione di $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$) una legge $\mathbf{f}$,di natura qualsivoglia, che ad ogni elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ associa un solo elemento $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{B}$. In simboli abbiamo:

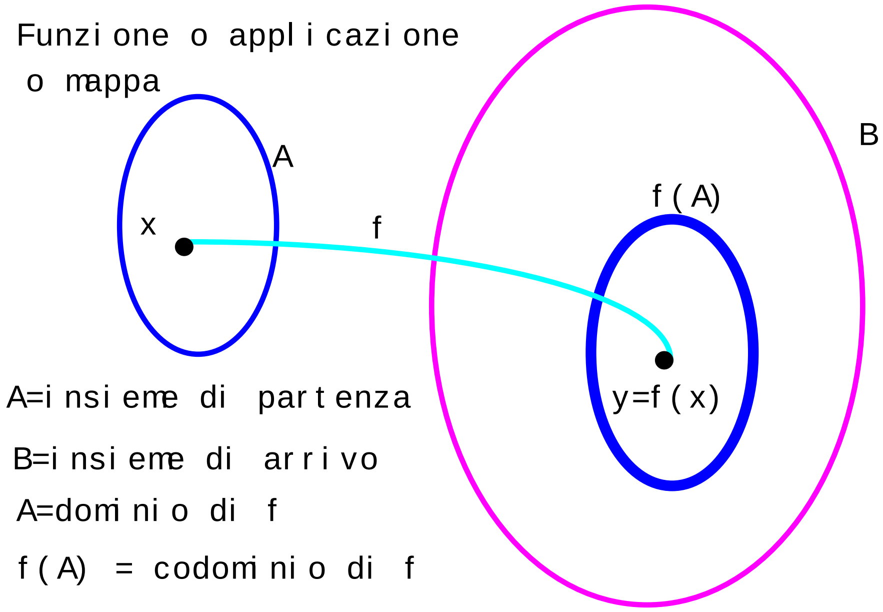
$\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B} : \mathbf{x} \in \mathbf{A} \to \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in \mathbf{B}$ e leggiamo: <<**$\mathbf{f}$ di $\mathbf{A}$ verso $\mathbf{B}$ che associa ad ogni elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ un solo elemento $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{B}$**>> oppure, più semplicemente, $\mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f}$ che porta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{f}(\mathbf{x})$) oppure $\mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{y}$ ($\mathbf{f}$ che porta $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$). $\mathbf{A}$ è detto insieme di partenza $\mathbf{B}$ è detto insieme di arrivo**.** L'elemento $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{B}$ si chiama valore di $\mathbf{x}$ in $\mathbf{f}$ o immagine di $\mathbf{x}$ tramite $\mathbf{f}$ o corrispondente di $\mathbf{x}$ in $\mathbf{f}$. L'insieme $\mathbf{A}$ è detto dominio della funzione $\mathbf{f}$ o insieme di definizione o insieme di esistenza) e può essere indicato con uno dei seguenti simboli: $\mathbf{dom f}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D_f}$, $\mathbf{C_{es}}$, $\mathbf{E}$, $\mathcal{J}$. L'insieme delle immagini prende il nome di codominio della funzione $\mathbf{f}$ e può essere indicato con uno dei seguenti simboli:

$\mathbf{codom f}$, $\mathbf{C_f}$, $\mathbf{f(A)}$ In generale risulta: $\mathbf{f(A)} \subseteq \mathbf{B}$

L'insieme $\mathbf{G}$ formato dalle coppie ordinate $(\mathbf{x,y}) \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ tale che risulti:

$$\mathbf{G} = \{(\mathbf{x,y}) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \wedge \mathbf{f} : \mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

prende il nome di grafico della funzione $\mathbf{f}$ e si indica col seguente simbolo: $\mathbf{G(f)} = \mathbf{G_f}$.



Il generico elemento $\mathbf{x}$ dell'insieme A prende il nome di variabile indipendente della funzione $\mathbf{f}$. Il corrispondente valore $\mathbf{y=f(x)\in B}$, che rappresenta l'immagine di $\mathbf{x}$ tramite $\mathbf{f}$, è detto anche variabile dipendente. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono insiemi numerici, $\mathbf{f}$ è detta funzione numerica. Se $\mathbf{f}$ è data mediante una formula analitica, allora il simbolo $\mathbf{f}$ rappresenta il complesso delle operazioni che bisogna eseguire sulla $\mathbf{x}$ per ottenere la corrispondente immagine $\mathbf{f(x)=y}$. In questo caso per dire che $\mathbf{f}$ è una funzione è tollerata la scrittura $\mathbf{y=f(x)}$, che è concettualmente errata in quanto essa rappresenta l'equazione cartesiana del grafico della funzione $\mathbf{f}$, cioè della curva descritta dal punto $\mathbf{P(x,f(x))}$ con $\mathbf{x\in dom f}$ e $\mathbf{f(x)\in codom f}$.

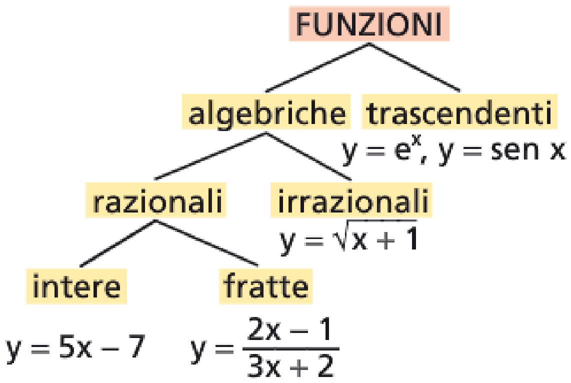
Dicesi dominio della funzione numerica $\mathbf{f:x\to f(x)}$ l'insieme dei valori numerici che bisogna attribuire alla $\mathbf{x}$ perché le corrispondenti immagini siano reali e finite. Le scritture $\mathbf{f}$, $\mathbf{f(x)}$, $\mathbf{y=f(x)}$ rappresentano, rispettivamente, una funzione, l'immagine dell'elemento $\mathbf{x}$ tramite f, l'equazione cartesiana del grafico di $\mathbf{f}$. Per questo motivo si parla spesso, anche se impropriamente, di funzione $\mathbf{f(x)}$ o di funzione $\mathbf{y=f(x)}$ al posto di funzione $\mathbf{f}$.

Per le funzioni numeriche abbiamo detto che il simbolo $\mathbf{f}$ riassume il complesso delle operazioni da eseguire sulla variabile indipendente $\mathbf{x}$ per ottenere l'immagine $\mathbf{f(x)}$.

Le operazioni da eseguire sulla x possono essere algebriche o trascendenti. Sono operazioni algebriche le operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) e le operazioni irrazionali (estrazione di radice), sono operazioni trascendenti quelle non algebriche che introducono algoritmi più complessi. Una funzione dicesi algebrica quando la variabile indipendente è assoggettata, ad operazioni algebriche, in caso contrario dicesi trascendente.

Le funzioni trascendenti più semplici sono: (1) la funzione esponenziale (2) la funzione logaritmo (3) le funzioni goniometriche

Funzioni
- Algebriche
  - 1) razionali intere
  - 2) razionali fratte
  - 3) irrazionali
- Trascendenti
  - 1) goniometriche
  - 2) logaritmiche
  - 3) esponenziali



Le funzioni algebriche sono quelle funzioni per le quali le operazioni che agiscono sulla variabile indipendente sono: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice. Le funzioni algebriche prendono il nome di funzioni razionali intere se le operazioni da eseguire sulla variabile indipendente sono solo addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni ed elevamento a potenza. Quando in aggiunta vi è anche l'operazione di divisione si hanno le funzioni razionali fratte. Se compaiono le estrazioni di radici abbiamo le funzioni irrazionali. Una funzione f è espressa analiticamente quando le immagini $f(x)$ si ottengono mediante almeno una delle seguenti operazioni: addizione , sottrazione , moltiplicazione, divisioni, elevamento a potenza, estrazione di radice e di logaritmo, calcolo di funzioni goniometriche o di funzioni goniometriche inverse. Una funzione esprimibile analiticamente e che non sia algebrica si dice funzione trascendente.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 1 \\ y = (x-1)(x^2+2) \end{array}\right\} \text{funzioni razionali intere}$$

$$\left. y = \frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{x} \right\} \text{funzione razionale fratta}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x + \sqrt{x^2 - 12} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{2x - 3x}}{2x + 1} \end{array}\right\} \text{funzioni irrazionali}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 5^x \\ y = \ln\left(x^2 + 1\right) \end{array}\right\} \text{funzioni trascendenti}$$

Funzioni monotone

Consideriamo la funzione $f : A \rightarrow B : x \in A \rightarrow f(x) \in B$ ed indichiamo con x_1 ed x_2 due punti qualsiasi dell'intervallo [a,b] $\subseteq$ A. Una funzione *f*(x) si dice:

1) strettamente crescente o **crescente in senso stretto** nell'intervallo $[\mathbf{a,b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

2) semplicemente crescente o **crescente in senso lato** in $[\mathbf{a,b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

3) strettamente decrescente o **decrescente in senso stretto** in $[\mathbf{a,b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

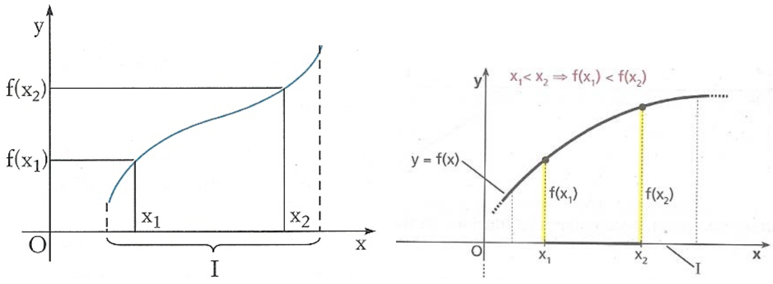
4) semplicemente decrescente o **decrescente in senso lato** in $[\mathbf{a,b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

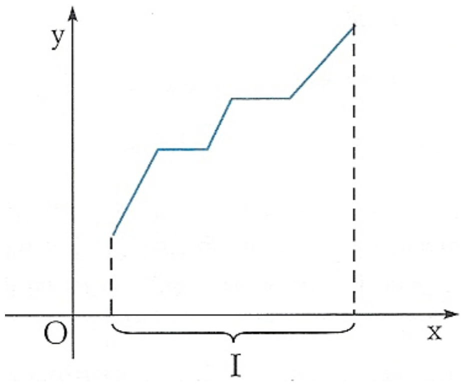
5) strettamente monotona in $[\mathbf{a,b}]$ se è ivi **strettamente crescente** o **strettamente decrescente**

6) semplicemente monotona in $[\mathbf{a,b}]$ se è ivi **semplicemente crescente** o **semplicemente decrescente**

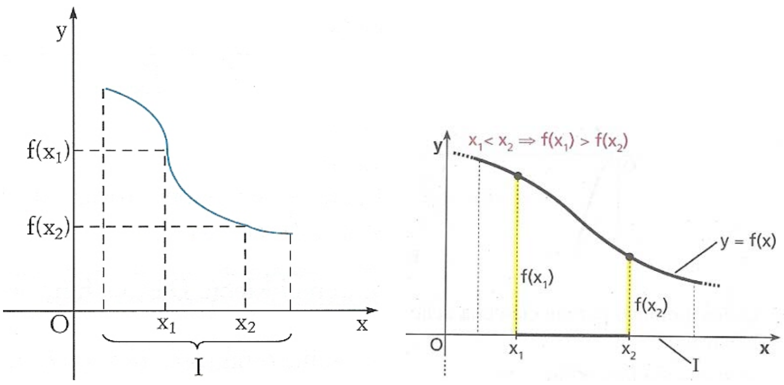
7) monotona in $[\mathbf{a,b}]$ se è ivi **strettamente monotona** o **semplicemente monotona**.



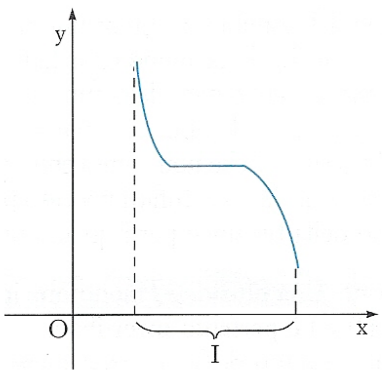
Funzione strettamente crescente o crescente in senso lato



Funzione semplicemente crescente



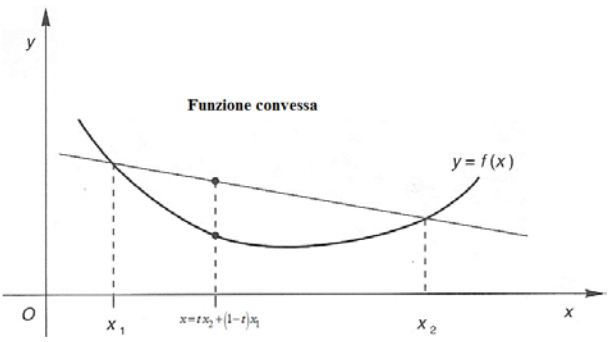
Funzione strettamente decrescente o decrescente in senso lato



Funzione semplicemente crescente

Funzione convessa, funzione concava

Una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $[a,b]$, si dice convessa (concava) quando, comunque si scelgano due punti $P_1[x_1, f(x_1)]$ e $P_2[x_2, f(x_2)]$ del suo diagramma γ, l'arco di γ di estremi



$P_1[x_1, f(x_1)]$ e $P_2[x_2, f(x_2)]$ è non al disopra (non al disotto) del segmento $\overline{P_1P_2}$.

Se, in particolare, qualunque siano $P_1, P_2 \in \gamma$, i punti dell'arco di curva $\overset{\frown}{P_1P_2}$ distinti dagli estremi sono al disopra (al disotto) del segmento $\overline{P_1P_2}$, la funzione si dice strettamente convessa (strettamente concava). Con parole diverse possiamo dire una funzione $f(x)$ è convessa (concava) in $[a,b]$ quando, considerato un qualsiasi intervallo $[x_1, x_2] \subseteq [a,b]$, il valore che la funzione assume in ciascuno dei punti di tale intervallo è minore (maggiore) o uguale ai valori dei corrispondenti punti sulla retta contenente il segmento $\overline{P_1P_2}$.

Traduciamo in forma analitica la proprietà di una funzione $f(x)$ di essere convessa (concava).

$m_{P_1P_2} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ = coefficiente angolare della retta P_1P_2

$y = f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ = equazione della secante P_1P_2

La funzione $f(x)$ è convessa se $y_\gamma \le y_{P_1P_2}$ Risulta:

$$y_\gamma = f(x) \quad \text{e} \quad y_{P_1P_2} = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad y_\gamma \le y_{P_1P_2} \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad [A]$$

La funzione $f(x)$ è concava se $y_\gamma \ge y_{P_1P_2}$ Risulta: $f(x) \ge f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad [B]$

Parliamo di stretta convessità (stretta concavità) se ciascuna disuguaglianza sussiste in senso stretto.

Un altro modo di introdurre la convessità (concavità) di una funzione $f(x)$ è il seguente.

Pongo: $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ $\quad \forall x \in [x_1, x_2]$ Ottengo: $t(x_2 - x_1) = x - x_1 \quad x = tx_2 - tx_1 + x_1 \quad \mathbf{x = t x_2 + (1 - t) x_1}$

$x = x_1 \Rightarrow t = 0 \qquad x = x_2 \Rightarrow t = 1$

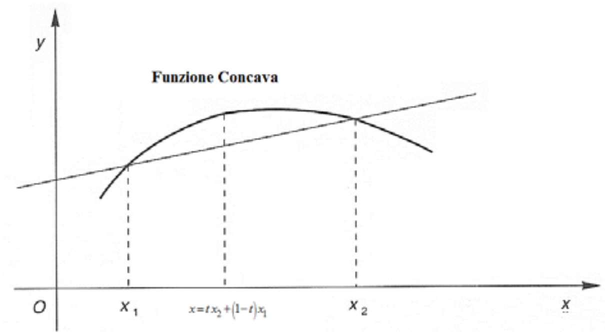
Esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'intervallo $[x_1, x_2]$ e quelli dell'intervallo $[0,1]$. La disuguaglianza $[A]$ diventa:

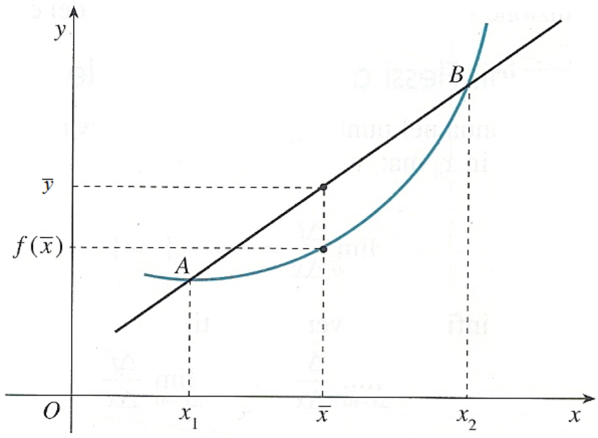
$$f[tx_2 + (1-t)x_1] \le f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)] \qquad f[tx_2 + (1-t)x_1] \le f(x_1) + t\,f(x_2) - t\,f(x_1)$$

$$\mathbf{f[tx_2 + (1-t)x_1] \le tf(x_2) + (1-t)f(x_1)} \qquad \text{funzione convessa}$$

Per la concavità abbiamo: $\mathbf{f[tx_2 + (1-t)x_1] \ge tf(x_2) + (1-t)f(x_1)}$

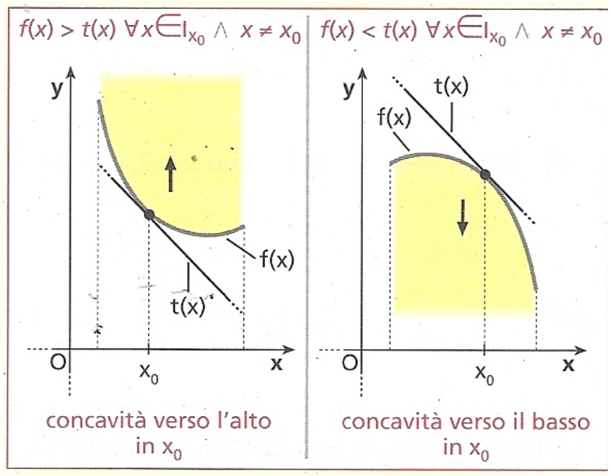
Si noti come, al variare ti $t \in [0,1]$ il punto $\mathbf{x = tx_2 + (1-t)x_1}$ descrive sull'asse delle ascisse il segmento $[x_1, x_2]$ di estremi x_1 ed x_2.



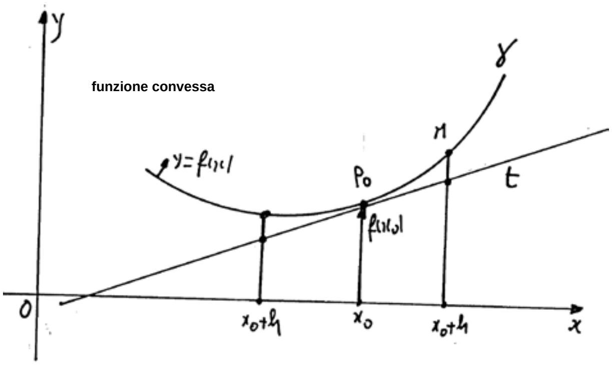


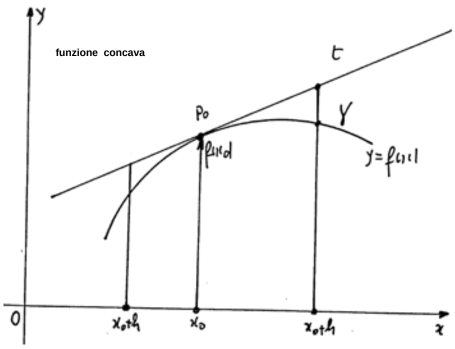
Un altro modo di introdurre la convessità e la concavità di una funzione o di una curva.

Sia $P_o[x_o, f(x_o)]$ un punto della curva piana γ avente equazione $y = f(x)$, con $f(x)$ definita in $[a,b]$ ed ivi derivabile quanto occorre. Sia **t** la retta tangente a γ in P_o. Diciamo che la curva γ volge la concavità verso l'alto o nel **verso positivo delle y** (verso il basso o nel **verso negativo** delle y) se è possibile trovare un intorno completo $I(x_o)$ del punto x_o tale che ogni punto P di γ



avente ascissa $x \in I(x_o) - \{x_o\}$ si trovi al disopra (al **disotto**) della retta t. Quindi la curva γ volge nel punto P_o la concavità verso l'alto (verso il basso) se essa giace localmente (cioè in un opportuno intorno di x_o) al disopra (**al disotto**) della tangente a γ in P_o. Se la suddetta proprietà si verifica $\forall\ x_o \in [a,b]$, allora diciamo che la curva volge la concavità verso l'alto (il basso) in tutto l'intervallo $[a,b]$. Se il $G(f)$ in $[a,b]$ volge la concavità verso l'alto (il basso), diciamo pure che la funzione $f(x)$ è in $[a,b]$ convessa (**concava**). Il punto in cui la curva γ cambia la propria concavità da verso il basso a verso l'alto e viceversa è detto punto di flesso o **punto di inflessione**.





Funzioni inverse

● Le funzioni inverse possono essere definite solo se la corrispondenza tra gli elementi del dominio e del codominio è una corrispondenza biunivoca.

La funzione inversa di f(x) si indica col simbolo $f^{-1}(x)$.

Definizione

Si chiama funzione inversa di una funzione biiettiva f, e la si indica col simbolo f^{-1}, la corrispondenza che ad ogni immagine f(x) del codominio di f fa corrispondere la sua (unica) controimmagine del dominio: $\mathbf{f^{-1}:y\to x}$ oppure $\mathbf{f^{-1}:f(x)\to x}$ con $x = f^{-1}(y) = g(y)$

E' possibile avere l'espressione analitica della funzione inversa quando l'equazione y=f(x) è risolubile rispetto ad x, cioè quando attraverso operazioni algebriche o trascendenti possiamo ottenere la seguente equazione: $\mathbf{x=g(y)}$, $\mathbf{dom\,f^{-1}=codom\,f}$ $\mathbf{codom\,f^{-1}=dom\,f}$

● una funzione strettamente monotona in un intervallo $[\mathbf{a,b}]$, essendo una corrispondenza biunivoca , è invertibile in tale intervallo.

● Se la funzione f non è strettamente monotona in $[\mathbf{a,b}]$, esistono sempre intervalli parziali $[\mathbf{c,d}]$ contenuti in $[\mathbf{a,b}]$ dove f è strettamente monotona e quindi invertibile .

In questo caso si dice che la funzione f è localmente invertibile nell'intervallo $[\mathbf{c,d}]$.

● Le due seguenti funzioni, una inversa dell'altra, hanno lo stesso grafico:

$$\mathbf{y=f(x)}\ ,\quad \mathbf{x=f^{-1}(y)=g(y)}$$

- I grafici delle due seguenti funzioni, una inversa dell'altra, $\mathbf{y=f(x)}$ ed $\mathbf{y=f^{-1}(x)}$ sono curve simmetriche rispetto alla bisettrice fondamentale (y = x) degli assi cartesiani.

- la funzione $x = \sin y$ è strettamente crescente nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi è ivi localmente invertibile. La funzione inversa di $x = \sin y$ è indicata col simbolo $\mathbf{y = \arcsin x}$.

$$\mathbf{dom \sin y} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \mathbf{codom \sin y} = [-1,1]$$

$$\mathbf{dom \arcsin x} = [-1,1] \qquad \mathbf{codom \arcsin x} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- la funzione $\mathbf{x=\cos y}$ è strettamente decrescente nell'intervallo $[0, \pi]$ e quindi è ivi localmente invertibile.

La funzione inversa di $\mathbf{x=\cos y}$ è indicata col simbolo $\mathbf{y = \arccos x}$.

$$\mathbf{dom \cos y} = [0, \pi] \qquad \mathbf{codom \cos y} = [-1,1]$$

$$\mathbf{dom \arccos x} = [-1,1] \qquad \mathbf{codom \arccos x} = [0, \pi]$$

- la funzione $\mathbf{x=tg\, y}$ è strettamente crescente nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e quindi è ivi localmente invertibile .

La funzione inversa di $\mathbf{x=tg\, y}$ è indicata col simbolo $\mathbf{y=arctg\, x}$.

$$\mathbf{dom\, tg\, y} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \mathbf{codom\, tg\, y} =]-\infty, +\infty[$$

$$\mathbf{dom\, arctg\, x} =]-\infty, +\infty[\qquad \mathbf{codom\, arctg\, x} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

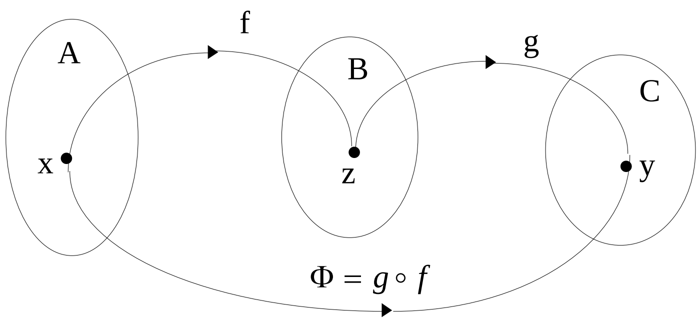
- la funzione $\mathbf{x=cotg\, y}$ è strettamente decrescente nell'intervallo $]0,\pi[$ e quindi è ivi localmente invertibile.

La funzione inversa di $\mathbf{x=cotg\, y}$ è indicata col simbolo $\mathbf{y = arccotg\, x}$.

$$\mathbf{dom\, cotg\, y} =]0, \pi[\qquad \mathbf{codom\, cotg\, y} =]-\infty, +\infty[$$

$$\mathbf{dom\, arccotg\, x} =]-\infty, +\infty[\qquad \mathbf{codom\, arccotg\, x} =]0, \pi[$$

Funzione di funzione



- Sia f una funzione univoca di **A** in B [$f: x \to z$, $z = f(x)$] e g una funzione univoca di B in **C** [$g: z \to y$, $y = g(z)$]. Il risultato finale è che ad ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ corrisponde una sola $\mathbf{y} \in \mathbf{C}$.

Resta cosi definita una funzione univoca Φ di **A** in **C** [$\Phi: x \to y$] detta funzione composta o funzione di funzione. Si scrive $\Phi = g \circ f$ e si legge <<f composto g>> .

Con abuso di scrittura possiamo anche scrivere: $y = g(z)$, $z = f(x)$, $y = g[f(x)] = \Phi(x)$

- Una funzione f si dice pari se risulta: $f(-x) = f(x) \ \forall x \in dom\, f$

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle y.

- Una funzione f si dice dispari se risulta: $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in dom\, f$

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

- $f(2a - x) = f(x) \ \Rightarrow \ G(f(x))$ (grafico della funzione $f(x)$) simmetrico rispetto alla retta di equazione **x=a**.

Dominio delle funzioni analitiche

1) Le funzioni razionali intere hanno come dominio l'insieme R

2) Le funzioni razionali fratte hanno come dominio l'insieme R meno l'insieme formato dagli zeri del denominatore

3) Le funzioni irrazionali contenenti radicali aventi indice pari hanno come dominio l'insieme dei numeri reali che rendono non negativi i radicandi. Tale insieme è un intervallo o una unione di intervalli che si ottengono risolvendo il sistema che si ottiene imponendo che ogni radicando sia ≥ 0
Le funzioni irrazionali contenenti radicali aventi indice dispari hanno come domino l'insieme R.

4) Le funzioni logaritmiche hanno come dominio l'insieme dei numeri reali che rendono positivi gli argomenti dei logaritmi

Tale insieme è un intervallo o una unione di intervalli che si ottengono risolvendo il sistema che si ottiene imponendo che ogni argomento sia > 0 .

5) Le funzioni esponenziali del tipo $y=a^x$ hanno come dominio l'insieme R.

6) Le funzioni $y=\arcsin f(x)$ $y=\arccos f(x)$ hanno come dominio le soluzioni del sistema:

$$-1\leq f(x)\leq 1$$

7) $dom \sin x = dom \cos x = \mathbf{R}$ 8) $dom\, tg\, x=\mathbf{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ 9) $\mathrm{dom}\,\mathrm{cotg}\, x=\mathbf{R}-\{k\pi\}$

10) Per le funzioni che risultano dalla composizione delle precedenti funzioni elementari, il dominio si determina tenendo conto di tutte le condizioni sopra esaminate.

Definizione di funzione univoca

Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di R. Si chiama funzione reale di una variabile reale qualunque legge che fa corrispondere ad ogni elemento $x\in A$ uno ed un solo elemento $y\in B$.

Si usa uno dei seguenti simboli: $f:A\to B$, $x\to f(x)$, $x\to y=f(x)$, $y=f(x)$

- Si dice dominio della funzione f l'insieme A dei valori della variabile x che hanno come immagine un numero reale e finito
- L'insieme delle immagini f(x) si chiama codominio della funzione e si indica cosi:

$$codom\ f = f(A)$$

- Si chiama grafico della funzione f , e si indica col simbolo G(f), l'insieme di tutte le coppie ordinate $[x; f(x)]$ con $x\in dom\ f$ ed $f(x)\in codm\ f$.
- Una funzione si dice di tipo analitico o rappresentabile analiticamente se la relazione di dipendenza che lega il valore della y a quello della x è rappresentata da una successione di operazioni da eseguirsi sulla variabile x.

Si dice allora che il grafico della funzione f è una curva piana avente equazione

$y=f(x)$

x è detta variabile indipendente , y è detta variabile dipendente.