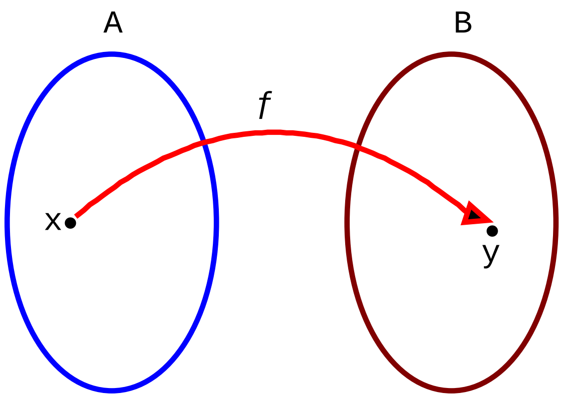
Definizione di funzione numerica

Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due insiemi numerici qualsiasi e siano $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ i loro generici elementi. Dicesi funzione univoca di $\mathbf{A}$ verso $\mathbf{B}$ una legge $\mathbf{f}$ di natura qualsivoglia che associa ad ogni elemento $x \in A$ un solo elemento di $\mathbf{B}$. In simboli abbiamo:

$\mathbf{f : A \to B : x \in A \to f(x) = y \in B}$ e si legge: <<$\mathbf{f}$ di $\mathbf{A}$ verso $\mathbf{B}$ che associa ad ogni elemento $x \in A$ un solo elemento $f(x) = y \in B$>>. Più semplicemente possiamo scrivere: $\mathbf{f : A \to B}$ e leggere $\mathbf{f}$ è una funzione di $\mathbf{A}$ verso $\mathbf{B}$.



Il generico elemento $\mathbf{x}$ dell'insieme A prende il nome di variabile indipendente della funzione $\mathbf{f}$. Il corrispondente valore $y = f(x) \in B$, che rappresenta l'immagine di $\mathbf{x}$ tramite f, è detto anche variabile dipendente.

In una funzione $\mathbf{f : x \to f(x) = y}$ $\mathbf{x}$ è detta controimmmagine di $\mathbf{y}$ mediante $\mathbf{f}$, mentre la $\mathbf{y}$ è l'immagine della $\mathbf{x}$ mediante $\mathbf{f}$.

Se $\mathbf{f}$ è data mediante una formula, allora il simbolo $\mathbf{f}$ rappresenta il complesso delle operazioni che bisogna eseguire sulla $\mathbf{x}$ per ottenere la corrispondente immagine $\mathbf{f(x) = y}$. Dicesi dominio della funzione numerica $\mathbf{f : x \to f(x)}$ l'insieme dei valori numerici che bisogna attribuire alla $\mathbf{x}$ perché le corrispondenti immagini siano reali e finite

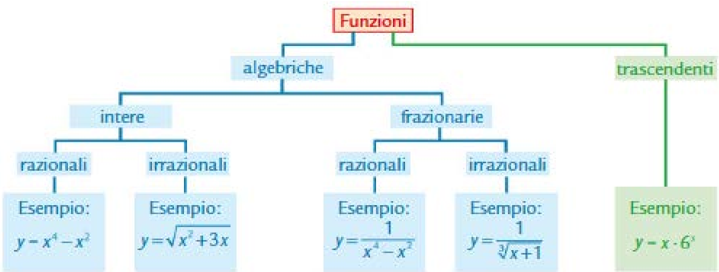
Quando la variabile indipendente $\mathbf{x}$ varia assumendo tutti valori del dominio della funzione $\mathbf{f}$ il punto $\mathbf{P}(\mathbf{x};\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ descrive una curva piana γ detta grafico della funzione $\mathbf{f}$. Diciamo pure che la curva γ ha **equazione cartesiana** $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Le scritture $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ rappresentano, rispettivamente, una **funzione**, l'immagine dell'elemento $\mathbf{x}$ tramite $\mathbf{f}$, l'equazione cartesiana del grafico di $\mathbf{f}$. Per questo motivo si parla spesso, anche se impropriamente, di funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ o di funzione $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ al posto di funzione $\mathbf{f}$.

Classificazione delle funzioni numeriche

Per le funzioni numeriche abbiamo detto che il simbolo $\mathbf{f}$ riassume il complesso delle operazioni da eseguire sulla variabile indipendente $\mathbf{x}$ per ottenere l'immagine $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Le operazioni da eseguire sulla $\mathbf{x}$ possono essere algebriche o trascendenti. Sono operazioni algebriche le operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) e le operazioni irrazionali (estrazione di radice), sono operazioni trascendenti quelle non algebriche che introducono algoritmi più complessi come il calcolo del logaritmo di un numero reale positivo.

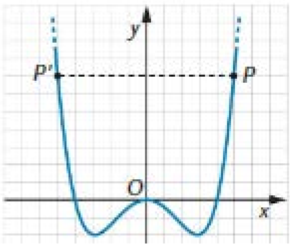
$$\text{Funzioni}\begin{cases}\text{Algebriche}\begin{cases}\text{1) razionali intere}\\ \text{2) razionali fratte}\\ \text{3) irrazionali}\end{cases}\\ \text{Trascendenti}\begin{cases}\text{1) goniometriche}\\ \text{2) logaritmiche}\\ \text{3) esponenziali}\end{cases}\end{cases}$$

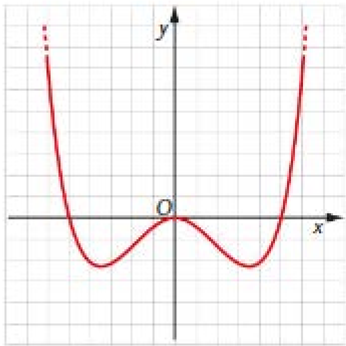


- Funzioni
  - Funzioni algebriche
    - Razionali
      - intere
        - La x non è assoggettata alla operazione di divisione. $f(x)$ è un polinomio $P(x)$. Esempio: $y = 8x^5 + 2x^2 + 5$
      - fratte
        - La x è assoggettata alla operazione di divisione. $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ è il rapporto di due polinomi. $y = \frac{x^2 - x}{x^3 - 3x + 2}$
    - irrazionali
      - Sulla x si esegue almeno una volta una operazione irrazionale. $y = \sqrt[3]{x-5} + \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x+1}$
  - Funzioni trascendenti
    - esponenziali
    - logaritmiche
    - goniometriche

Le funzioni pari

Se risulta $f(-x)=f(x)$ la funzione è detta pari ed il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



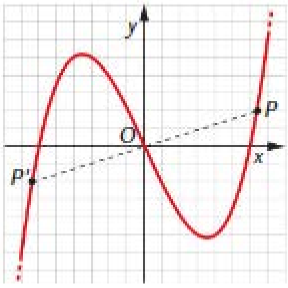


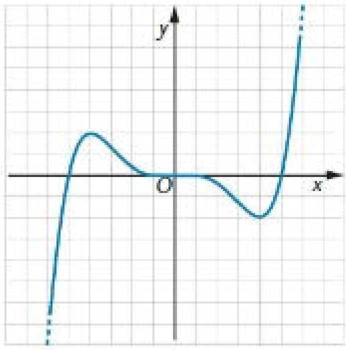
La funzione $f(x)=x^6-2x^4+3x^2$ è una funzione pari in quanto risulta:

$$f(-x)=(-x)^6-2(-x)^4+3(-x)^2=x^6-2x^4+3x^2=f(x)$$

Le funzioni dispari

Se risulta $f(-x)=-f(x)$ la funzione è detta dispari ed il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.





La funzione $\mathbf{f(x) = -4x^5 + x}$ è una funzione dispari in quanto risulta:

$$f(-x) = -4(-x)^5 - x = 4x^5 - x = -(-4x^5 + x) = -f(x)$$

Funzioni crescenti, decrescenti, monotone

Una funzione $\mathbf{f(x)}$ si dice:

1) strettamente crescente nell'intervallo $[\mathbf{a;b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

2) semplicemente crescente in $[\mathbf{a;b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

3) strettamente decrescente in $[\mathbf{a;b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

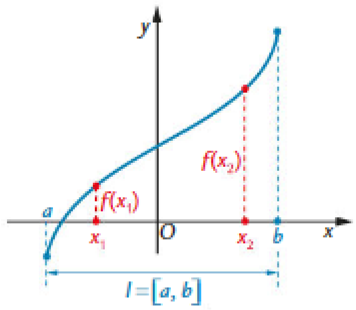
4) semplicemente decrescente in $[\mathbf{a;b}]$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

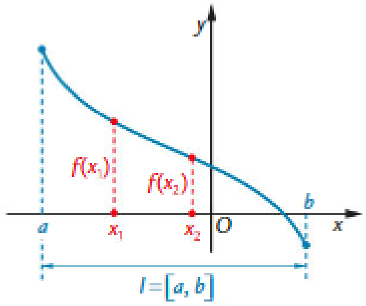
5) strettamente monotona in $[\mathbf{a;b}]$ se è ivi **strettamente crescente** o **strettamente decrescente**

6) semplicemente monotona in $[\mathbf{a;b}]$ se è ivi **semplicemente crescente** o **semplicemente decrescente**

7) monotona in $[\mathbf{a;b}]$ se è ivi **strettamente monotona** o **semplicemente monotona**.

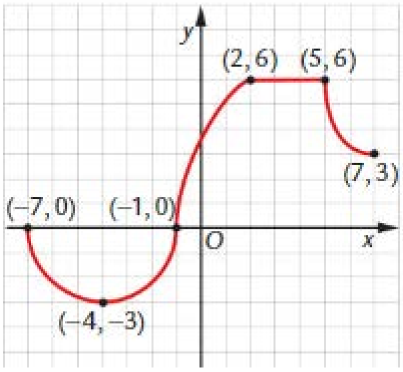


a. Per ogni $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$: la funzione è strettamente *crescente* in $[a, b]$.



b. Per ogni $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$: la funzione è strettamente *decrescente* in $[a, b]$.

Consideriamo una funzione il cui grafico è indicato nella figura.



La funzione del grafico è:

- strettamente decrescente negli intervalli $[-7;-4]$ e $[5;7]$
- costante nell'intervallo $[2;5]$
- strettamente crescente $[-4;2]$
- semplicemente crescente nell'intervallo $[-4;5]$
- semplicemente decrescente nell'intervallo $[2;7]$

Restrizione di una funzione

Effettuare una restrizione della funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ significa considerare una nuova funzione $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ che, pur essendo rimasta inalterata la legge di corrispondenza che fa passare dalla $\mathbf{x}$ alla sua immagine $f(x)$, differisce dalla f perché ha un dominio diverso, cioè un dominio che un sottoinsieme del dominio della funzione f.

Consideriamo la funzione: $f : x \in R \to \sin x$ Una sua restrizione è la seguente:

$$g : x \in [0, \pi] \to \sin x$$

Zeri di una funzione

Data una funzione $f(x)$ si dice che un numero x_o è uno zero della funzione se risulta $f(x_o)=0$. Dalla definizione si deduce che la ricerca degli eventuali zeri della funzione $f(x)$ equivale alla ricerca delle soluzioni dell'equazione $f(x)=0$-

Segno di una funzione

Studiare il segno della funzione $f(x)$ significa quando la funzione è positiva, negativa nulla, cioè significa stabilire per quali valori x del dominio della funzione risulta:

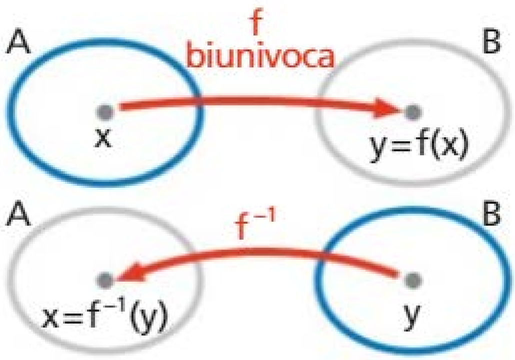
$$f(x)<0 \quad f(x)>0 \quad f(x)=0$$

Funzione inversa

Abbiamo visto che in una corrispondenza biunivoca ad ogni elemento del dominio corrisponde una sola immagine del codominio e viceversa ad ogni immagine del codominio corrisponde una sola controimmagine del dominio. Le funzioni inverse possono essere definite solo per le corrispondenze biunivoche.

Definizione: Data la funzione biunivoca da A verso B ($f:x\to y$ cioè $f:A\to B$) la **funzione inversa** di f è la funzione biunivoca $f^{-1}:y\to x$ che associa ad ogni valore y di B il valore x di A tale che $y=f(x)$.

La funzione inversa può essere scritta anche così: $f^{-1}:f(x)\to x$ con $x = f^{-1}(y) = g(y)$



E' possibile avere l'espressione analitica della funzione inversa quando l'equazione y=f(x) è risolubile rispetto ad x, cioè quando attraverso operazioni algebriche o trascendenti possiamo ottenere la seguente equazione: $x=g(y)$

- una funzione strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$, essendo una corrispondenza biunivoca , è invertibile in tale intervallo.
- Se la funzione f non è strettamente monotona in $[a,b]$, esistono sempre intervalli parziali $[c,d]$ contenuti in $[a,b]$ dove f è strettamente monotona e quindi invertibile .

In questo caso si dice che la funzione f è localmente invertibile nell'intervallo $[c,d]$.

- Le due seguenti funzioni, una inversa dell'altra, hanno lo stesso grafico:

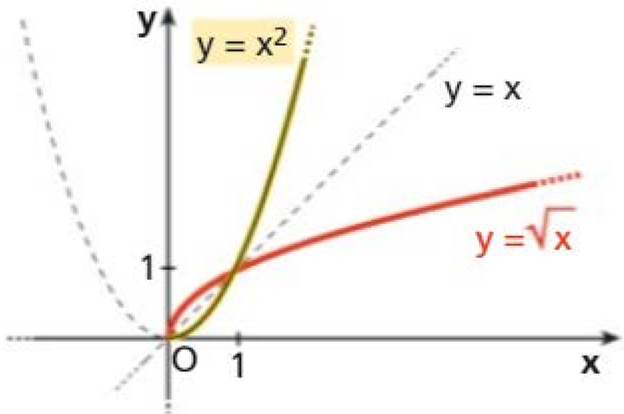
$$y=f(x)\ ,\ \ x=f^{-1}(y)=g(y)$$

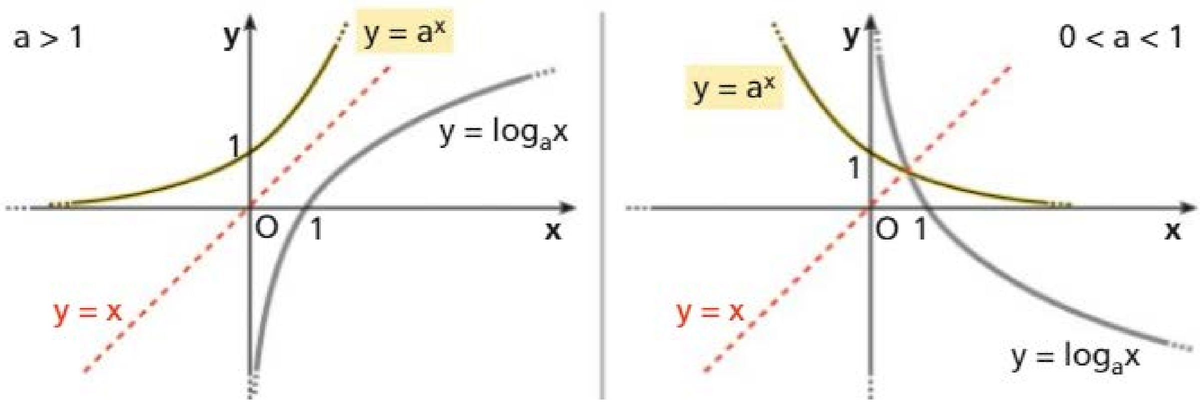
- I grafici delle due seguenti funzioni, una inversa dell'altra, $y=f(x)$ ed $y=f^{-1}(x)$ sono curve simmetriche rispetto alla bisettrice fondamentale (y = x) degli assi cartesiani.

La funzione $y=x^2$ è invertibile nell'intervallo $[0;+\infty[$ e la sua inversa è: $x=\sqrt{y}$

Le funzioni $y=x^2$ e $x=\sqrt{y}$ nell'intervallo $[0;+\infty[$ hanno lo stesso grafico

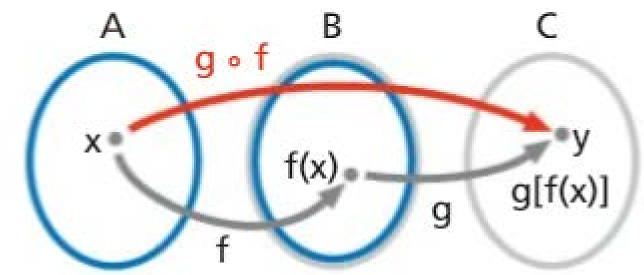
I grafici delle funzioni $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$ nell'intervallo $[0;+\infty[$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.





Funzioni composte

Sia $\mathbf{f}$ una funzione univoca di $\mathbf{A}$ verso $\mathbf{B}$ e $\mathbf{g}$ una funzione di $\mathbf{B}$ verso $\mathbf{C}$. Il risultato finale è che ad ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ corrisponde una sola immagine $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$. Resta così definita una funzione di $\mathbf{A}$ verso $\mathbf{C}$ $\mathbf{y} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ detta funzione composta o funzione di funzione. La scrittura $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ si legge "$\mathbf{g}$ composto $\mathbf{f}$" e si intende che prima opera la funzione $\mathbf{f}$ e poi la funzione $\mathbf{g}$.



$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$ per calcolare l'espressione analitica di questa funzione bisogna sostituire la variabile indipendente della funzione $\mathbf{g}$ l'immagine $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ della funzione $\mathbf{f}$.

Date le funzioni $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = \sqrt[4]{x}$ calcolare: $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ e $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$

$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{f}) = \sqrt[4]{\mathbf{2x-5}}$ basta sostituire la variabile indipendente della funzione $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ con l'immagine di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ che è $2x-5$ $x \to f(x) = 2x-5$

$\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = f(g) = 2\sqrt[4]{x} - 5$ basta sostituire la variabile indipendente della funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con l'immagine di $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ che è $x \to g(x) = \sqrt[4]{x}$

Date le funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \dfrac{2}{|x^2 - 1|}$ calcolare: $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ e $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$

$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = g(f) = \dfrac{2}{|x^2 - 1 - 1|} = \dfrac{2}{|x^2 - 2|}$ al posto della variabile indipendente $\mathbf{x}$ di $g(x)$ sostituisco l'immagine $x^2 - 1$ di $f(x)$

$\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = f(g) = \left(\dfrac{2}{|x-1|}\right)^2 - 1 = \dfrac{4}{(x-1)^2} - 1$ al posto della variabile indipendente $\mathbf{x}$ di $f(x)$ sostituisco l'immagine $x^2 - 1$ di $g(x)$

Date le funzioni $f(x)=\frac{x-1}{x}$ e $g(x)=x^2-1$ calcolare: $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ e $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$

$\mathbf{g}\circ\mathbf{f}=g\left[f(x)\right]=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-1=\frac{1-2x}{x^2}$ ho sostituito la variabile indipendente $\mathbf{x}$ della funzione $\mathbf{g}$ con l'immagine $\frac{x-1}{x}$ della funzione $\mathbf{f}$, cioè nella funzione $\mathbf{g}$ bisogna effettuare la seguente sostituzione $x\to\frac{x-1}{x}$

$\mathbf{f}\circ\mathbf{g}=f\left[g(x)\right]=\frac{\left(x^2-1\right)-1}{x^2-1}=\frac{x^2-2}{x^2-1}$ nella funzione $\mathbf{f}$ bisogna effettuare la seguente sostituzione $x\to x^2-1$

Date le funzioni $f(x)=2x$, $g(x)=x^2$, $h(x)\ x+1$ calcolare $\mathbf{h}\circ\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$

$\mathbf{h}\circ\mathbf{g}\circ\mathbf{f}=f\left\{g\left[h(x)\right]\right\}$ $\quad g\circ f=g\left[f(x)\right]=4x^2$ al posto della variabile indipendente $\mathbf{x}$ della funzione $\mathbf{g}$ ho l'immagine della funzione $\mathbf{f}$ $2x$

$\mathbf{h}\circ\mathbf{g}\circ\mathbf{f}=f\left\{g\left[h(x)\right]\right\}=4x^2+1$ al posto della variabile indipendente $\mathbf{x}$ della funzione $\mathbf{h}$ ho l'immagine $4x^2$ della funzione $g\circ f=g\left[f(x)\right]=4x^2$

$\mathbf{f}\circ\mathbf{g}\circ\mathbf{h}=f\left\{g\left[f(x)\right]\right\}$ $\quad \mathbf{g}\circ\mathbf{h}=g\left[h(x)\right]=(x+1)^2$ al posto della variabile indipendente della funzione $\mathbf{g}$ ho l'immagine della funzione $\mathbf{h}$

$\mathbf{f}\circ\mathbf{g}\circ\mathbf{h}=f\left\{g\left[f(x)\right]\right\}=2(x+1)^2$ al posto della variabile indipendente della funzione $\mathbf{f}$ ho l'immagine della funzione $\mathbf{h}$ $\quad \mathbf{g}\circ\mathbf{h}=g\left[h(x)\right]=(x+1)^2$

Funzioni periodiche

Definizione: Una funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ si dice periodica di periodo $\mathbf{T}$ se, per qualsiasi valore del numero $\mathbf{k}$ intero, risulta: $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{k}\,\mathbf{T})=\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Si può dimostrare che: ●

● Se la funzione $f(x)$ è periodica ed ha come periodo il numero $\mathbf{T}$ allora la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{nx}+\mathbf{m})$ ha periodo il numero $\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{n}}$.

- Se la funzione $f(x)$ è periodica ed ha come periodo il numero $\mathbf{T}$ allora la funzione $\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}+\mathbf{m}\right)$ ha periodo $\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}$.

- Le funzioni $\mathbf{y}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{cos}(\mathbf{nx}+\boldsymbol{\alpha})$ ed $\mathbf{y}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{sin}(\mathbf{nx}+\boldsymbol{\alpha})$ hanno periodo $\mathbf{T}=\frac{2\pi}{\mathbf{n}}$.

- Le funzioni $\mathbf{y}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{cos}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}+\boldsymbol{\alpha}\right)$ ed $\mathbf{y}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}+\boldsymbol{\alpha}\right)$ hanno periodo $\mathbf{T}=2\pi\mathbf{n}$.

La funzione $\mathbf{y}=3\mathbf{sin}(4\mathbf{x}+38°)$ ha periodo pari a $\mathbf{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

La funzione $\mathbf{y}=\mathbf{a}\,\mathbf{tg}(\mathbf{k}\,\mathbf{x}+\boldsymbol{\alpha})$ ha periodo $\mathbf{T}=\frac{\pi}{\mathbf{k}}$

La funzione $\mathbf{y}=\mathbf{a}\,\mathbf{tg}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}+\boldsymbol{\alpha}\right)$ ha periodo $\mathbf{T}=\mathbf{k}\,\pi$

- Se T_1 e T_2 sono rispettivamente i periodi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ allora il periodo $\mathbf{T}$ della funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})\pm\mathbf{g}(\mathbf{x})$ coincide col **minimo comune multiplo** di T_1 e T_2, cioè:

$$\mathbf{T}=\mathbf{m.c.m.}(\mathbf{T}_1;\mathbf{T}_2)$$

- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni aventi uguale periodo T_1, allora il periodo $\mathbf{T}$ della funzione $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})}$ è $\frac{\mathbf{T}_1}{2}$

- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni aventi periodi T_1, T_2 diversi fra loro, allora il periodo $\mathbf{T}$ della funzione $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{g}(\mathbf{x})}$ è: $\mathbf{T}=\mathbf{m.c.m.}(\mathbf{T}_1;\mathbf{T}_2)$

- Le funzioni $\cos^{2n} x$ e $sin^{2n+1} x$ hanno periodo $T = \pi$, mentre le funzioni $\cos^{2n+1} x$ $sin^{2n+1} x$ hanno periodo $T = 2\pi$.

- Le funzioni $tg^{n}\, x$ e $\cot g^{n}\, x$ hanno periodo $T = \pi$