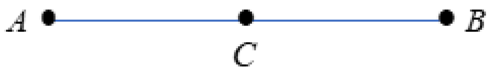
La simmetria centrale

Definizione: Fissato nel piano un punto $C(x_o;y_o)$, la simmetria centrale di centro $C(x_o;y_o)$ è la trasformazione geometrica che ad ogni punto $P(x;y)$ del piano fa corrispondere il punto $P'(x';y')$ tale che $C(x_o;y_o)$ è il punto medio del segmento PP'.



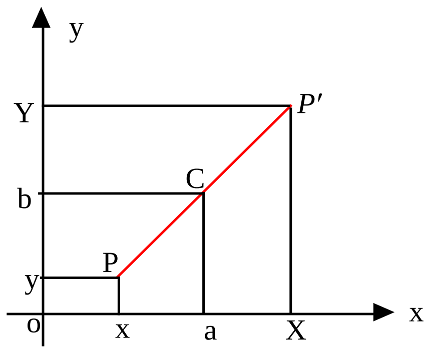
Equazioni di una simmetria centrale

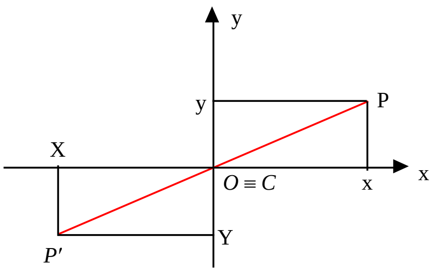
Fra le coordinate delle coppie di punti $P(x;y)$ e $P'(x';y')$ che si corrispondono nella simmetria di centro $C(x_o;y_o)$ sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_P + x_{P'}}{2} \\ y_C = \dfrac{y_P + y_{P'}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_o = \dfrac{x + x'}{2} \\ y_o = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x' = 2x_o - x} \\ \mathbf{y' = 2y_o} - y \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x = 2x_o - x'} \\ \mathbf{y = 2y_o - y'} \end{cases}$$

Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che risulti $C \equiv O$ allora le precedenti relazioni assumono la forma :

$$\begin{cases} \mathbf{x' = -x} \\ \mathbf{y' = -}y \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{X = -x} \\ \mathbf{Y = -y} \end{cases}$$





In una simmetria centrale vi è un solo **punto unito**: il centro di simmetria. In una simmetria centrale sono unite tutte e sole le rette passanti per il centro di simmetria.

REGOLA PRATICA

Per avere l'equazione cartesiana della curva γ' simmetrica della curva γ rispetto al punto $C(x_o;y_o)$ basta sostituire nell'equazione cartesiana $y = f(x)$ della curva γ x con $2x_o - x$ ed y con $2y_o - y$, cioè basta utilizzare le seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x \to 2x_o - x} \\ \mathbf{y \to 2y_o - y} \end{cases}$$

<<Scrivere l'equazione della parabola γ' simmetrica della parabola di equazione $y = -x^2 + x - 1$ rispetto al punto $C(-2,3)$ >>

Basta utilizzare le seguenti sostituzioni: $\begin{cases} x \to -4-x \\ y \to 6-y \end{cases}$ Otteniamo:

$6-y=-(-4-x)^2+(-4-x)-1 \quad 6-y=-16-8x-x^2-4-x-1 \quad -y=-x^2-9x-27 \quad \mathbf{y=x^2+9x+27}$

SINTESI

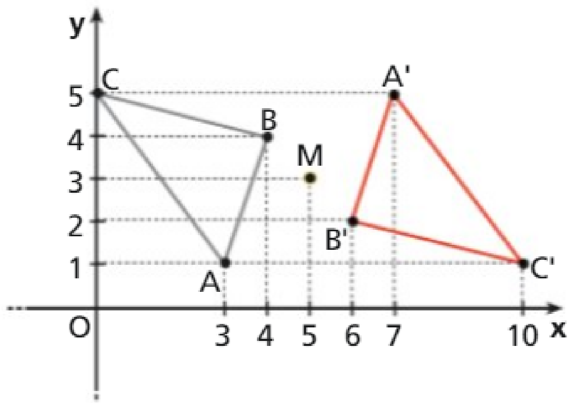
Simmetrie centrali
• Il simmetrico di un punto $P(x, y)$ rispetto al punto $C(x_0, y_0)$ è il punto: $P'(2x_0 - x, 2y_0 - y)$
• Per determinare l'equazione della curva simmetrica di una curva data rispetto al punto $C(x_0, y_0)$, occorre effettuare nell'equazione assegnata le sostituzioni: $x \to 2x_0 - x$ e $y \to 2y_0 - y$

ESEMPIO

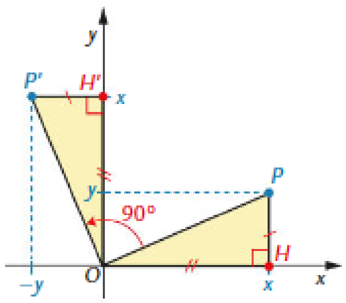
Le equazioni della simmetria centrale di centro $M(5; 3)$ sono:

$$\begin{cases} x' = 10 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}.$$

Il triangolo ABC viene trasformato nel triangolo $A'B'C'$.



La rotazione intorno all'origine degli assi cartesiani

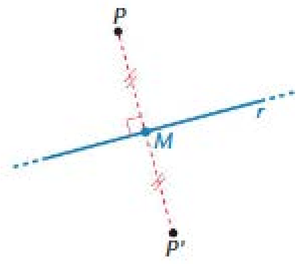


$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ equazioni di una rotazione intorno all'origine degli assi cartesiani in senso antiorario, cioè di una rotazione di $+90°$

$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ equazioni di una rotazione intorno all'origine degli assi cartesiani in senso orario cioè $-90°$

Le simmetrie assiali

I punti P e P' sono simmetrici rispetto alla retta r se si verificano le due seguenti



condizioni: 1) $PP' \perp r$ 2) M è il punto medio del segmento PP'

Simmetria rispetto all'asse delle ascisse

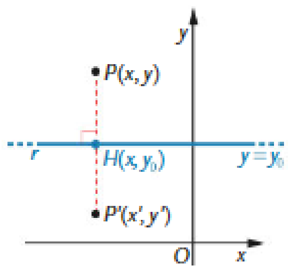
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$ basta effettuare le seguenti sostituzioni $x \to x$ e $y \to -y$

Simmetria rispetto all'asse delle ordinate

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$ basta effettuare le seguenti sostituzioni $x \to -x$ e $y \to y$

Simmetria rispetto ad una parallela all'asse delle ascisse

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$



Equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione

$$y = y_0$$

$y_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ simmetria rispetto all'asse delle ascisse

REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f, effettuiamo le seguenti sostituzioni

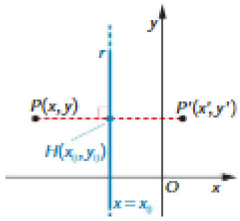
$\begin{cases} x \to x \\ y \to 2y_0 - y \end{cases}$ otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta $y = y_0$.

Simmetria rispetto ad una parallela all'asse delle ordinate

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione

$\mathbf{x = x_o}$



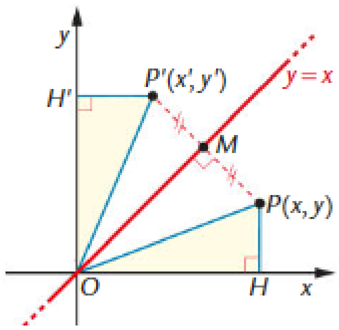
$\mathbf{x_o = 0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{x' = -x} \\ \mathbf{y' = } y \end{cases}$ simmetria rispetto all'asse delle ordinate

REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f, effettuiamo le seguenti sostituzioni $\begin{cases} \mathbf{x \to 2x_{\mathit{o}} - x} \\ \mathbf{y \to y} \end{cases}$ otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta $\mathbf{x = x_o}$.

La simmetria rispetto alle bisettrici degli assi cartesiani

$\begin{cases} \mathbf{x' = y} \\ \mathbf{y' = x} \end{cases}$ sono le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante $\mathbf{y = x}$ come si evince dalla figura seguente.



REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f, sostituiamo x con y ed y con x otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice fondamentale $y = x$.

$\begin{cases} \mathbf{x' = -y} \\ \mathbf{y' = -x} \end{cases}$ sono le equazioni della simmetria rispetto alla bisettrice del II e IY quadrante $\mathbf{y = -x}$

REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f, sostituiamo **x** con $-y$ ed **y** con $-x$ otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice secondaria $y = -x$.

SINTESI

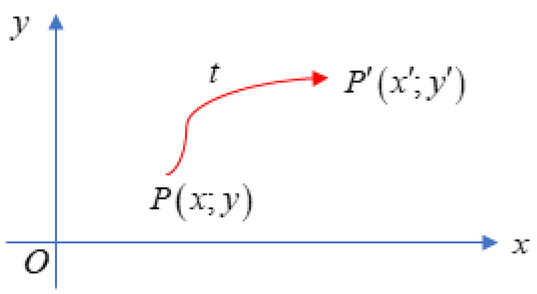
Sia γ una curva piana di equazione $E(x,y) = 0$. Se risulta $E(y,x) = 0$ la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice fondamentale** $y = x$, se risulta $E(-y,-x) = 0$ la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice secondaria** $y = -x$.

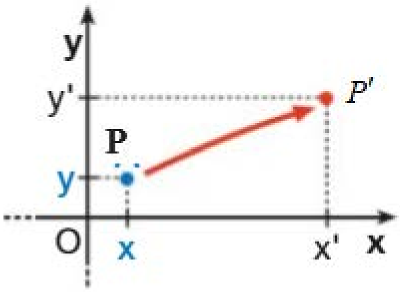
Come trasformare l'equazione di una curva piana mediante una simmetria assiale

Asse di simmetria	Equazioni della simmetria	Sostituzioni da effettuare nell'equazione della curva per ottenere la simmetrica		Esempio Equazione della simmetrica della retta $r: x - 2y + 1 = 0$ rispetto...
$y = 0$ (asse x)	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$x \to x$	$y \to -y$	... all'asse x: $x - 2(-y) + 1 = 0$ ossia $x + 2y + 1 = 0$ sostituzioni: $x \to y$, $y \to -y$
$x = 0$ (asse y)	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$x \to -x$	$y \to y$	... all'asse y: $-x - 2y + 1 = 0$ ossia $x + 2y - 1 = 0$ sostituzioni: $x \to -x$, $y \to y$
$y = y_0$	$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$	$x \to x$	$y \to 2y_0 - y$	... alla retta di equazione $y = 3$: $x - 2(6 - y) + 1 = 0$ ossia $x + 2y - 11 = 0$ sostituzioni: $x \to x$, $y \to 6 - y$
$x = x_0$	$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$	$x \to 2x_0 - x$	$y \to y$	... alla retta di equazione $x = -2$: $(-4 - x) - 2y + 1$ ossia $x + 2y + 3 = 0$ sostituzioni: $x \to -4 - x$, $y \to y$
$y = x$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$x \to y$	$y \to x$	... alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante: $y - 2x + 1 = 0$ ossia $2x - y - 1 = 0$ sostituzioni: $x \to y$, $y \to x$
$y = -x$	$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$	$x \to -y$	$y \to -x$	... alla bisettrice del 2° e del 4° quadrante: $-y - 2(-x) + 1 = 0$ ossia $2x - y + 1 = 0$ sostituzioni: $x \to -y$, $y \to -x$

Definizione di trasformazione geometrica

Una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca che associa ad ogni punto $P(x;y)$ un solo punto $P'(x';y')$ del piano stesso.





Se indichiamo con **t** una trasformazione geometrica, per dire che essa associa a un punto $P(x;y)$ del piano una altro punto $P'(x';y')$ dello stesso piano scriviamo:

$\mathbf{t:P \rightarrow P'}$ oppure $\mathbf{P \xrightarrow{t} P'}$. Il punto $P'(x';y')$ è detto immagine del punto $P(x;y)$ che, a sua volta, è detto controimmagine del punto $P'(x';y')$.

Equazioni di una trasformazione geometrica

Se nel piano fissiamo un riferimento cartesiano Oxy, ad ogni punto $P(x;y)$ viene associato il suo trasformato $P'(x';y')$ mediante due funzioni, dette equazioni della trasformazione, che esprimono le coordinate $(x';y')$ di $P'(x';y')$ in funzione delle coordinate $(x;y)$ del punto $P(x;y)$.

$t:\begin{cases} x' = f(x;y) \\ y' = g(x;y) \end{cases}$ Queste equazioni trasformano il punto $P(x;y)$ nel punto $P'(x';y')$

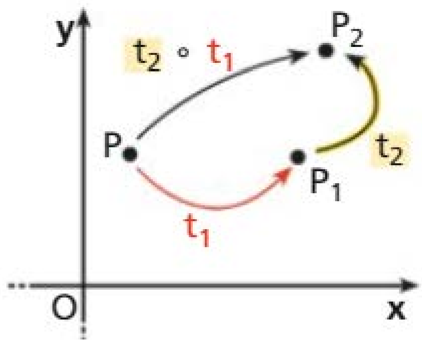
Le trasformazioni inverse $t^{-1}:\begin{cases} x = F(x';y') \\ y = G(x';y') \end{cases}$ fanno passare dal punto $P'(x';y')$ al punto $P(x;y)$.

Definizione: In una trasformazione geometrica un punto unito è un punto che ha come immagine se stesso.

Composizione di due trasformazioni

Supponiamo di applicare una trasformazione geometrica t_1 che trasforma il punto $P(x;y)$ nel punto $P'(x';y')$ e poi una seconda trasformazione geometrica t_2 che trasforma il punto $P'(x';y')$ nel punto $P''(x'';y'')$. Abbiamo ottenuto la trasformazione composta che trasforma il punto $P(x;y)$ nel punto $P''(x'';y'')$.

La indichiamo col simbolo $t_2 \circ t_1$ e la leggiamo $t_2\, composto\, t_1$ ricordando che prima si applica t_1 e poi si applica t_2.



La traslazione

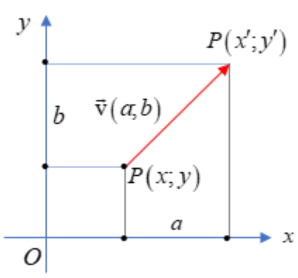
Definizione: Dato nel piano un vettore $\vec{v}(a;b)$ di componenti a e b, la traslazione di vettore $\vec{v}(a;b)$ è quella trasformazione geometrica che ad ogni punto $P(x;y)$ del piano cartesiano **Oxy** fa corrispondere il punto $P'(x';y')$ tale che risulti $\overrightarrow{PP'}=\vec{v}(a;b)$.

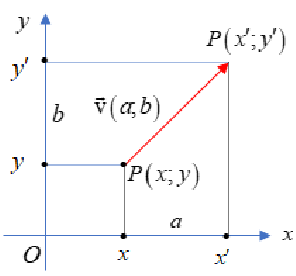
Noi sappiamo dalla teoria dei vettori che $\overrightarrow{PP'}=(x'-x;y'-y)$ e quindi possiamo scrivere:

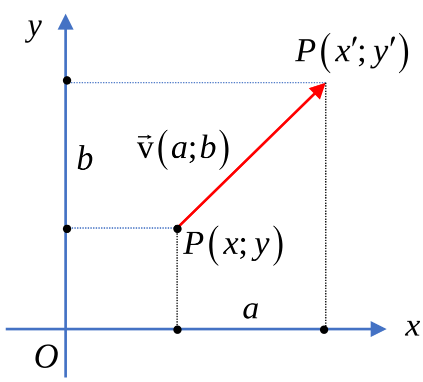
$$\begin{cases} x'-x=a \\ y'-y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases}$$

$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$ sono le equazioni di una traslazione di vettore $\vec{v}(a;b)$ che fa passare dal punto $P(x;y)$ al punto $P'(x';y')$

$\begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases}$ sono le equazioni della traslazione inversa che fa passare dal punto $P'(x';y')$ al punto $P(x;y)$, cioè sono le equazioni di vettore $\vec{v}'(-a;-b)$





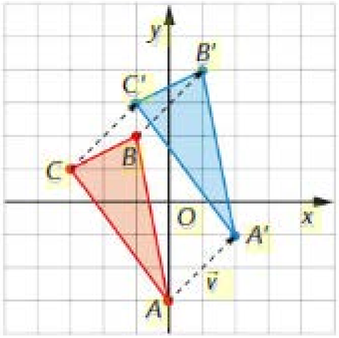


Esempio

Dati il triangolo ABC di vertici $A(0;-3)$, $B(-1;2)$, $C(-3;1)$ e la traslazione di vettore $\vec{v}(2;2)$, calcolare le equazioni della traslazione e le coordinate del $A'B'C'$ corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(2;2)$.

Le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(2;2)$ sono: $\begin{cases} \mathbf{x'=x+2} \\ \mathbf{y'=y+2} \end{cases}$ $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x'_{A'}=0+2=2 \\ y'_{A'}=-3+2=-1 \end{cases}$ $\mathbf{A'(2;.1)}$ $\begin{cases} x'_{B'}=-1+2=1 \\ y'_{B'}=2+2=4 \end{cases}$ $\mathbf{B'(1;4)}$ $\begin{cases} x'_{C'}=-3+2=-1 \\ y'_{C'}=1+2=3 \end{cases}$ $\mathbf{C'(-1;3)}$



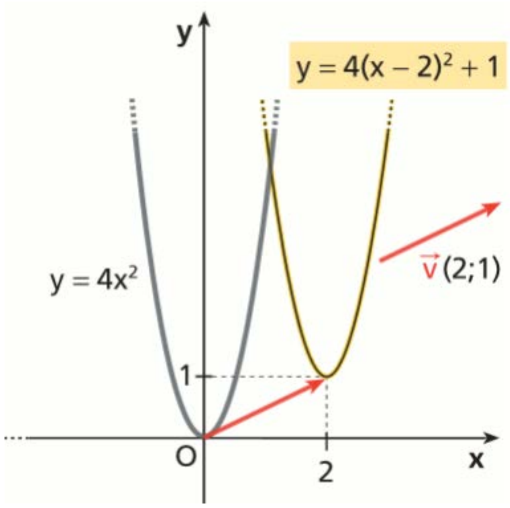
Traslazione del grafico della funzione $y=f(x)$ secondo il vettore $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{a;b})$. La funzione del grafico traslato sarà del tipo $y'=g(x')$. Bisogna applicare le equazioni della traslazione inversa $\begin{cases} \mathbf{x=x'-a} \\ \mathbf{y=y'-b} \end{cases}$ ed eliminare gli apici delle variabili, cioè effettuare le seguenti sostituzioni: $x'\to x \quad y'\to y$

Nella pratica conviene effettuare direttamente nella funzione $y=f(x)$ le seguenti sostituzioni: $x\to x-a \quad y\to y-b$.

Regola pratica: Per calcolare l'equazione della curva corrispondente di una curva di equazione $y=f(x)$ basta effettuare nella sua equazione $y=f(x)$ le seguenti sostituzioni: $x\to x-a \quad y\to y-b$

Esempio

Scrivere l'equazione della parabola corrispondente della parabola di equazione $y=4x^2$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(2;1)$



$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+1 \end{cases}$ equazioni della traslazione $\begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-1 \end{cases}$ equazioni della traslazione inversa

Per ottenere direttamente l'equazione della parabola traslata basta effettuare le seguenti sostituzioni: $x \to x-2 \quad y \to y-1 \quad y-1=4(x-2)^2 \quad y=4(x^2-4x+4)+1 \quad \mathbf{y=4x^2-16x+17}$

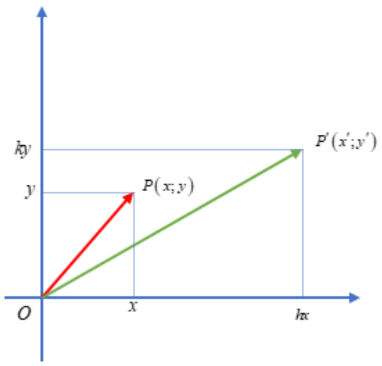
Dilatazioni e omotetie

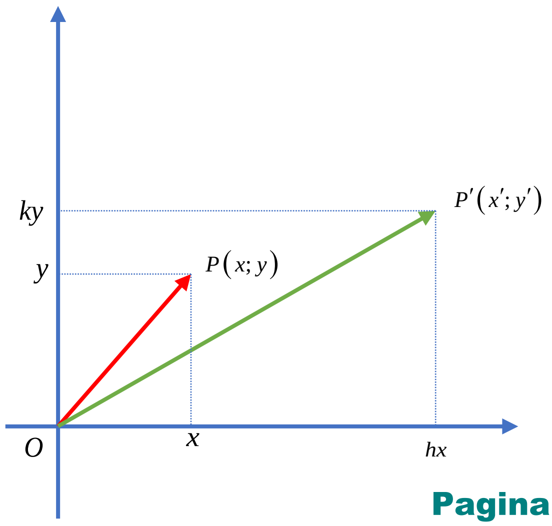
Adesso consideriamo alcune dilatazioni che determinano un cambiamento di scala lungo gli assi cartesiani.

Dati due numeri **h** e **k** diversi sa zero si chiama dilatazione con centro nell'origine degli assi cartesiani e rapporti **h** e **k** la trasformazione di equazioni:

$\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$ che fa passare dal punto $\mathbf{P(x;y)}$ al punto $P'(x';y')$

Infatti la dilatazione di centro $\mathbf{O(0;0)}$ e rapporti **h** e **k** trasforma il vettore $\overrightarrow{OP}=(x;y)$ nel vettore $\overrightarrow{OP'}=(hx;ky)$ che giustifica la precedente definizione con le relative equazioni.





La trasformazione inversa $\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{h}}\mathbf{x}' \\ \mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{k}}\mathbf{y}' \end{cases}$ fa passare dal punto $P'(x';y')$ al punto $\mathbf{P}(\mathbf{x};\mathbf{y})$

Problema: Data una curva avente equazione $y = f(x)$ trovare l'equazione $y' = g(x')$ che fa passare dal punto $\mathbf{P}(\mathbf{x};\mathbf{y})$ al punto $P'(x';y')$.

Bisogna utilizzare la trasformazione inversa $\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{h}}\mathbf{x}' \\ \mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{k}}\mathbf{y}' \end{cases}$, o meglio utilizzare le seguenti sostituzioni: $\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{h}}$ $\quad \mathbf{y} \to \frac{1}{\mathbf{k}}\mathbf{y}$

Esempio: Determinare l'equazione della curva corrispondente di γ nella dilatazione di centro $O(0;0)$ e di equazioni $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 4y \end{cases}$ sapendo che la curva γ ha equazione $\mathbf{y = x^2 - 2x}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = \frac{1}{4}y' \end{cases}$. Basta effettuare le seguenti sostituzioni: $x \to \frac{1}{2}x \quad y \to \frac{1}{4}y$

$\frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \quad \mathbf{y = x^2 - 4x}$

Dilatazione con centro nel punto $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ diverso dall'origine

$\begin{cases} \mathbf{x' = hx} \\ \mathbf{y' = hy} \end{cases}$ sono le equazioni di una omotetia di centro nell'origine degli assi cartesiani.

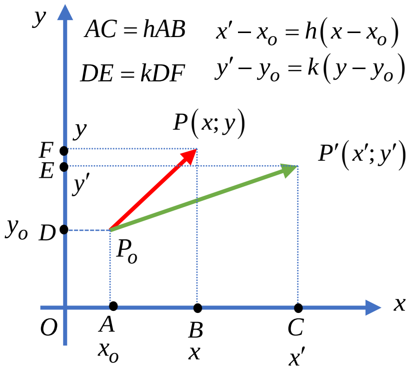
Le sue equazioni sono: $\begin{cases} x' = hx + (1-h)x_o \\ y' = ky + (1-k)y_o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = hx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$ se poniamo

$\begin{cases} (1-h)x_o = a \\ (1-k)y_o = b \end{cases}$ e $P_o(x_o;y_o)$ il centro della dilatazione diverso dall'origine

Infatti dicesi dilatazione di centro $\mathbf{P_o(x_o;y_o)}$ e rapporti $\mathbf{h}$ e $\mathbf{k}$ la trasformazione geometrica che ad ogni vettore $\overrightarrow{P_oP}=(x-x_o;y-y_o)$ associa il vettore $\overrightarrow{P_oP'}=(x'-x_o;y'-y_o)$

Poiché i rapporti della dilatazione sono $\mathbf{h}$ e $\mathbf{k}$ le sue equazioni sono:

$$\begin{cases} x'-x_o=h(x-x_o) \\ y'-y_o=k(y-y_o) \end{cases} \quad \begin{cases} x'=hx+x_o-hx_o \\ y'=ky+y_o-ky_o \end{cases} \quad \begin{cases} x'=hx+(1-h)x_o \\ y'=ky+(1-k)y_o \end{cases}$$



Alcune proprietà delle dilatazioni

- Le dilatazioni conservano l'appartenenza ad un segmento e al punto medio del segmento
- Le dilatazioni conservano l'incidenza e il parallelismo
- Le dilatazioni conservano il rapporto tra le aree

Omotetie con centro nell'origine

Se $\mathbf{h=k}$ la dilatazione è una omotetia. Le omotetie trasformano un figura geometrica in una figura geometrica simile. Le equazioni di una omotetia sono:

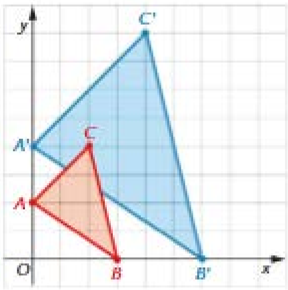
$$\begin{cases} \mathbf{x'=hx} \\ \mathbf{y'=hy} \end{cases}$$

Le equazioni di una omotetia inversa sono: $\begin{cases} \mathbf{x=\frac{1}{h}x'} \\ \mathbf{y=\frac{1}{h}y'} \end{cases}$

Problema: Dati i punti $A(0;2)$, $B(3;0)$, $C(2;4)$ calcolare le coordinate dei vertici del triangolo che è il corrispondente del triangolo ABC nell'omotetia di equazione $\begin{cases} x'=2x \\ y'=2y \end{cases}$

Poiché il parametro dell'omotetia è $\mathbf{h=2}$ per ottenere le coordinate dei vertici del triangolo corrispondente basta moltiplicare per $\mathbf{2}$ le coordinate dei vertici $A(0;2)$, $B(3;0)$, $C(2;4)$. Otteniamo $A'(0;4)$, $B'(6;0)$, $C'(4;8)$

Il triangolo ABC e il suo corrispondente ABC nell'omotetia di equazione $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$ sono indicati nella figura:



Omotetia con centro diverso dall'origine

Sono le stesse della dilatazione se poniamo $\mathbf{h=k}$

$$\begin{cases} x=hx+(1-h)x_o \\ y=ky+(1-h)y_o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=hx+a \\ y=hy+b \end{cases}$$

L'omotetia

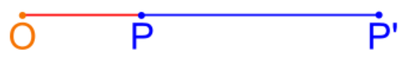
Definizione: Dati un numero reale $k \neq 0$ e un punto $\mathbf{P}$ del piano, si chiama omotetia di centro $\mathbf{O}$ e rapporto $\mathbf{k}$ la trasformazione che al punto $\mathbf{P}$ fa corrispondere il punto $\mathbf{P'}$ tale che

$$\mathbf{OP'=k \cdot OP}$$

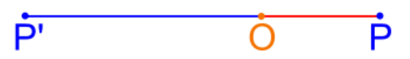
o, ciò che è la stessa cosa, al vettore $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$ fa corrispondere il vettore $\overrightarrow{\mathbf{OP'}}$ tale che: $\overrightarrow{\mathbf{OP'}}=\mathbf{k} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OP}}$

Il punto $\mathbf{O}$ è detto centro dell'omotetia mentre $\mathbf{k}$ è il rapporto di omotetia.

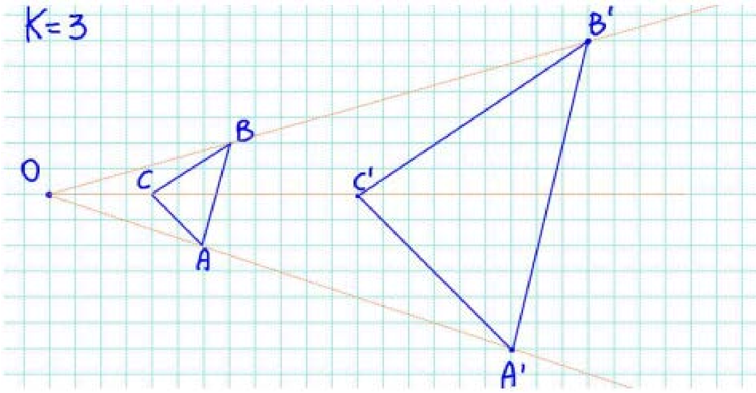
- Se $\mathbf{k>0}$, i punti $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P'}$ si trovano sulla stessa semiretta di origine $\mathbf{O}$ e l'omotetia è detta diretta; se $\mathbf{k<0}$ i punti $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P'}$ si trovano su due semirette opposte e l'omotetia è detta inversa.
- Se $|\mathbf{k}|>1$ la figura omotetica è ingrandita, se $|\mathbf{k}|<1$ la figura omotetica è rimpicciolita.



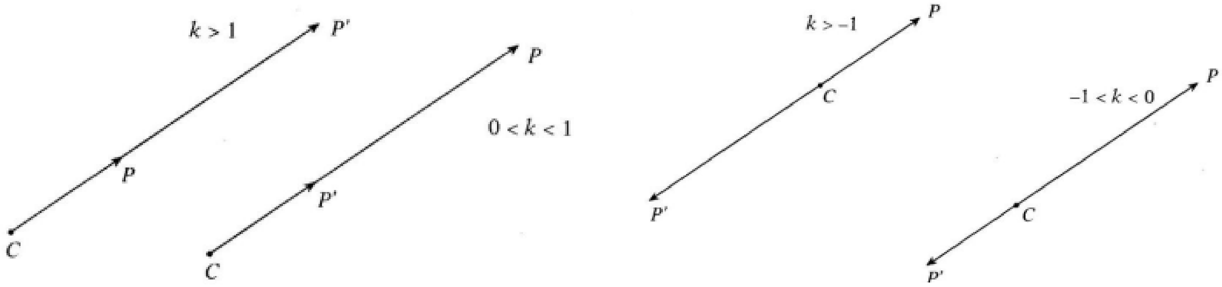
Omotetia diretta



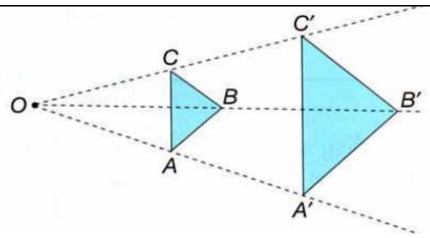
Omotetia inversa



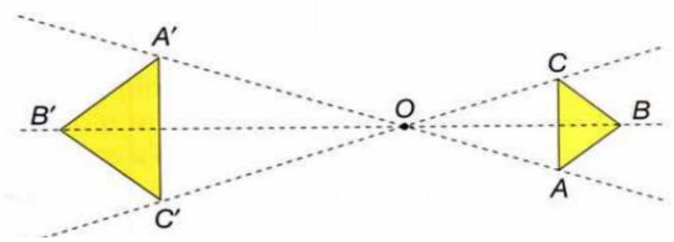
Omotetia diretta di centro **O** e rapporto di omotetia $k=3$



Omotetia di centro C, la prima omotetia diretta la seconda omotetia inversa.



Omotetia diretta di centro O

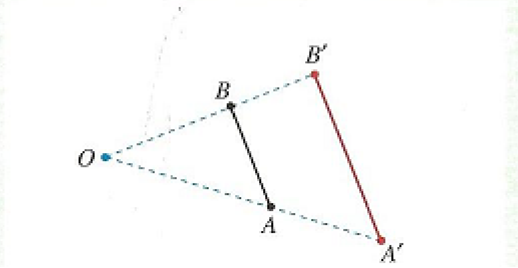


Omotetia inversa di centro O

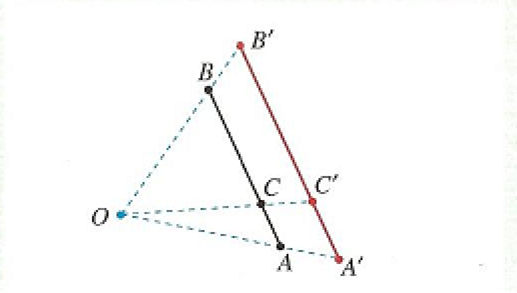
Proprietà fondamentali dell’omotetia

Proprietà fondamentali dell’omotetia

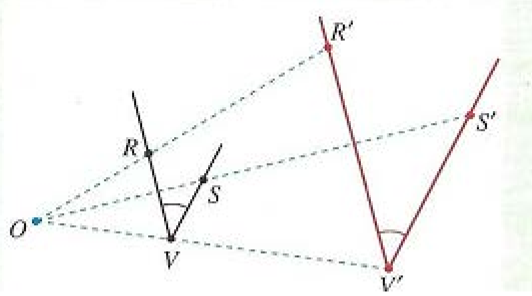
- Se due figure sono omotetiche il rapporto tra la distanza di due punti di una figura e la distanza dei corrispondenti punti dell’altra è uguale al rapporto di omotetia.



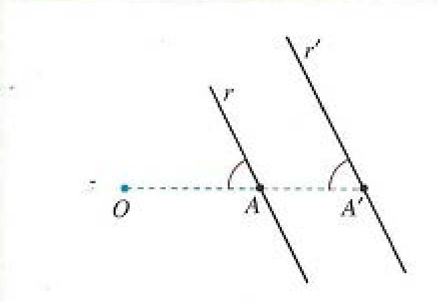
- Data una omotetia, a punti allineati corrispondono punti allineati.
Per esempio, se A, B, C sono allineati anche A', B', C' sono allineati.



- Un angolo e il suo trasformato con una omotetia sono angoli congruenti.



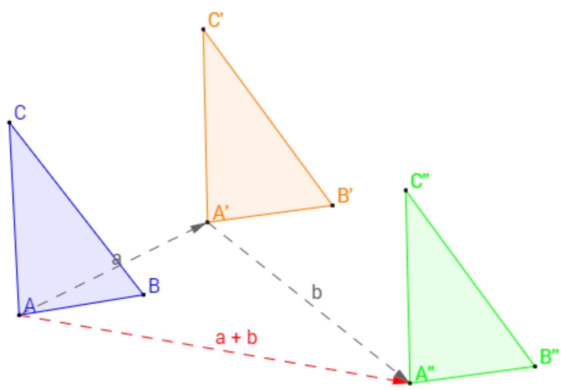
- Due rette omotetiche sono parallele.



La composizione di due traslazioni

Cosa succede se applichiamo una dopo l’altra due traslazioni alla stessa figura geometrica?

Applicando successivamente al triangolo ABC le traslazioni di vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ otteniamo la stessa traslazione che otterremo applicando al triangolo ABC la traslazione di vettore somma $\vec{a}+\vec{b}$.

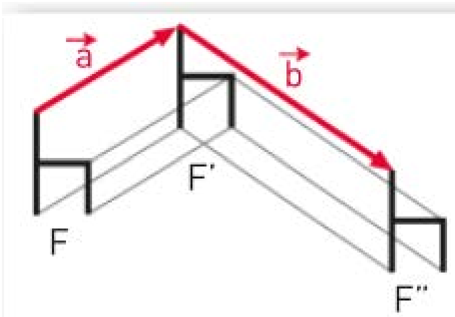


Il vettore della nuova traslazione ottenuta componendo due traslazioni successive è il vettore somma ottenuto sommando i vettori delle due traslazioni di partenza.

La composizione di due traslazioni

Applichiamo la traslazione $\mathbf{t}_{\vec{a}}$ alla figura **F** indicata a lato. Alla figura **F** corrisponde la figura **F′**. La traslazione $\mathbf{t}_{\vec{b}}$ fa corrispondere alla figura **F′** la figura **F″**. La composizione delle due traslazioni $\mathbf{t}_{\vec{b}} \circ \mathbf{t}_{\vec{a}}$ è una nuova traslazione $\mathbf{t}_{\vec{c}}$ il cui vettore $\vec{c}$ è la somma dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $\quad \mathbf{t}_{\vec{b}} \circ \mathbf{t}_{\vec{a}} = t_{\vec{c}} = \mathbf{t}_{\vec{a}+\vec{b}}$

La composizione di due traslazioni è commutativa, cioè: $\mathbf{t}_{\vec{b}} \circ \mathbf{t}_{\vec{a}} = \mathbf{t}_{\vec{a}} \circ \mathbf{t}_{\vec{b}}$



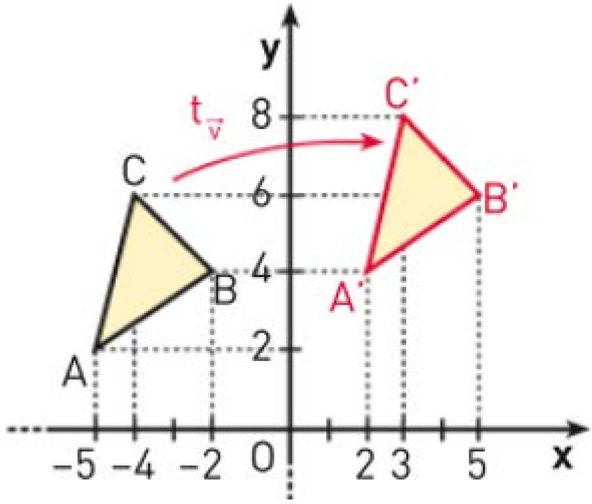
Esempio numerico

Sono dati il triangolo di vertici $A(-5;2)$, $B(2;4)$ e $C(-4;6)$ e il vettore $\vec{v}(7;2)$. Trasliamo il triangolo ABC secondo il vettore $\vec{v}(7;2)$ e otteniamo il vettore $A'B'C'$. Trasliamo il vettore $A'B'C'$ secondo il vettore $\vec{w}(2;-7)$ ottenendo il triangolo $A''B''C''$. Calcolare le equazioni della trasformazione composta che associa al triangolo ABC il triangolo $A''B''C''$.

Le equazioni della prima traslazione sono: $\begin{cases} x' = x + 7 \\ y' = y + 2 \end{cases}$.

Calcoliamo le coordinate del punto A': $\begin{cases} x' = x + 7 = -5 + 7 = 2 \\ y' = y + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases}$ $\quad \mathbf{A'(2;4)}$

In modo analogo otteniamo: $\mathbf{B'(5;6)}$ $\quad \mathbf{C'(3;8)}$



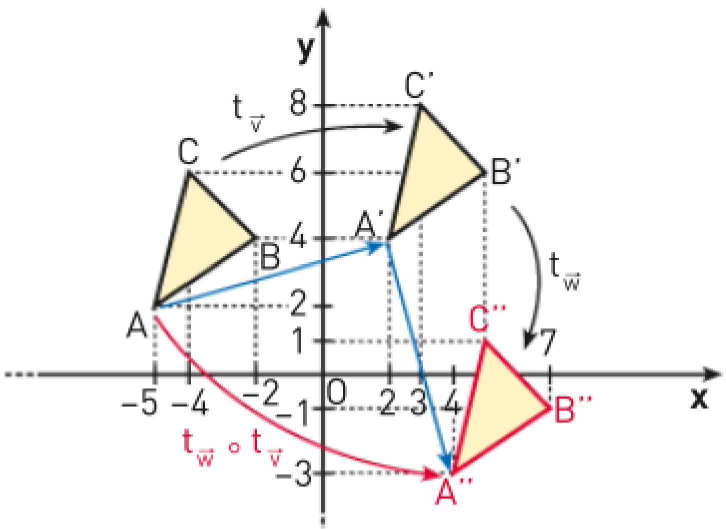
Scriviamo le equazioni della seconda traslazione indicando con x'' e y'' le coordinate del generico punto trasformato: $\begin{cases} \mathbf{x''=x'+2} \\ \mathbf{y''=y-7} \end{cases}$

Queste equazioni ci consentono di calcolare le coordinate di A'',B'',C'' a partire da quelle di A',B',C'. Sostituendo otteniamo: $\mathbf{A''(4;-3),B''(7;-1),C''(5;1)}$

Determiniamo le equazioni della trasformazione composta.

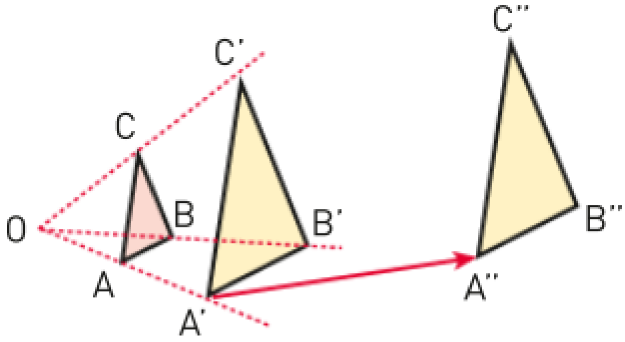
$$\begin{cases} x''=x'+2=(x+7)+2=x+9 \\ y''=y'-7=(y+2)-7=y-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{x''=x+9} \\ \mathbf{y''=y-5} \end{cases}$$

Queste sono le equazioni della trasformazione composta che al triangolo ABC fa corrispondere il triangolo $A''B''C''$. Si tratta di una traslazione di vettore $\vec{u}(9;-5)$. Osserviamo che le componenti del vettore $\vec{u}(9;-5)$ sono la somma delle componenti dei vettori $\vec{v}(7;2)$ e $\vec{w}(2;-7)$



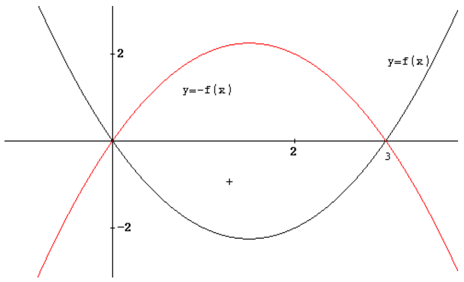
La composizione di due omotetie

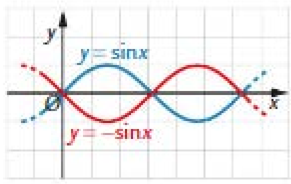
La composizione di due omotetie aventi lo stesso centro **O** e rapporti k e h numeri reali diversi da zero, è un'omotetia con centro in **O** e rapporto uguale al prodotto kh

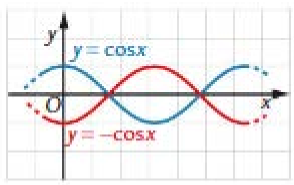


Grafici delle funzioni ottenuti dal grafico della funzione $y=f(x)$

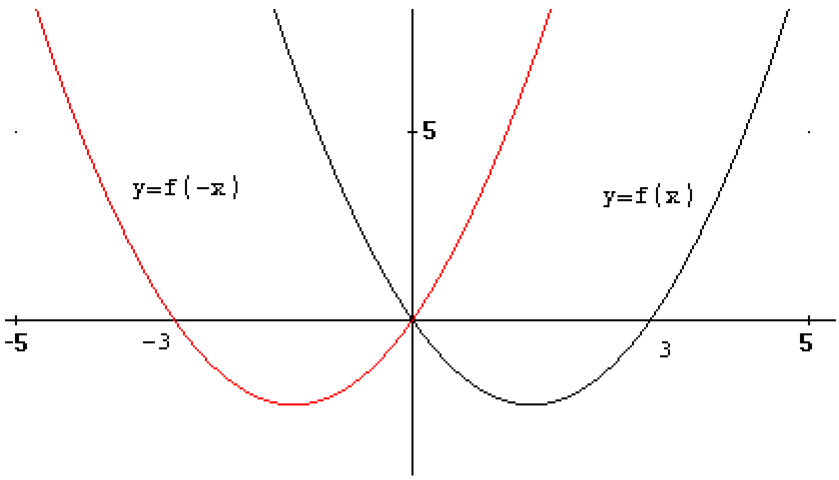
01) Il grafico della funzione $-f(x)$ è il simmetrico, rispetto all'asse x, del grafico della funzione $f(x)$ $\quad y = f(x) = x^2 - 3x \quad , \quad y = -f(x) = -x^2 + 3x$







02) Il grafico della funzione $f(-x)$ è il simmetrico, rispetto all'asse y, del grafico della funzione $f(x)$ $\quad y = f(x) = x^2 - 3x \quad , \quad y = f(-x) = x^2 - 3x$

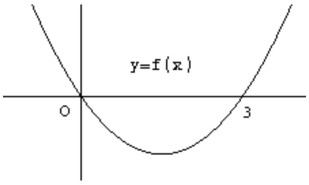


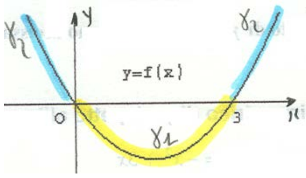
Il grafico della funzione $f(-x)$ è il simmetrico, rispetto all'asse y, del grafico della funzione $f(x)$

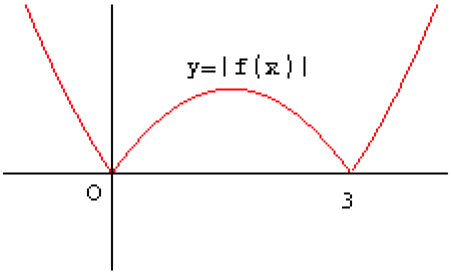
03) Il grafico della funzione $y = |f(x)|$ si ottiene

- tracciando la parte del grafico della funzione $y = f(x)$ che ha ordinate positive o nulle
- tracciando la simmetrica rispetto all'asse delle **x** della parte del grafico di $y = f(x)$ che ha ordinate negative.

$y = f(x) = x^2 - 3x \qquad y = |f(x)| = |x^2 - 3x|$





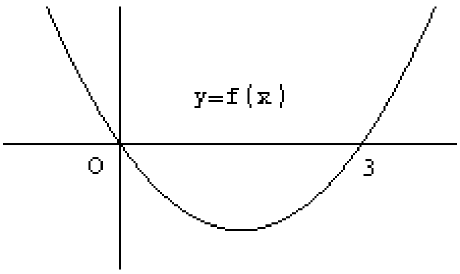


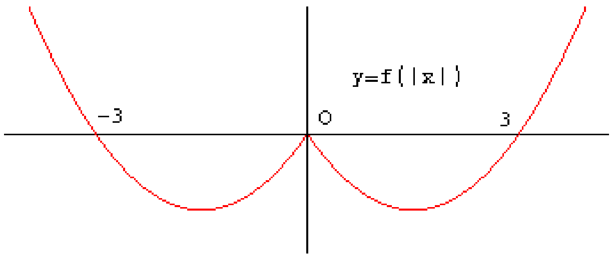
Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene dal grafico γ della funzione $f(x)$ sostituendo la parte situata nel semipiano delle y negative con il simmetrico di γ rispetto all'asse **y**.

04) Il grafico della funzione $y = f|x|$ si può ottenere tracciando:

- la parte del grafico della funzione $f(x)$ che ha ascisse positive o nulle
- il grafico simmetrico rispetto all'asse **y** del grafico tracciato nel punto precedente

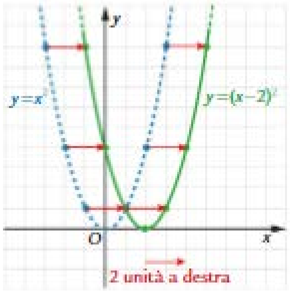
$y = f(x) = x^2 - 3x \qquad y = f(|x|) = x^2 - 3|x|$

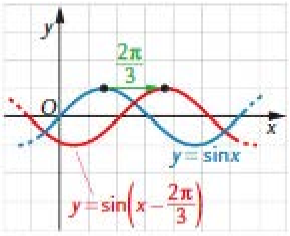




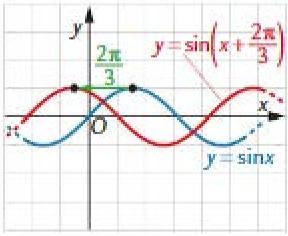
05) Per disegnare il grafico della funzione $y = f(x-a)$, con $a > 0$, basta traslare orizzontalmente verso destra di a unità il grafico della funzione $y = f(x)$ $\quad x \to x + a$

Il grafico della funzione $y = (x-2)^2$ si ottiene dal grafico della funzione $y = x^2$ spostandolo orizzontalmente di 2 unità verso destra.

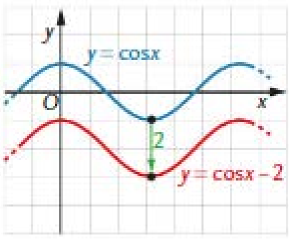




06) Per disegnare il grafico della funzione $y=f(x+a)$, con $a>0$, basta traslare orizzontalmente verso sinistra di a unità il grafico della funzione $y=f(x)$ $\quad x\rightarrow x-a$

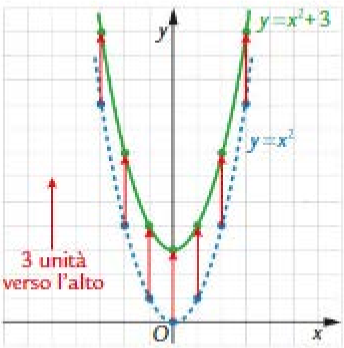


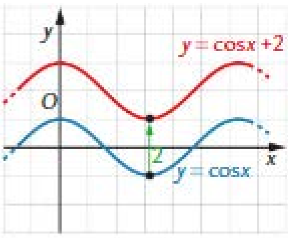
07) Per disegnare il grafico della funzione $y=f(x)-a$, con $a>0$, basta traslare verticalmente verso il basso di a unità il grafico della funzione $y=f(x)$ di a unità



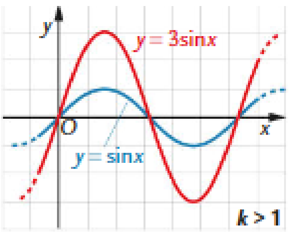
08) Per disegnare il grafico della funzione $y=f(x)+a$, con $a>0$, basta traslare verticalmente verso l'alto di a unità il grafico della funzione $y=f(x)$ di a unità

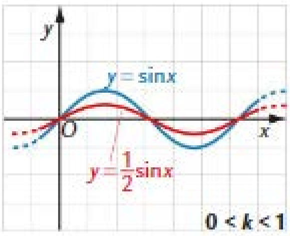
Il grafico della funzione $y=x^2+3$ si ottiene dal grafico della funzione $y=x^2$ mediante una traslazione verticale di 3 unità verso l'alto.





09) Il grafico della funzione $y=k\,f(x)$ si ottiene dilatando verticalmente di un fattore k il grafico della funzione $y=f(x)$

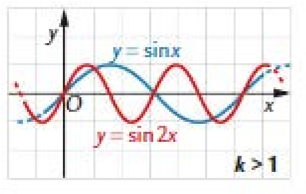


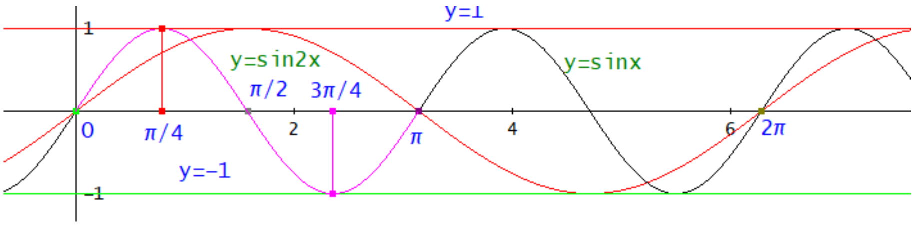


10) Il grafico della funzione $y=f(k\,x)$ si ottiene dilatando orizzontalmente di un fattore $\frac{1}{k}$ il grafico della funzione $y=f(x)$. $k>1$ il grafico della funzione si accorcia orizzontalmente, $0<k<1$, il grafico della funzione si allarga orizzontalmente.

Disegnare il grafico della funzione $\mathbf{y=\sin 2x}$ $\quad k=2 \quad \frac{1}{k}=\frac{1}{2} \quad T=\frac{2\pi}{\pi}=\pi$

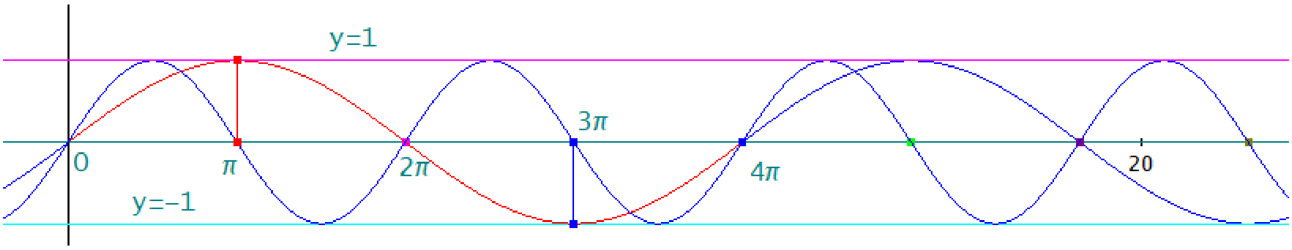
Si parte dal grafico della funzione $y=\sin x$ e si dilata orizzontalmente di un fattore $\frac{1}{k}$, cioè tale dilatazione determina un accorciamento cioè le ascisse dei punti del grafico della funzione $y=\sin x$ si dimezzano.

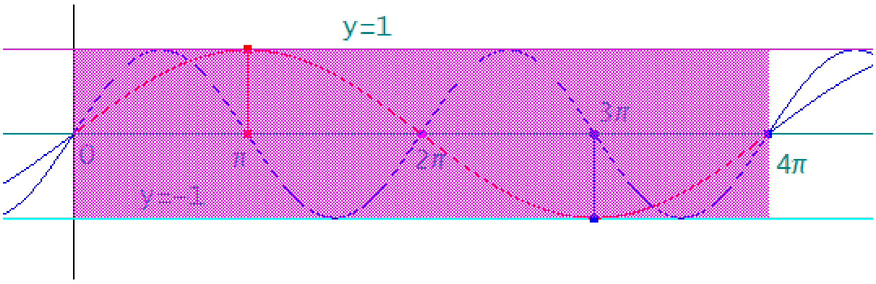


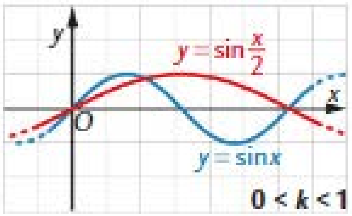


Disegnare il grafico della funzione $\mathbf{y=\sin\frac{1}{2}x}$ $\quad k=\frac{1}{2} \quad \frac{1}{k}=2 \quad T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

In questo caso le ascisse dei punti del grafico della funzione $y=\sin x$ si raddoppiano. Il grafico della funzione si allarga orizzontalmente.



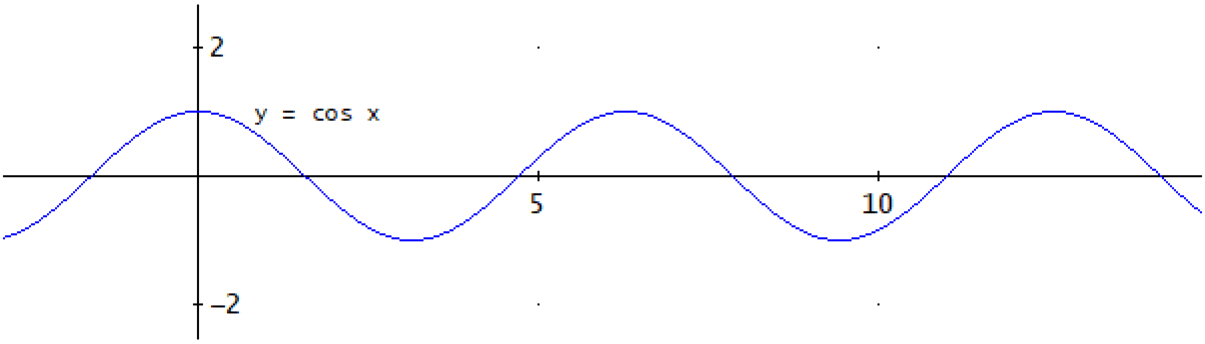


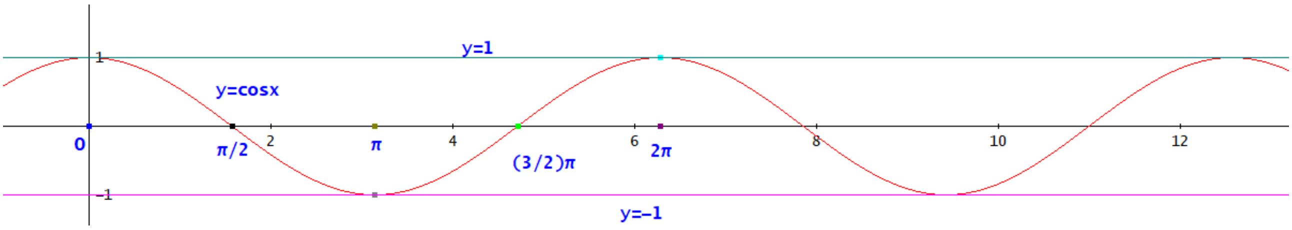


Tracciare il grafico di una funzione goniometrica complessa utilizzando opportune trasformazioni e dopo avere calcolato il periodo della funzione

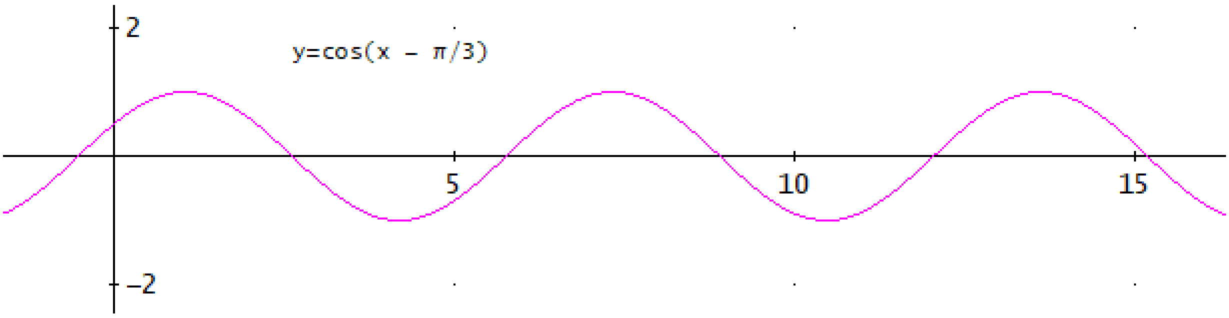
Consideriamo la funzione $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ Il periodo è: $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

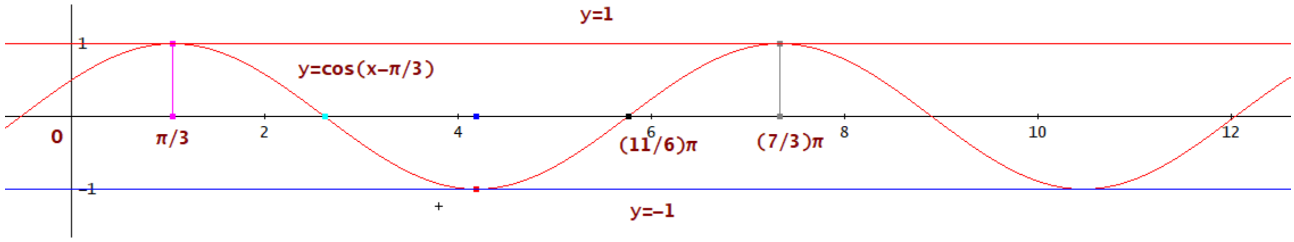
Si disegna $y=\cos x$



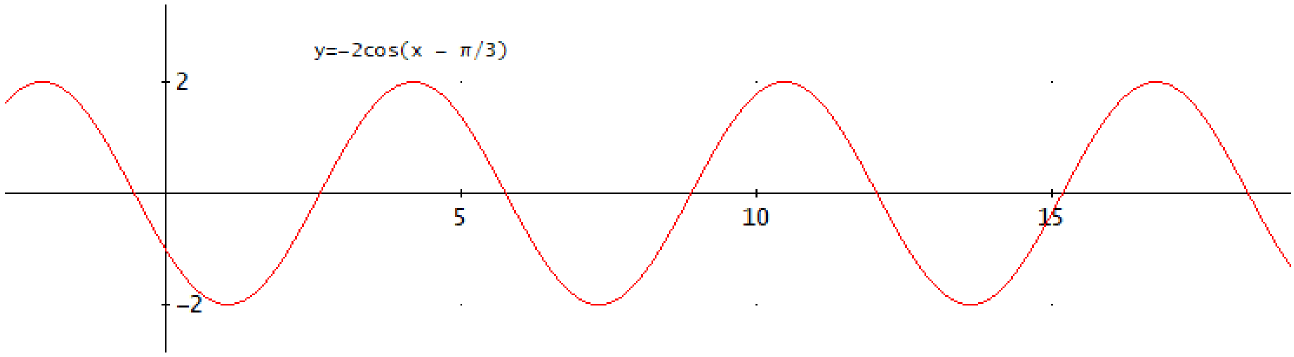


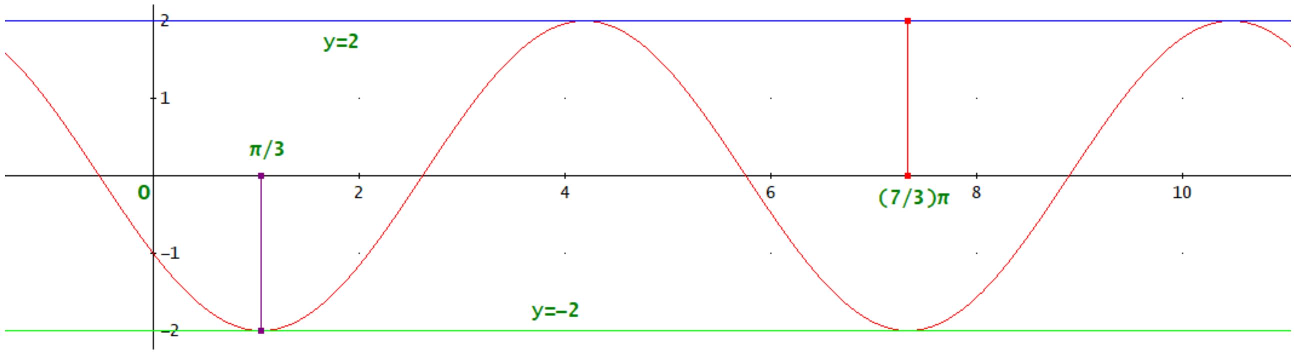
Si trasla il grafico di $\cos x$ verso destra di $\frac{\pi}{3}$ e si ottiene $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ $x\to x+\frac{\pi}{3}$



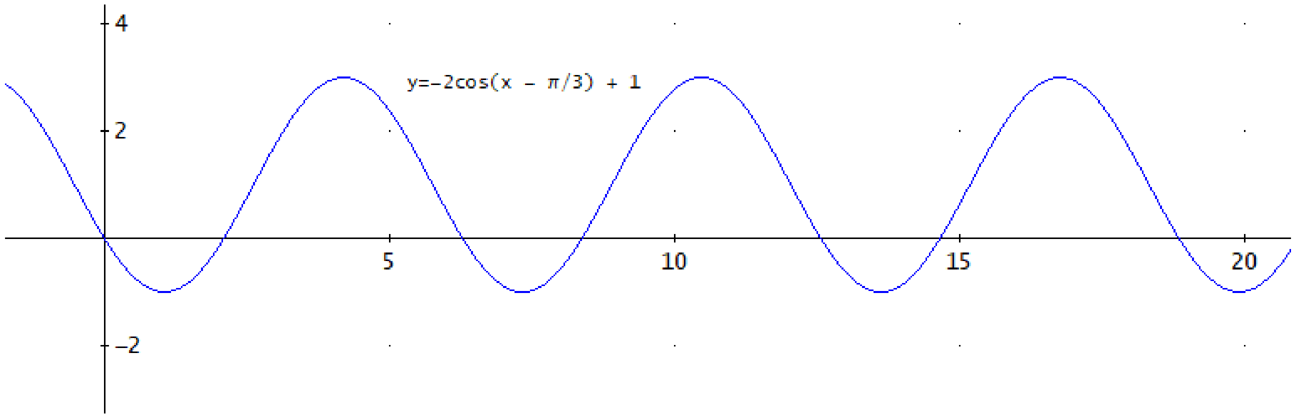


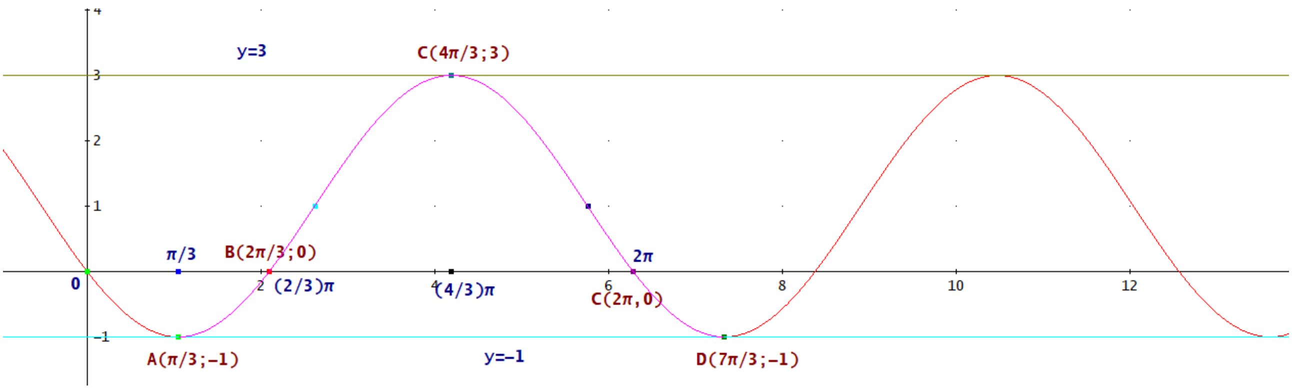
Si dilata verticalmente di -2, cioè si moltiplica la y per -2 e si ottiene $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$



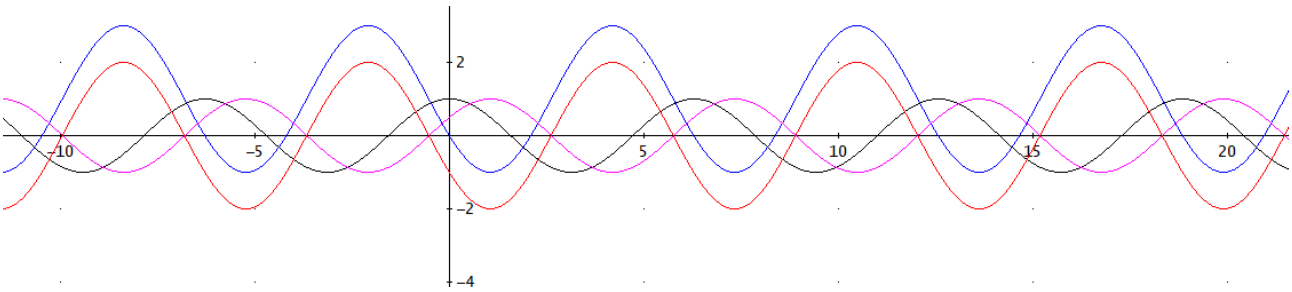


Traslare il grafico ottenuto verticalmente verso l'alto di 1 e si ottiene il grafico della funzione richiesta, cioè di: $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$





Tutti in grafici che conducono al grafico della nostra funzione



Regola pratica

Consideriamo la funzione $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ Il periodo è: $T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

Si disegna $y=\cos x$ e si costruisce la tabella:

		$y=\cos x$	$T=2\pi$		
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
y	1	0	-1	0	1

Si trasla il grafico di $\cos x$ verso destra di $\frac{\pi}{3}$ e si ottiene $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ $x\to x+\frac{\pi}{3}$

Si costruisce la tabella:

		$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$	$T=2\pi$		
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$	$\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi$	$2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{3}\pi$
y	1	0	-1	0	1

Si dilata verticalmente di -2, cioè si moltiplica la y per -2 e si ottiene $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Si costruisce la tabella:

		$y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$	$T=2\pi$		
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$
y	-2	0	2	0	-2

Traslare il grafico ottenuto verticalmente verso l'alto di 1 e si ottiene il grafico della funzione richiesta, cioè di: $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1 \quad y\to y+1$

Si costruisce la tabella:

		$y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1$	$T=2\pi$		
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$
y	-1	1	3	1	-1

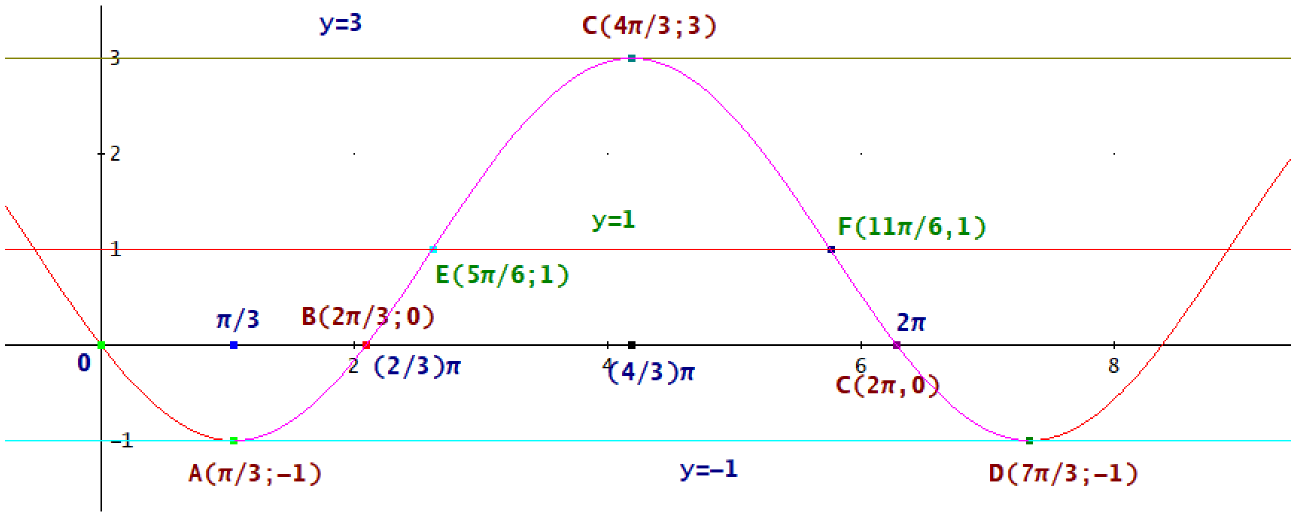
Utilizzando i punti $A\left(\frac{\pi}{3};-1\right)$, $C\left(\frac{4}{3}\pi;3\right)$, $D\left(\frac{7}{3}\pi;-1\right)$, $E\left(\frac{5}{6}\pi;1\right)$, $F\left(\frac{11}{6};1\right)$

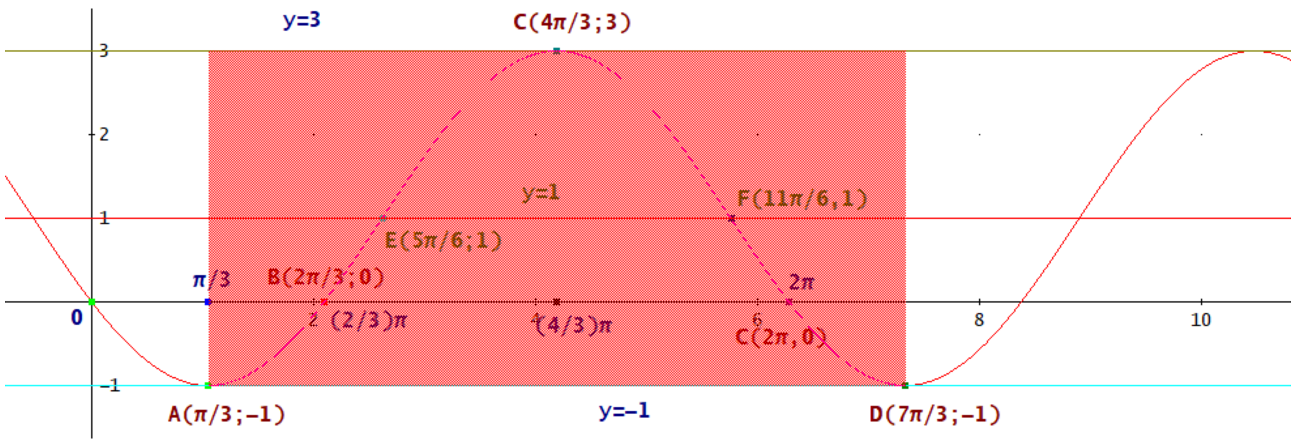
Per una maggiore precisione nel disegno del grafico della funzione possiamo trovare i punti dove si annulla.

La funzione si annulla nei punti $\mathbf{B\left(\frac{2}{3}\pi;0\right)}$ e $\mathbf{C(2\pi;0)}$

$y=0 \Rightarrow -2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0 \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \quad x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3} \quad x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}\pi}$

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi \quad x=\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=\frac{6}{3}\pi=\mathbf{2\pi}$





N.B. Per disegnare il grafico potrebbero bastare i punti $A\left(\frac{\pi}{3};-1\right)$, $C\left(\frac{4}{3}\pi;3\right)$, $D\left(\frac{7}{3}\pi;-1\right)$ e l'andamento del grafico della funzione coseno.

Se non vogliamo calcolare il grafico della funzione goniometrica proposta col metodo delle trasformazioni geometriche possiamo farlo in base alle seguenti considerazioni:

- Vedere in quali punti la funzione assume il valore massimo, il valore minimo e dove si annulla. $-1 \leq -2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

Il valore massimo si ottiene quando risulta $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ $\quad x-\frac{\pi}{3}=\pi$ $\quad x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi$

$y=2+1=3$ $\quad C\left(\frac{4}{3}\pi;3\right)$

l valore minimo si ottiene quando risulta $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ $\quad x-\frac{\pi}{3}=0$ $\quad x=\frac{\pi}{3}$

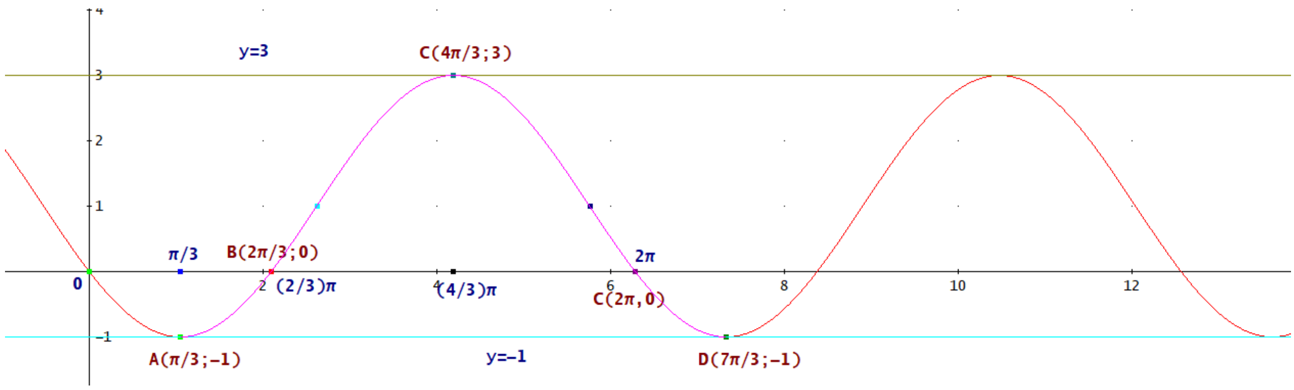
$y=-2+1=-1$ $\quad A\left(\frac{\pi}{3};-1\right)$

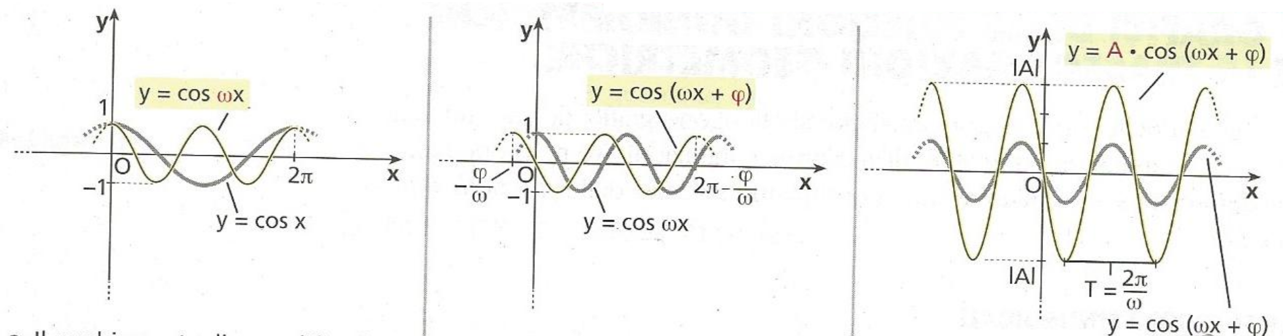
$x-\frac{\pi}{3}=2\pi$ $\quad x=\frac{7}{3}\pi$ $\quad y=-2+1=-1$ $\quad D\left(\frac{7}{3}\pi;-1\right)$

La funzione si annulla nei punti $B\left(\frac{2}{3}\pi;0\right)$ e $C(2\pi;0)$

$y=0 \Rightarrow -2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$ $\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ $\quad x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ $\quad x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$ $\quad x=\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=\frac{6}{3}\pi=2\pi$





a. Il cambiamento di ω modifica il periodo della funzione.

b. Il cambiamento di φ produce una traslazione orizzontale.

c. Il cambiamento di |*A*| genera una dilatazione o contrazione verticale.