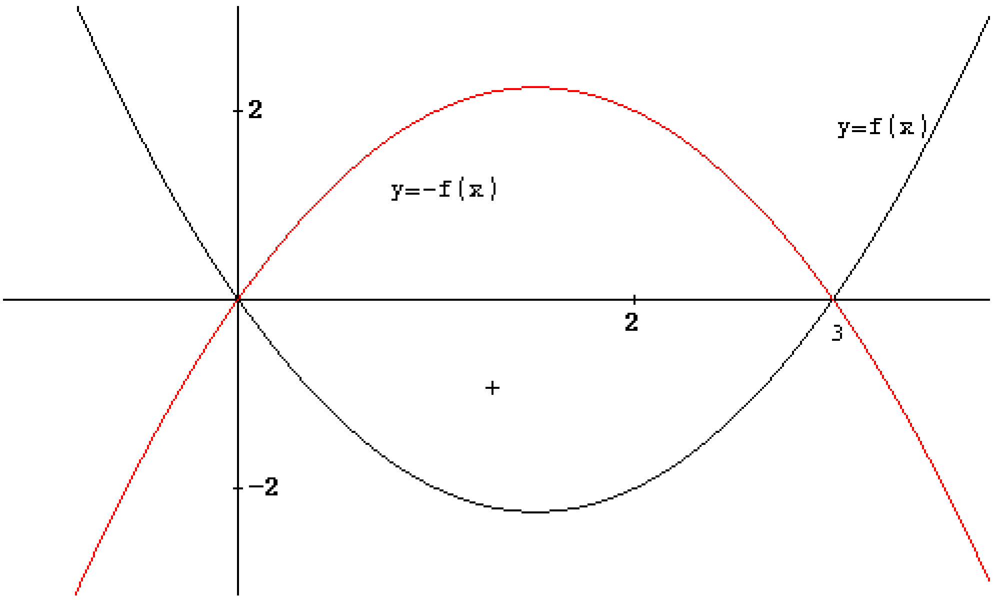
Grafici delle funzioni ottenuti dal grafico della funzione $y = f(x)$

Ci proponiamo di costruire i grafici delle funzioni $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$ **quando conosciamo il grafico** γ **della funzione** $y = f(x)$ **.**

Indichiamo con γ_1 **il tratto di** γ **i cui punti hanno ordinata** $f(x) < 0$ **, con** γ_2 **il tratto di** γ **i cui punti hanno ordinata** $f(x) > 0$ **e con** γ_3 **il tratto di** γ **i cui punti hanno ascissa positiva .**

01) Il grafico della funzione $y = -f(x)$ **è il simmetrico di** γ **rispetto all'asse x .**

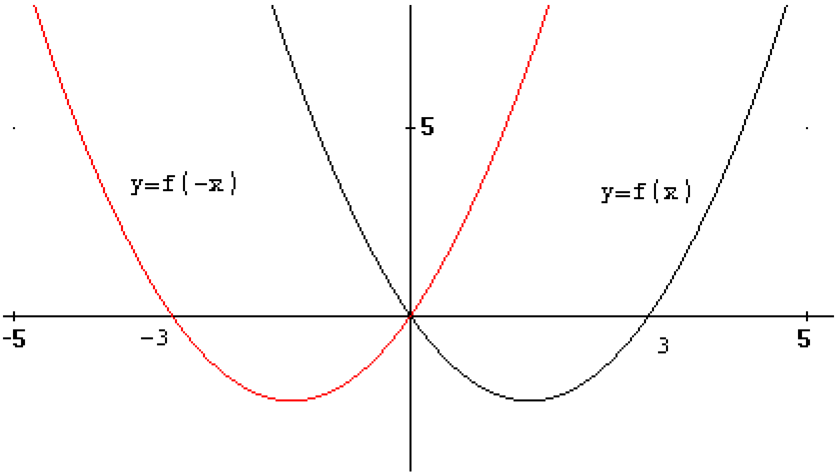
$$y = f(x) = x^2 - 3x \quad , \quad y = -f(x) = -x^2 + 3x$$



Il grafico della funzione $-f(\mathbf{x})$ è il simmetrico, rispetto all'asse x, del grafico della funzione $f(x)$

02) Il grafico della funzione $y = f(-x)$ **è il simmetrico di** γ **rispetto all'asse y .**

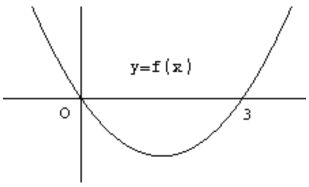
$$y = f(x) = x^2 - 3x \quad , \quad y = f(-x) = x^2 - 3x$$

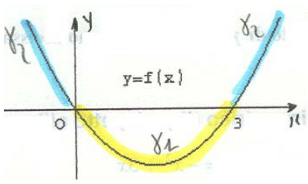


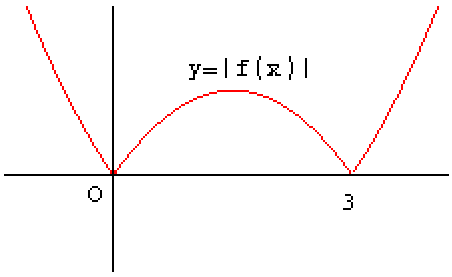
Il grafico della funzione $f(-x)$ è il simmetrico, rispetto all'asse y, del grafico della funzione $f(x)$

03) $y = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & se \quad f(x) < 0 \\ f(x) & se \quad f(x) \geq 0 \end{cases}$ **Il grafico della funzione** $y = |f(x)|$ **è la curva piana** $G(|f(x)|) = \delta = \gamma_2 \cup \overline{\gamma_1}$ **, dove** $\overline{\gamma_1}$ **è la curva simmetrica rispetto all'asse delle x della curva** γ_1 **.**

$y = f(x) = x^2 - 3x \qquad y = |f(x)| = |x^2 - 3x|$







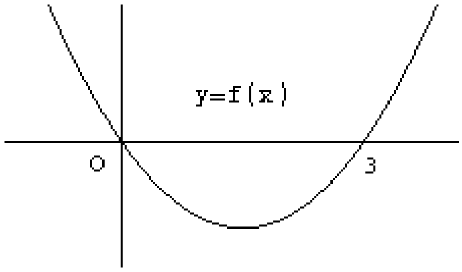
Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene dal grafico γ della funzione $f(x)$ sostituendo la parte situata nel semipiano delle y negative con il simmetrico di γ rispetto all'asse y. Con parole diverse possiamo dire che il grafico della funzione $|f(x)|$ è l'unione del grafico γ della funzione $f(x)$ negli intervalli dove risulta $f(x)>0$ e del simmetrico rispetto all'asse delle x del grafico γ della funzione $f(x)$ negli intervalli dove risulta $f(x)<0$.

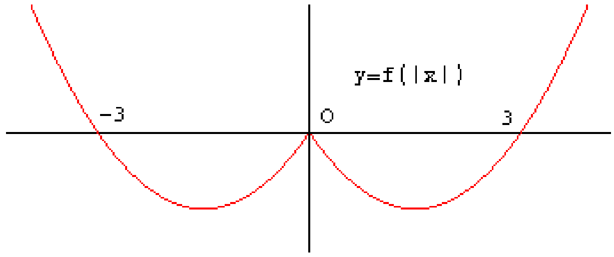
In simboli abbiamo:

$$G|f(x)|=G(f(x)) \; se \; f(x)>0 \cup G[-f(x)] \; se \; f(x)<0$$

04) $y = f(|x|) = \begin{cases} f(-x) & se \quad x \leq 0 \\ f(x) & se \quad x > 0 \end{cases}$ $G(f(|x|)) = \gamma_3 \cup \overline{\gamma_3}$ **dove** $\overline{\gamma_3}$ **è il simmetrico di** γ_3 **rispetto all'asse delle y dove** γ_3 **è il tratto di** γ **i cui punti hanno ascissa positiva .**

$y = f(x) = x^2 - 3x \qquad y = f(|x|) = x^2 - 3|x|$





05) $y = |f(|x|)| = \begin{cases} -f(|x|) & se \quad f(|x|) \leq 0 \\ f(|x|) & se \quad f(|x|) > 0 \end{cases}$

Per disegnare il grafico della funzione $y = |f(|x|)|$ **si procede come segue :**

a) Si disegna il grafico γ **della funzione** $y = f(x)$

b) Poi si costruisce il grafico della funzione $y = f(|x|)$

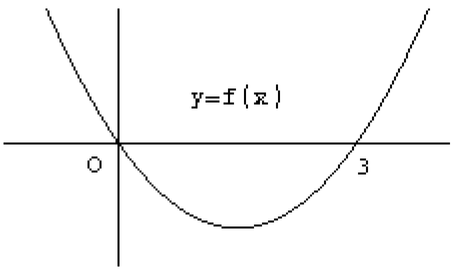
$G(f(|x|)) = \gamma_3 \cup \overline{\gamma_3} = \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ **dove** $\overline{\gamma_3}$ **è il simmetrico di** γ_3 **rispetto all'asse delle y .**

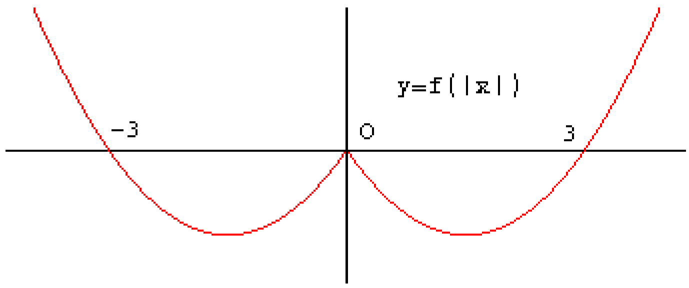
con σ_1 **tratto della curva** σ **aventi ordinata** $f(x)$ **negativa e** σ_2 **tratto della curva** σ **aventi ordinata** $f(x)$ **positiva .**

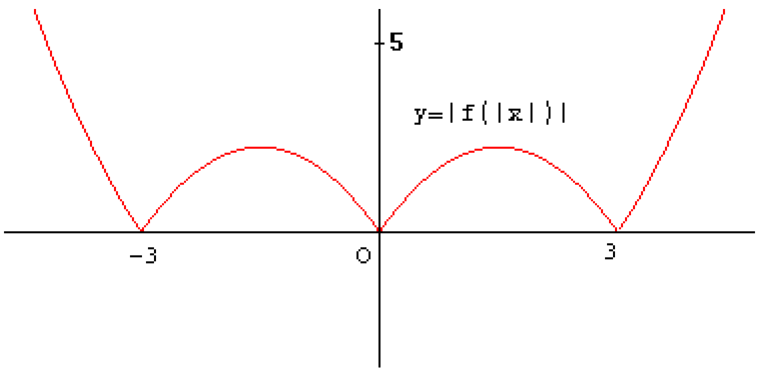
c) Poi si costruisce il grafico della funzione $y = |f(|x|)|$ **. Risulta :**

$G(|f(|x|)|) = \sigma_2 \cup \overline{\sigma_1}$, **con** $\overline{\sigma_1}$ **curva simmetrica di** σ_1 **rispetto all'asse delle y .**

$y = f(x) = x^2 - 3x \qquad y = |f(|x|)| = |x^2 - 3|x||$





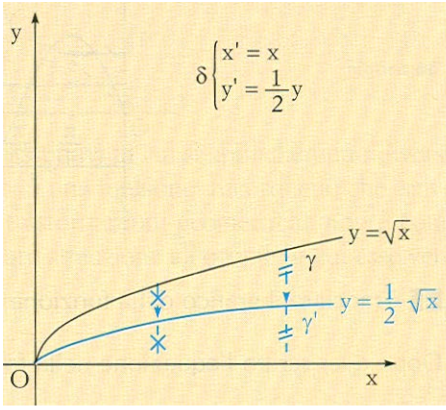


06) Il grafico γ_1 della funzione $y = k \cdot f(x)$ si ottiene applicando al grafico γ della funzione $y = f(x)$ una dilatazione verticale di rapporto k.

N.B. I punti di γ_1 hanno la stessa ascissa dei punti corrispondenti di γ ma non la stessa ordinata. $x_{\gamma_1} = x_\gamma$ $\quad y_{\gamma_1} = k \cdot y_\gamma$

$|k| < 1$ si ha **contrazione** $\quad |k| > 1$ si ha **dilatazione**

Il grafico γ_1 della funzione $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ si ottiene facendo corrispondere ad ogni punto di γ un punto di ordinata metà e con la stessa ascissa. La curva γ_1 risulta contratta nella direzione verticale. $k = \frac{1}{2}$



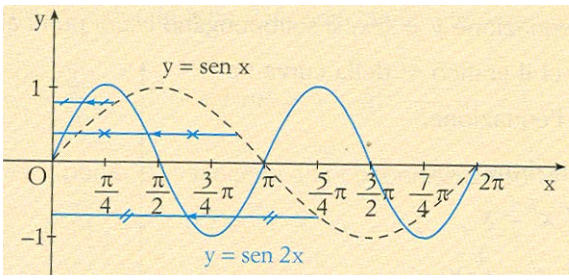
07) Il grafico γ_1 della funzione $y = f\left(\frac{x}{h}\right)$ si ottiene applicando al grafico γ della funzione $y = f(x)$ una dilatazione orizzontale di rapporto h.

N.B. I punti di γ_1 hanno la stessa ordinata dei punti corrispondenti di γ ma non la stessa ascissa. $x_{\gamma_1} = \frac{x_\gamma}{h}$ $\quad y_{\gamma_1} = y_\gamma$

$|h| > 1$ si ha **contrazione** $\quad |h| < 1$ si ha **dilatazione**

Dal grafico della funzione $y = \sin x$ dedurre quello della funzione $y = \sin 2x$.

Tracciato il grafico γ della funzione v ad ogni suo punto facciamo corrispondere il punto che ha la stessa ordinata e ascissa metà.



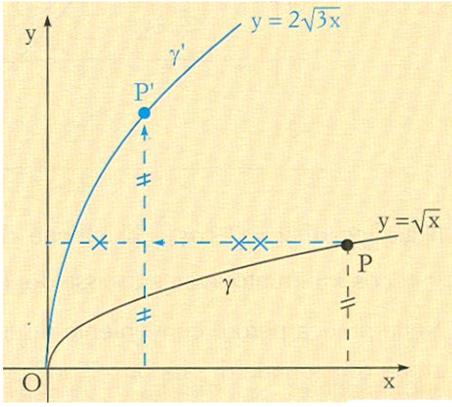
08) Il grafico γ_1 della funzione $y = k \cdot f\left(\frac{x}{h}\right)$ si ottiene applicando al grafico γ della funzione $y = f(x)$ una **dilatazione** orizzontale di rapporto h ed una **dilatazione** verticale di rapporto k.

N.B. I punti di γ_1 hanno coordinate che verificano le seguenti relazioni: $x_{\gamma_1} = \dfrac{x_\gamma}{h}$ $\quad y_{\gamma_1} = k \cdot y_\gamma$

$\begin{cases} X = h\,x \\ Y = k\,y \end{cases}$ **Equazioni di una dilatazione che è una particolare affinità**

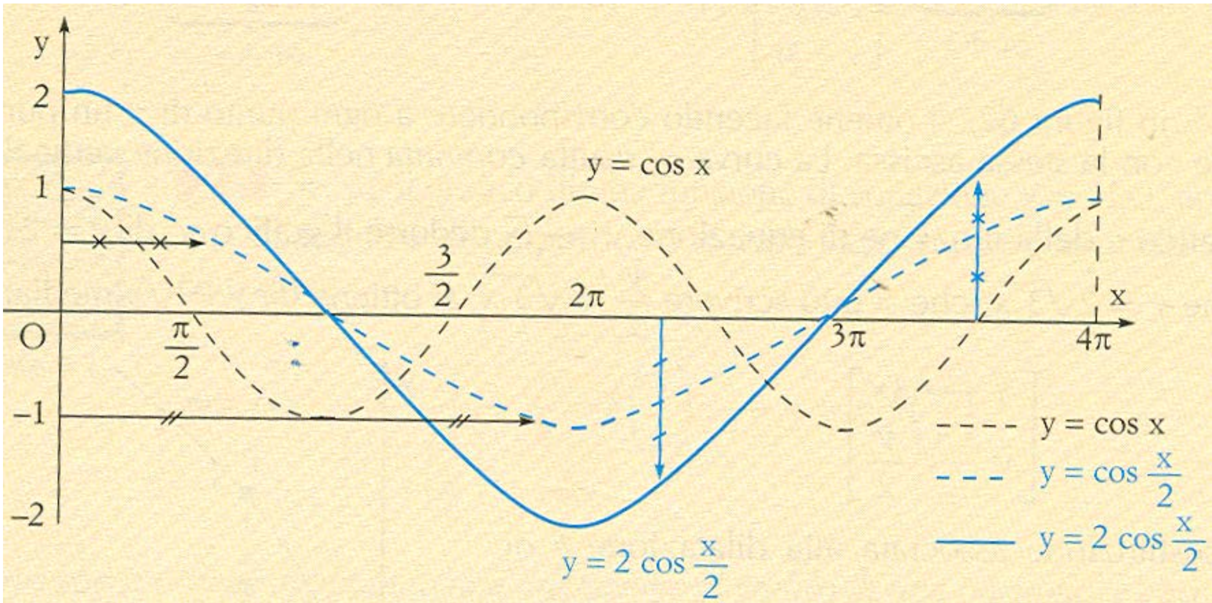
Dal grafico γ della funzione $y = \sqrt{x}$ dedurre il grafico γ_1 della funzione $y = 2\sqrt{3x}$ ($x_{\gamma_1} = \dfrac{x_\gamma}{h} = \dfrac{x}{3}$ $\quad y_{\gamma_1} = k \cdot y_\gamma = 2y$)

Dopo avere disegnato il grafico γ di equazione $y = \sqrt{x}$, il grafico γ_1 richiesto si otterrà facendo corrispondere ad ogni punto P di γ un punto P_1 che ha ascissa uguale ad un terzo di quella di P e ordinata doppia.



Esempio: Tracciare il grafico γ_1 della funzione $y = 2 \cdot \cos\dfrac{x}{2}$.

Tale grafico si ottiene facendo corrispondere ad ogni punto della curva γ di equazione $y = \cos x$ il punto avente ascissa doppia ed ordinata doppia.



Sintesi finale: Dato il grafico della funzione $f(x)$ costruire il grafico della funzione $y = n \cdot f(mx)$

- $m > 1$ dilatazione orizzontale
- $m < 1$ contrazione orizzontale
- $n < 1$ contrazione verticale
- $n > 1$ dilatazione verticale

09) **Il grafico γ_1 della funzione $y + \beta = f(x + \alpha)$ si ottiene applicando al grafico γ della funzione $y = f(x)$ la traslazione di vettore** $\vec{v}(-\alpha; -\beta) = -\alpha \cdot \vec{i} - \beta \cdot \vec{j}$.

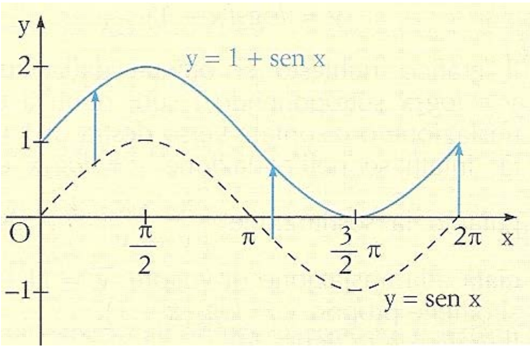
Se risulta $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) la traslazione orizzontale è "verso sinistra" ("verso destra")

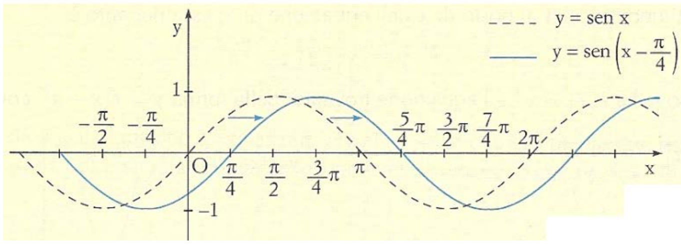
Se risulta $\beta > 0$ ($\beta < 0$) la traslazione verticale è “verso il basso” (“verso l’alto”)

Dal grafico delle funzione $y = f(x) = \sin x$ dedurre il grafico della funzione $y = 1 + \sin x$ cioè del grafico della funzione $y - 1 = \sin x$ ($\beta = -1 < 0$) Si ha una traslazione verso l’alto.

Dal grafico delle funzione $y = f(x) = \sin x$ dedurre il grafico della funzione $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} < 0$) Si ha una traslazione verso destra.





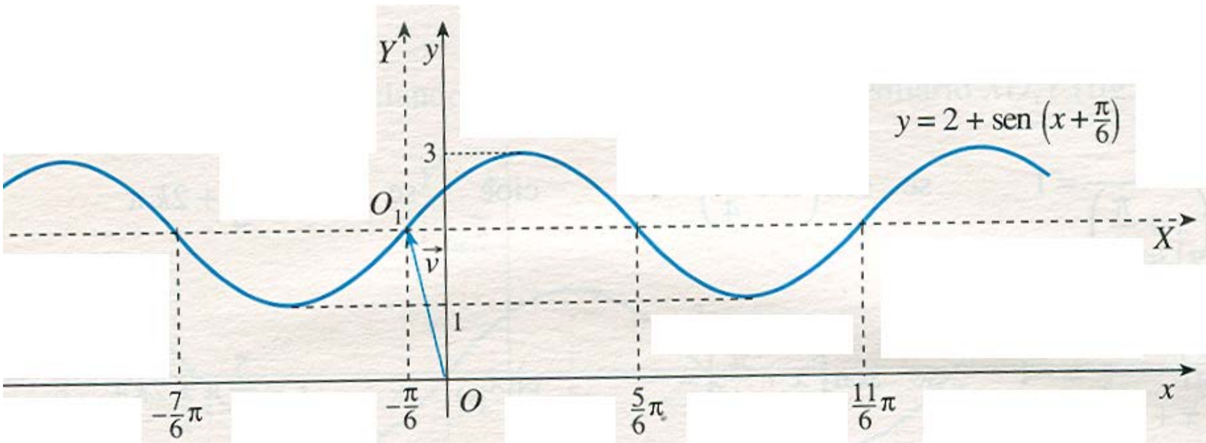
Esempio: Tracciare il grafico γ_1 della funzione $y = 2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ cioè: $y - 2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{6} > 0$, $\beta = -2 < 0$. Si ha una traslazione orizzontale verso sinistra ed una traslazione verticale verso l’alto.

Posto $\begin{cases} X = x + \frac{\pi}{6} \\ Y = y - 2 \end{cases}$ $\quad O_1\left(-\frac{\pi}{6}; 2\right)$ **nel sistema** O_1XY **la curva** γ_1 **ha equazione** $Y = \sin X$

Traslando la curva γ **di equazione** $y = \sin x$ **mediante il vettore** $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{6}; 2\right) = -\frac{\pi}{6} \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$

otteniamo la curva γ_1 **richiesta.**



Sintesi finale:

$y=f(x+h)$ traslazione orizzontale di vettore $\vec{v}=(-h,0)=-h\cdot\vec{i}$

$y+k=f(x)$ traslazione verticale di vettore $\vec{v}=(0,-k)=-k\cdot\vec{j}$

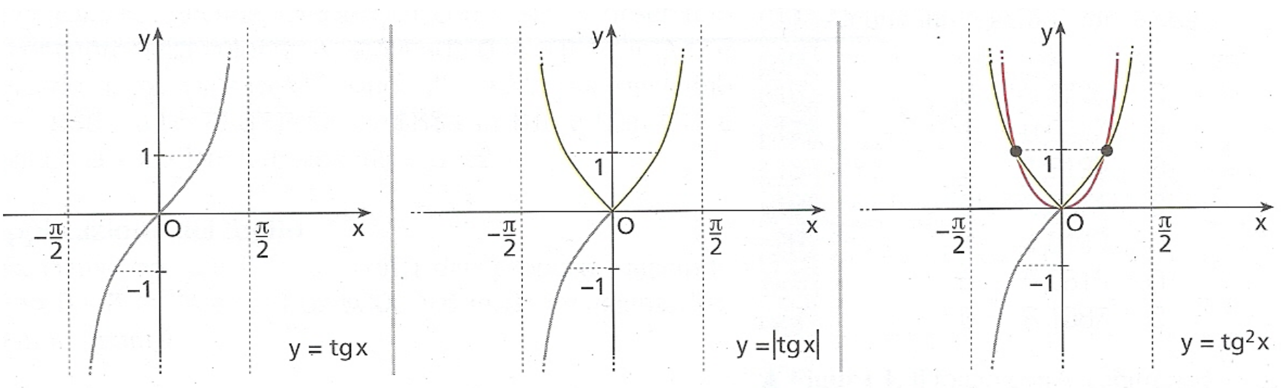
$y+k=f(x+h)$ traslazione di vettore $\vec{v}=(-h,-k)=-h\cdot\vec{i}-k\cdot\vec{j}$

10) Dal grafico della funzione $y=f(x)$ dedurre quello del grafico della funzione $y=[f(x)]^2=f^2(x)$.

Noi sappiamo che elevando al quadrato un numero reale relativo (cioè positivo o negativo) otteniamo sempre un numero reale positivo, che non dipende dal segno del numero reale iniziale ma soltanto dal suo valore assoluto. Si possono presentare i seguenti casi:

- $|f(x)|=1 \Rightarrow f^2(x)=1$
- $|f(x)|=0 \Rightarrow f^2(x)=0$
- $|f(x)|<1 \Rightarrow f^2(x)<|f(x)|$
- $|f(x)|<1 \Rightarrow f^2(x)>|f(x)|$

Dal grafico della funzione $y=tg\,x$ dedurre quello della funzione $y=tg^2\,x$ nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

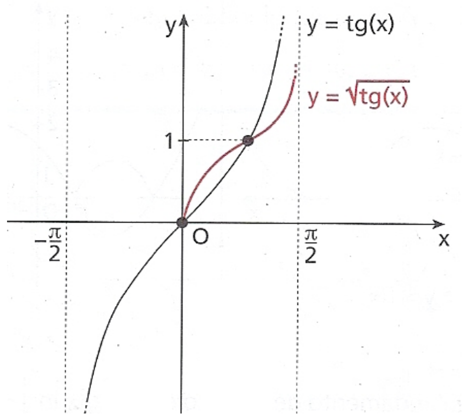


11) Dal grafico della funzione $y=f(x)$ dedurre quello del grafico della funzione $y=\sqrt{f(x)}$.

Si possono presentare i seguenti casi:

- $f(x)<0 \Rightarrow \sqrt{f(x)}$ non esiste
- $f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{f(x)}=0$
- $f(x)=1 \Rightarrow \sqrt{f(x)}=1$
- $0<f(x)<1 \quad f(x)<\sqrt{f(x)}<1$
- $f(x)>1 \Rightarrow 1<\sqrt{f(x)}<f(x)$

Dal grafico della funzione $y = tg\, x$ dedurre quello della funzione $y = \sqrt{tg\, x}$ nell'intervallo $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$



Simmetrie evidenti

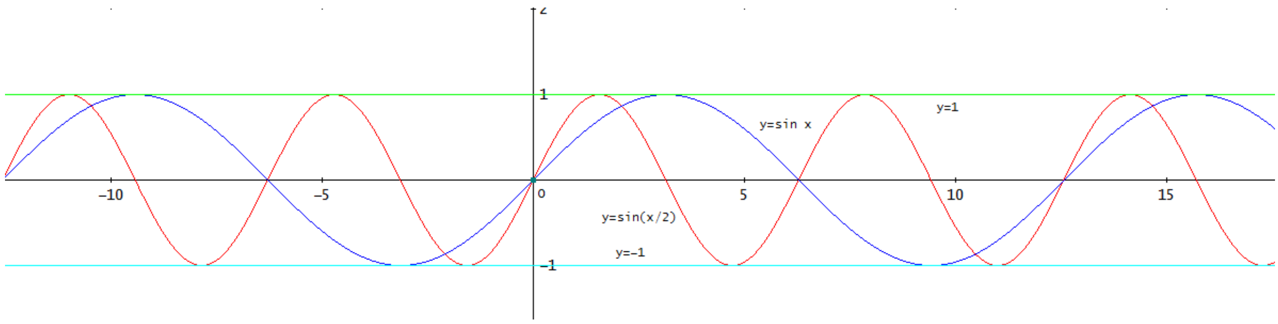
Per **simmetrie evidenti** intendiamo le simmetrie rispetto agli assi cartesiani ed alla loro origine, le simmetrie rispetto alle bisettrici degli angoli formati dagli assi cartesiani e le simmetrie rispetto alle rette orizzontali ed alle rette verticali.

A volte può essere utile sapere se il $G(f)$ (grafico della funzione) è simmetrico rispetto ad una generica retta del piano o rispetto ad un generico punto del piano .

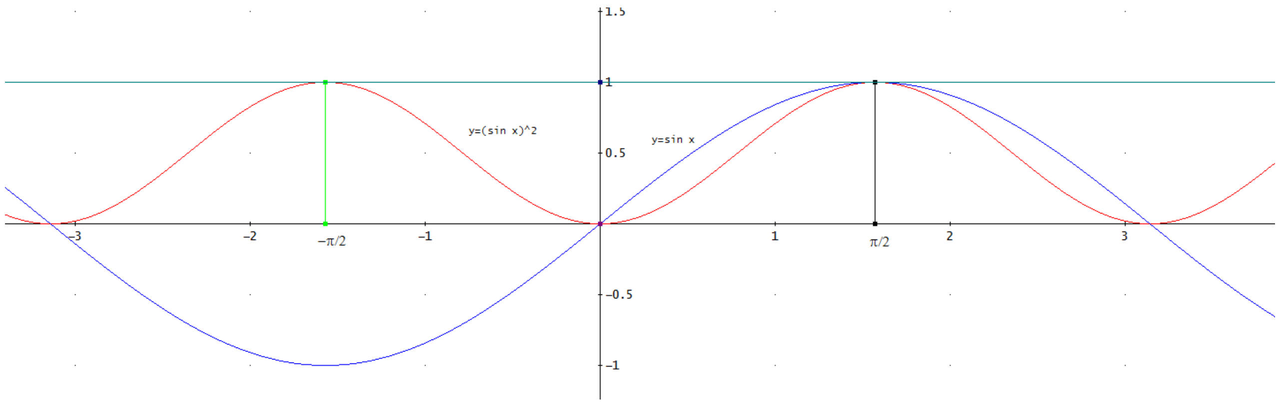
- $f(-x) = f(x) \Rightarrow G(f)$ **simmetrico rispetto all'asse delle ordinate** $f(x)$ è una **funzione pari.**
- $f(-x) = -f(x) \Rightarrow G(f)$ **simmetrico rispetto all'asse delle ascisse** $f(x)$ è una **funzione dispari.**
- La funzione univoca $f(x)$ non può mai essere simmetrica rispetto all'asse y in quanto la variabile y si presenta ad esponente 1 . Infatti una funzione è **simmetrica rispetto all'asse x** se la variabile x non muta quando cambiamo la y in $-y$, cioè se: $F(x,-y) = F(x,y)$. Si deve trattare, in ogni caso, di una funzione a più valori, cioè di una funzione del tipo $F(x,y)=0$.
- $f(2a - x) = f(x) \Rightarrow G(f)$ **simmetrico rispetto alla retta** di equazione $x = a$
- La curva di equazione $y = f(x)$ è **simmetrica rispetto alla retta** $y = x$ quando , scambiando al secondo membro la x con la y ed al primo membro la y con la x, l'equazione $y = f(x)$ non muta. L'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$ è simmetrica rispetto alla retta $y = x$.
- La curva di equazione $y = f(x)$ è **simmetrica rispetto alla retta** $y = -x$ (cioè rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante) quando , mutando nel secondo membro dell'equazione $y = f(x)$ x in $-y$ e nel primo membro y in $-x$, l'equazione $y = f(x)$ rimane invariata.

L'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$ è simmetrica rispetto alla retta $y = -x$.

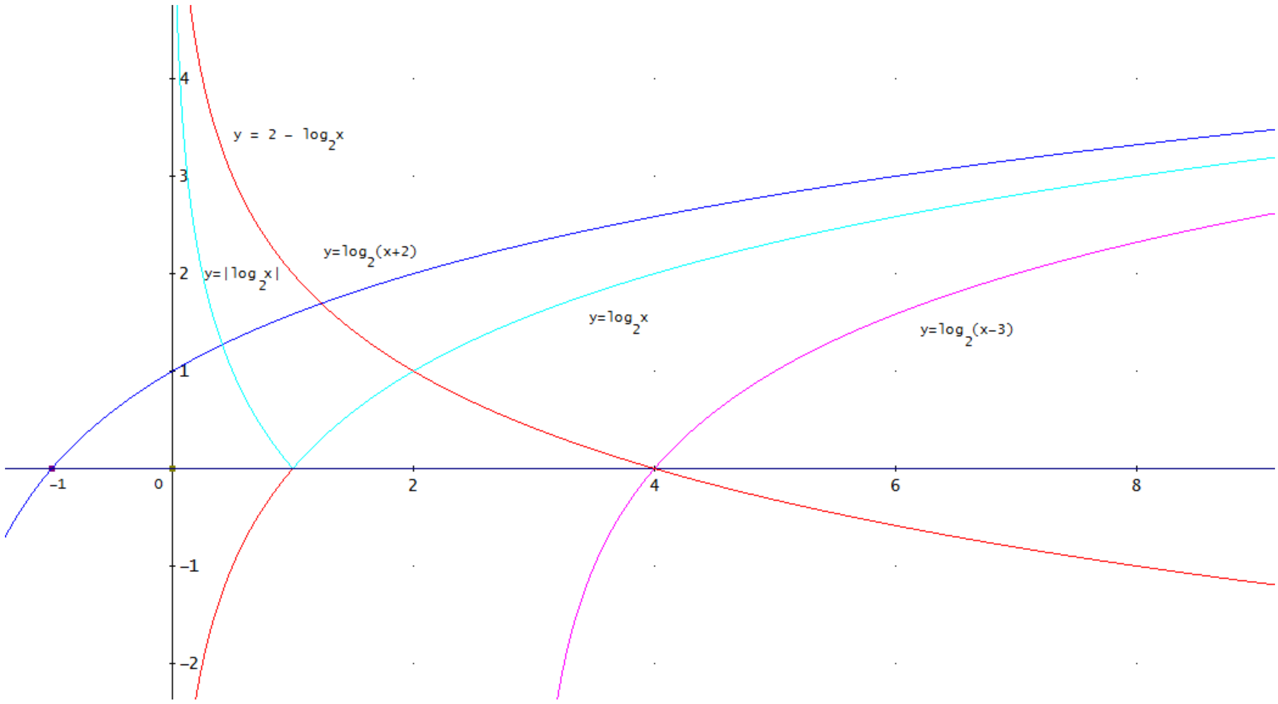
Grafici delle funzioni $\sin x$ e $\sin \frac{x}{2}$



Grafici delle funzioni $\sin x$ e $\sin^2 x$



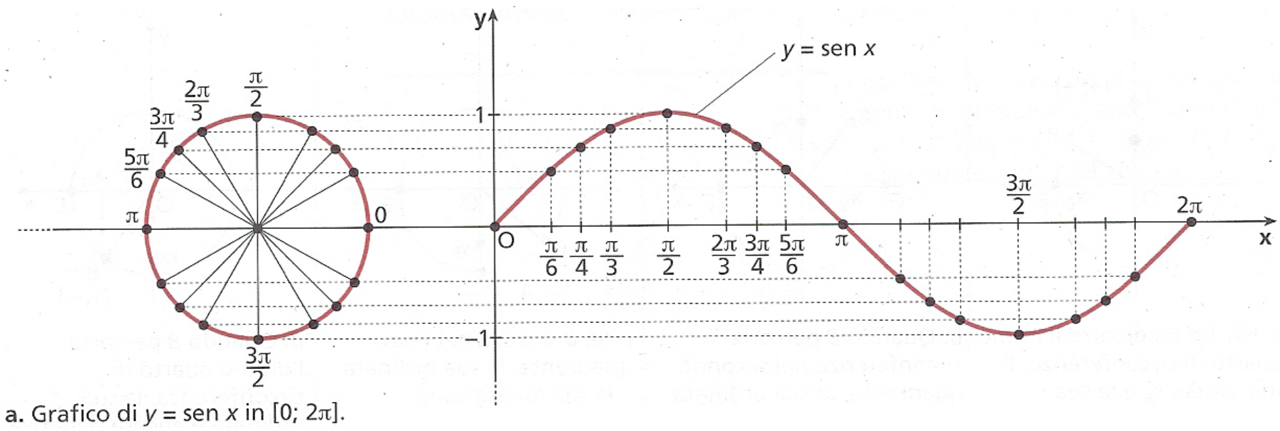
Grafici delle funzioni $y = \log_2 x$, $y = \log_2(x-3)$, $y = \log_2(x+2)$, $y = |\log_2 x|$, $y = 2 - \log_2 x$



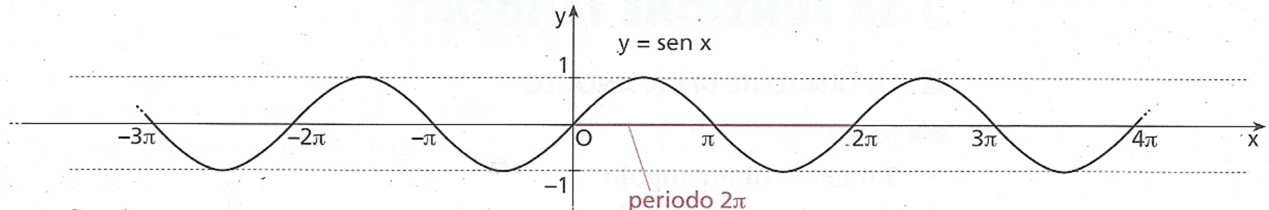
Bibliografia

- **Lanberti Mereu Nanni 2B pagina 138 1B pagina 72**
- **Bergamini Trifone Barozzi Vol 3 Modulo O Goniometria pagina O29**
- **Dodero Baroncini manfredi Modulo D pagina 48**

Grafici fondamentali



a. Grafico di $y = \text{sen } x$ in $[0; 2\pi]$.



a. Grafico di $y = \text{sen } x$.

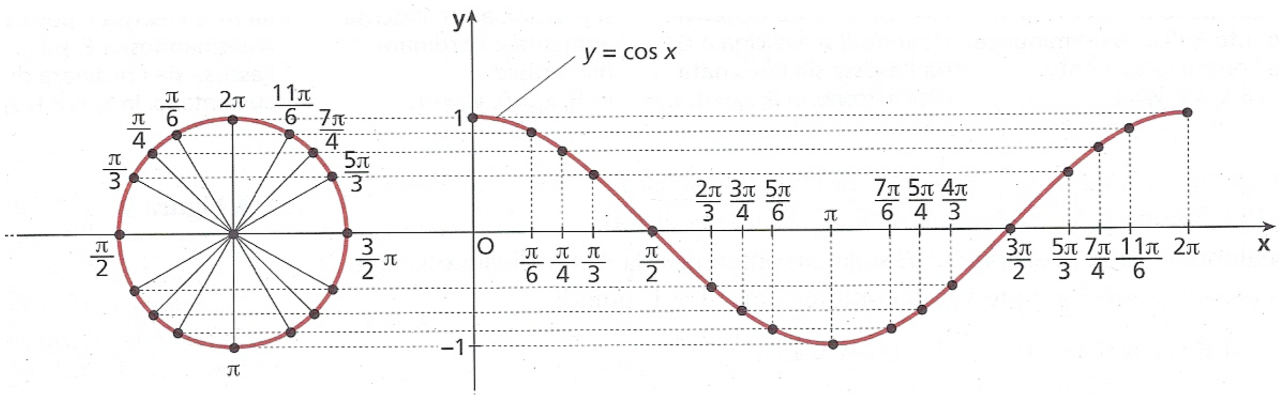
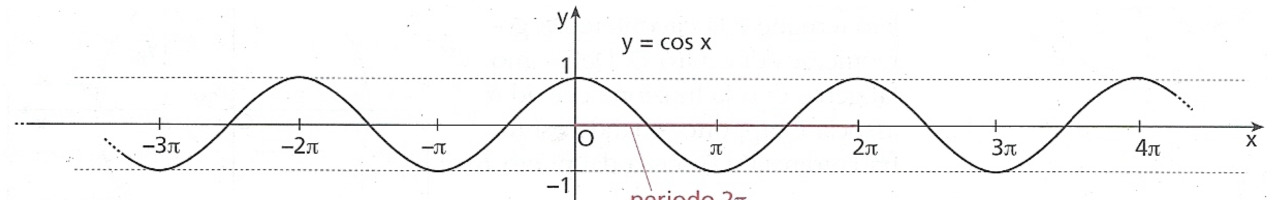
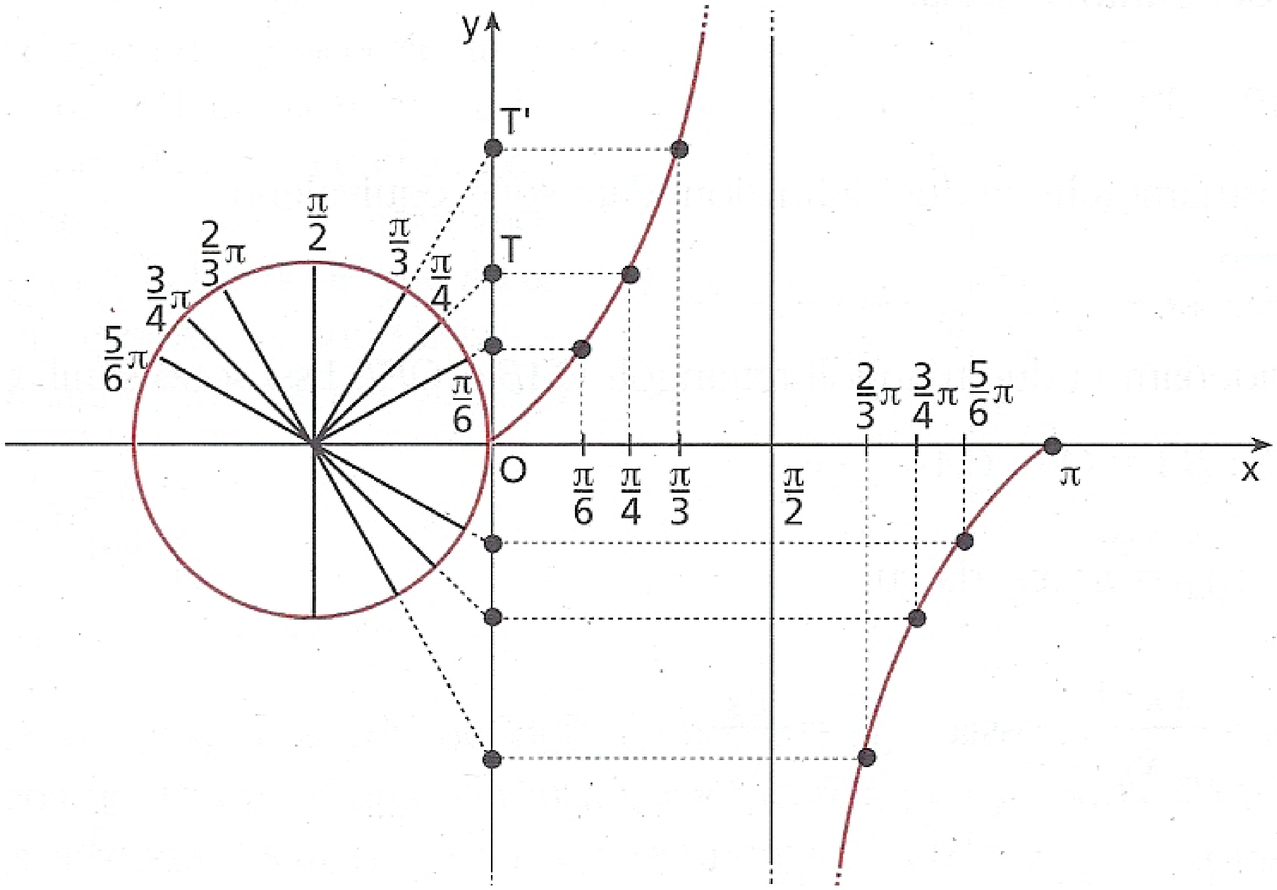
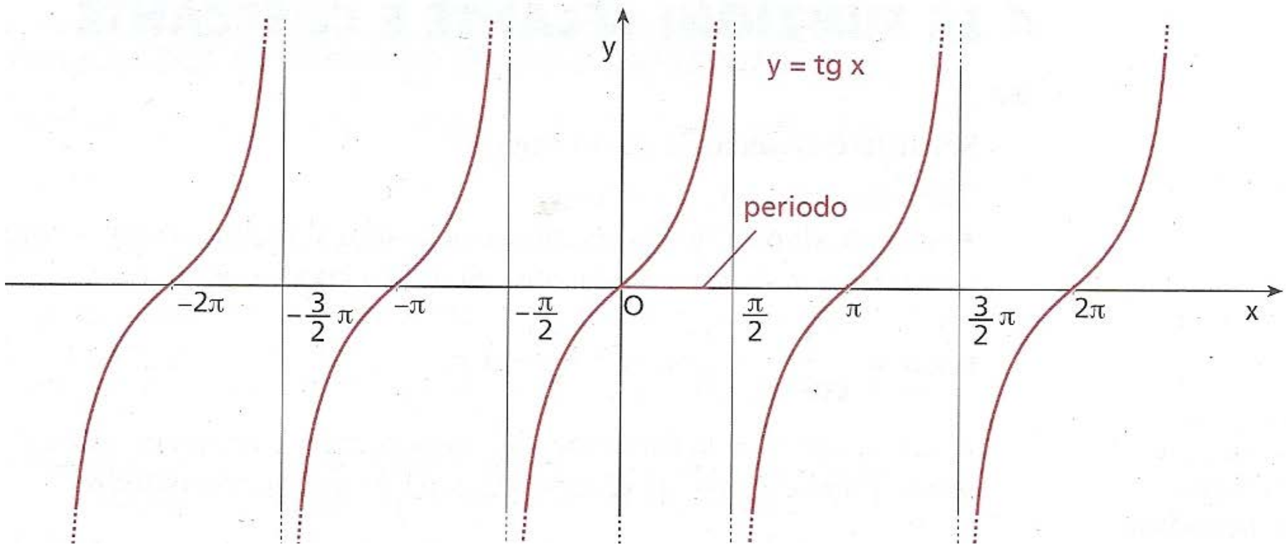


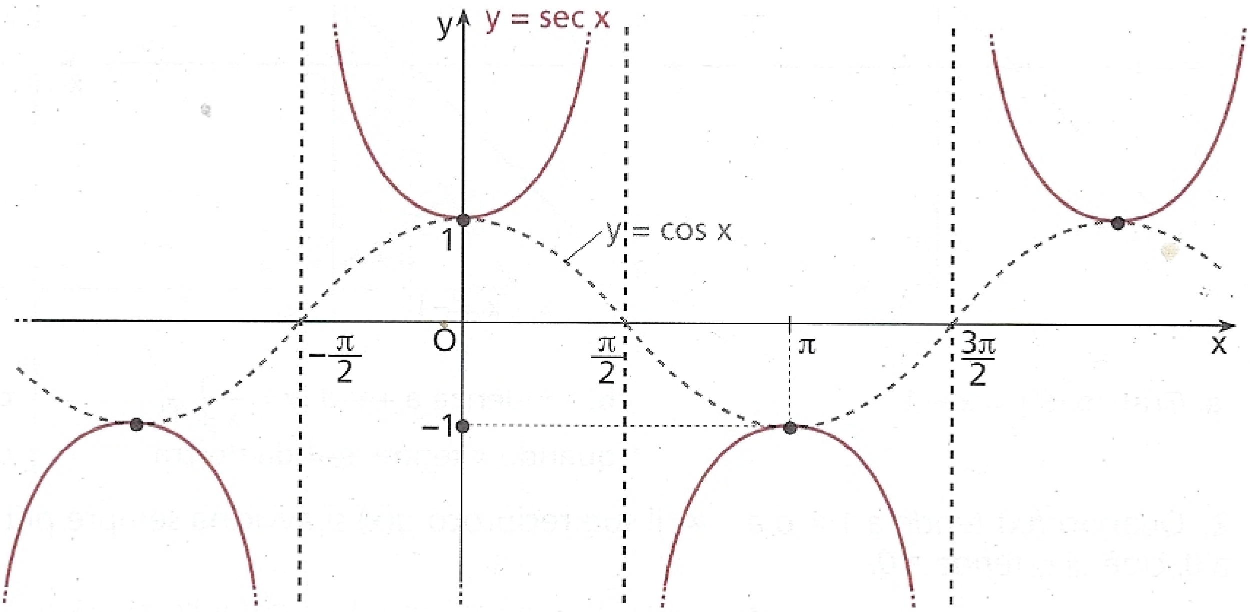
Grafico della funzione $y = \cos x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$



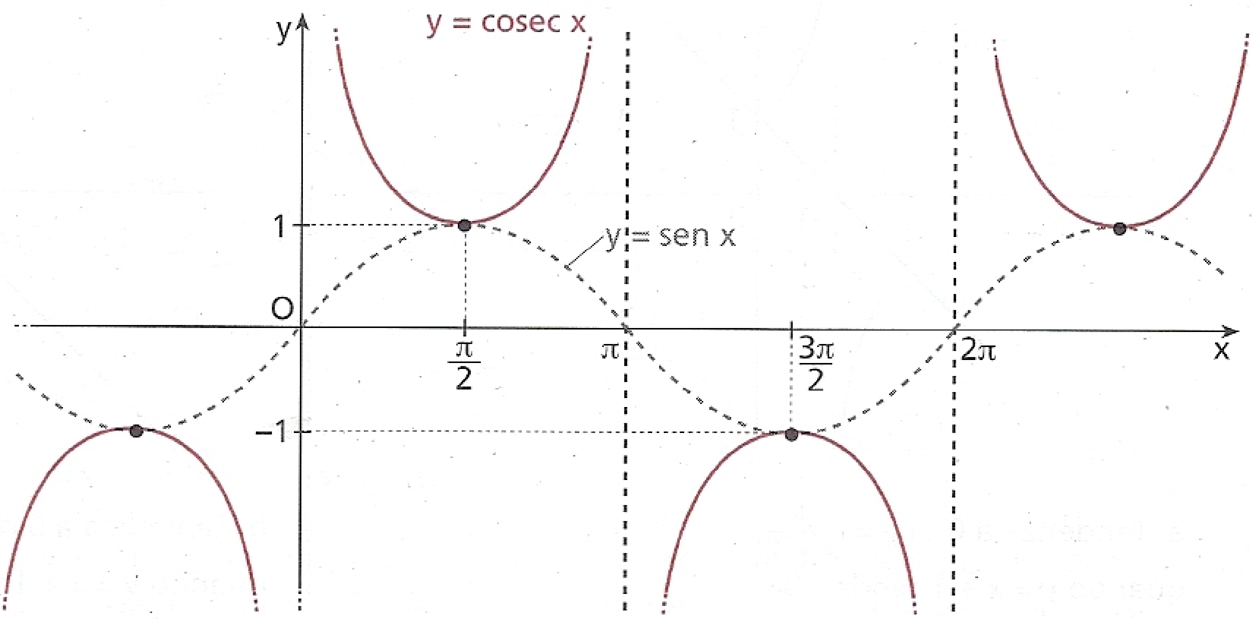
b. Grafico di $y = \cos x$.


y
T'
T
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2}{3}\pi$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{5}{6}\pi$
$\frac{\pi}{6}$
O
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2}{3}\pi$
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{5}{6}\pi$
π
x

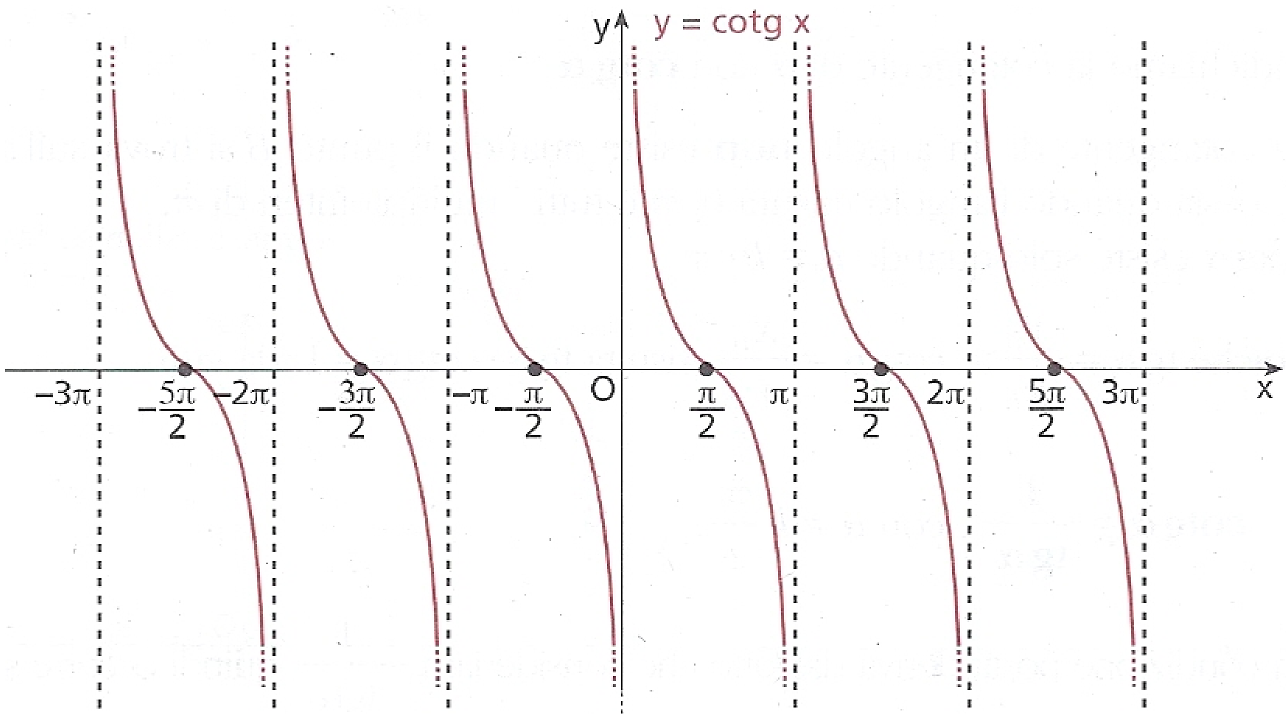

y
y = tg x
periodo
-2π
$-\frac{3}{2}\pi$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
x

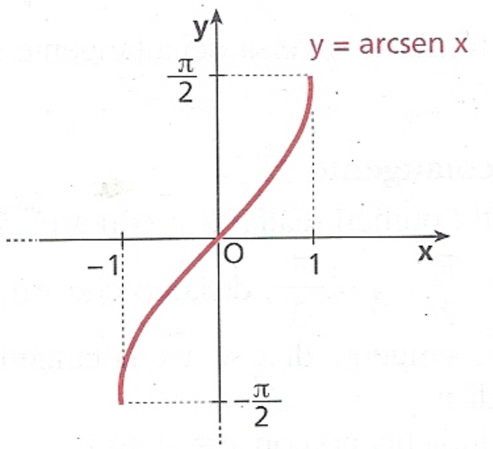


a. Grafico della secante.

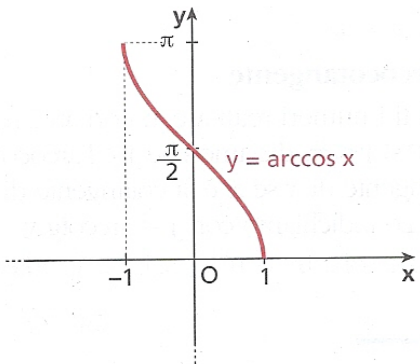


b. Grafico della cosecante.

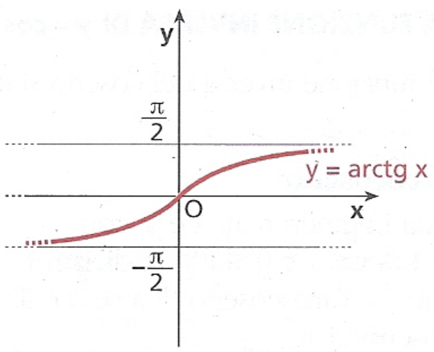




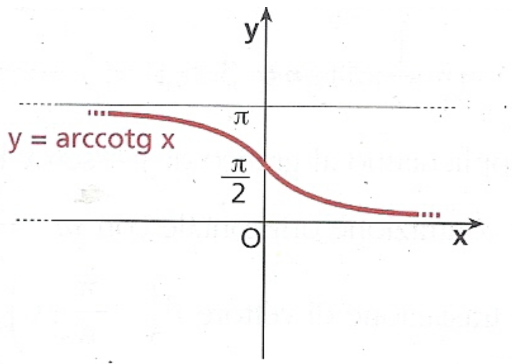
b. Grafico della funzione $y = \text{arcsen}\, x$.



b. Grafico della funzione $y = \arccos x$.



b. Grafico della funzione $y = \text{arctg}\, x$.



b. Grafico della funzione $y = \text{arccotg}\, x$.