# Unità Didattica N° 13

# Angoli orientati

## Misura elementare degli angoli e degli archi

Per misurare gli angoli o gli archi ci serviremo di uno dei due seguenti sistemi:

**a) sistema sessagesimale b)** *sistema radiale* o ***circolare*** o ***ciclometrico***

## Sistema sessagesimale

In questo sistema l'unità di misura degli angoli è l'angolo grado o semplicemente grado, cioè la $360^a$ parte dell'angolo giro, mentre l'unità di misura degli archi (di circonferenza) è l'arco grado, cioè la $360^a$ parte della circonferenza. E' evidente che la misura in gradi di un arco (ampiezza dell'arco) coincide con la misura in gradi del corrispondente angolo al centro. In simboli abbiamo: $[1°]$ o più semplicemente $1°$. **Sottomultipli** del grado sono:

- il minuto primo (o semplicemente primo) uguale alla $60^a$ parte del grado; in simboli $[1']$ oppure $1'$, cioè: $[1'] = \frac{1}{60}[1°]$ $\quad [1°] = 60 \cdot [1']$ $\quad 1° = 60', 1' = \frac{1}{60}1°$
- il minuto secondo (o secondo $[1'']$ oppure $1''$) uguale alla $60^a$ parte del primo, cioè:

$$[1''] = \frac{1}{60}[1'] = \frac{1}{3600}[1°] \quad [1°] = 60 \cdot [1'] = 3600 \cdot [1''] \quad 1'' = \frac{1}{60}1' = \frac{1}{3600}1° \quad 1° = 60' = 3600''$$

- i decimi di secondo
- i centesimi di secondo

I multipli principali del grado sono: **1)** l'angolo retto ($90°$) **2)** l'angolo piatto ($180°$) **3)** l'angolo giro ( $360°$ ).

E' opportuno ricordare che la misura in gradi di un angolo ( arco ) non è un numero decimale in quanto l'unità fondamentale fissata (il grado) non viene suddivisa successivamente in $10$, $100, \cdots$ parti. Per mettere in evidenza questa circostanza si dice (impropriamente) che tale misura è espressa da un numero complesso.

La scrittura $125°32'57'',64$ si legge: 125 gradi, 32 primi, 57 secondi, 6 decimi e 4 centesimi di secondo. Quando vogliamo calcolare il rapporto di due angoli le cui misure sono espresse da numeri complessi, occorre ridurre le due misure a numeri rappresentanti unità della stessa specie.

<<**Calcolare il rapporto degli angoli** $\alpha = 52°15'28''$ **e** $\beta = 22°1'38''$ **>>**

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{52°15'28''}{22°1'38''} = \frac{\left(52 + \frac{15}{60} + \frac{28}{3600}\right)^{\circ}}{\left(22 + \frac{1}{60} + \frac{38}{3600}\right)^{\circ}} = \frac{188 \cdot 128}{3600} \cdot \frac{3600}{79 \cdot 298} = \frac{94064}{39649} = 2{,}3724179$$

<< **Calcolare la misura in gradi di un angolo interno di un poligono regolare di n lati**>>

Gli angoli interni di un poligono regolare sono tutti uguali fra loro, per cui vale la seguente relazione:

$$n \cdot \vartheta_n = (n - 2) \cdot 180° \quad \vartheta_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180° \quad \vartheta_3 = 60° \ , \ \vartheta_4 = 90° \ , \ \vartheta_5 = 108° \ , \ \vartheta_6 = 120° \ ,$$

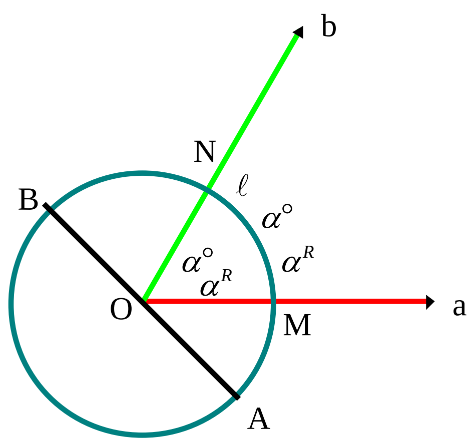
$$\vartheta_7 = 128°34'17'',14 \quad , \ \vartheta_8 = 135° \ , \ \vartheta_9 = 140° \ , \ \vartheta_{10} = 144°$$

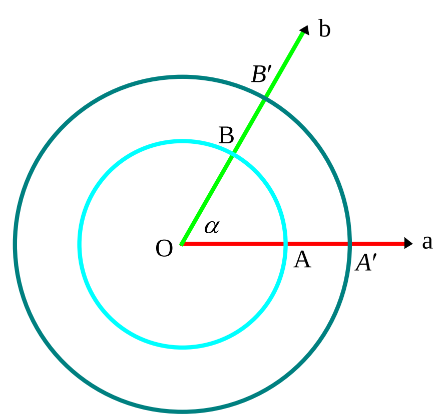
## Sistema radiale

Un angolo $\alpha = a\hat{o}b$ lo possiamo considerare sempre come angolo al centro di due (o più) circonferenze concentriche di raggi arbitrari $OA$ ed $OA'$. Detti $AB$ ed $A'B'$ gli archi corrispondenti , per un noto teorema di geometria euclidea , possiamo scrivere :

$AB : A'B' = OA : OA'$ ed anche : $\quad \mathbf{\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \alpha^R}$

cioè il rapporto tra l'arco (individuato su una circonferenza qualsiasi di centro O) ed il rispettivo raggio dipende esclusivamente dall'angolo e non dalla circonferenza considerata.



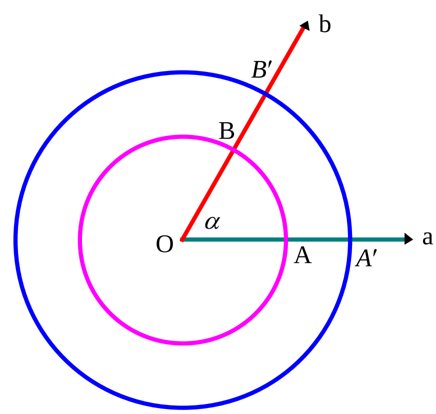

Tale rapporto (indicato col simbolo $\alpha^R$) si assume come misura dell'angolo in radianti. L'angolo $a\hat{o}b$ individua su una circonferenza di centro **O** e raggio **r** un arco $MN$ di lunghezza $\ell$.

Il rapporto $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{R}} = \dfrac{\ell}{\mathbf{r}}$ **[1]**, misura in radianti dell'angolo $a\hat{o}b$, dicesi anche misura in radianti dell'arco $MN = \ell$. Se l'arco $MN$ rettificato è lungo quanto il raggio della circonferenza cui appartiene abbiamo $\ell = r$ e quindi : $\alpha^R = \dfrac{r}{r} = 1 radiante = 1^R$

cioè l'**arco radiante** è quell'arco lungo quanto il raggio della circonferenza che lo contiene. Di conseguenza l'**angolo radiante** è quell'angolo che, posto col vertice nel centro di una qualsiasi circonferenza, sottende un arco lungo quanto il raggio.

La misura ($\alpha^R$) in radianti di un angolo o di un arco è un numero puro in quanto rapporto di due grandezze (**lunghezze**) omogenee. La misura di un angolo (arco) in radianti è detta misura ciclometrica dell'angolo (arco).

La misura ciclometrica di un arco coincide con la misura ciclometrica del corrispondente angolo al centro. Dalla [1] ricaviamo: $\ell = \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}$ **[2]** cioè moltiplicando il raggio per la misura in radianti dell'arco si ottiene la lunghezza dell'arco stesso. Vediamo adesso come si fa a passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti e viceversa.




La geometria euclidea ci insegna che gli archi ( di uguale raggio ) sono direttamente proporzionali ai rispettivi angoli al centro per cui possiamo scrivere la seguente proporzione :

$$MN : AB = M\hat{O}N : A\hat{O}B \qquad \textbf{[3]} \qquad \ell : \pi r = \alpha° : 180° \qquad \left( \ell = \pi r \cdot \frac{\alpha°}{180°} \right)$$

Ma: $\ell = \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}$ per cui abbiamo: $\alpha^R \cdot r : \pi r = \alpha° : 180°$ $\boxed{\alpha^R : \pi = \alpha° : 180°}$ cioè:

**[4]** $\quad \alpha^R = \dfrac{\alpha°}{180°} \cdot \pi \qquad\qquad \alpha° = \dfrac{\alpha^R}{\pi} \cdot 180°$ **[5]**

La misura in radianti di un angolo la cui misura in gradi è **1** la si ottiene ponendo nella [4] 1° al posto di $\alpha°$ , cioè : $1° = \dfrac{\pi}{180} = 0,01745 \cdots \textbf{radianti}$

La misura in gradi di un angolo la cui misura in radianti è **1** la si ottiene ponendo nella [5] $1^R$ al posto di $\alpha^R$ , cioè : $1^R = \dfrac{180°}{\pi} = 57° 17' 44'', 806 \cdots$

- Calcolare la misura ciclometrica di un arco lungo $2m$ ed appartenente ad una circonferenza di

raggio $r = 280cm$ : $$\alpha^R = \frac{2m}{280cm} = \frac{200cm}{280cm} = \frac{5}{7} = 0{,}7142857^R$$

- **Calcolare la** misura ciclometrica **di un arco di** $68°$ : $$\alpha^R = \frac{68°}{180°}\cdot\pi = 1{,}186^R$$

- Calcolare la misura in radianti degli angoli interni dei poligoni regolari di 3, 4, 5, 6, 10 lati .

$$\vartheta_3 = \pi\cdot\frac{60°}{180°} = \frac{\pi}{3} \ , \ \vartheta_4 = \pi\cdot\frac{90°}{180°} = \frac{\pi}{2} \ , \ \vartheta_5 = \pi\cdot\frac{108°}{180°} = \frac{3}{5}\pi \ , \ \vartheta_6 = \pi\cdot\frac{120°}{180°} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\vartheta_{10} = \pi\cdot\frac{144°}{180°} = \frac{4}{5}\pi$$

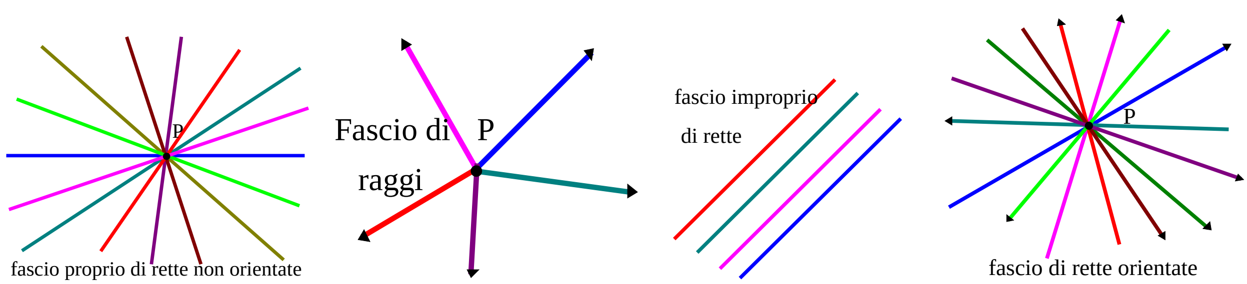
### OSSERVAZIONE

D'ora in poi, invece di parlare di angoli ed archi misurati in gradi o in radianti diremo soltanto angoli o archi e la loro misura sarà espressa, indifferentemente, in gradi o in radianti.
L'allievo cerchi di abituarsi , con estrema disinvoltura , a misurare gli angoli in gradi o in radianti.
In analisi matematica, per motivi che vedremo in seguito, gli angoli e gli archi si misurano in radianti.

## Fascio orientato di rette

L'insieme di tutti i raggi di un piano aventi la stessa origine **P** dicesi fascio di raggi. Il punto **P** prende il nome di centro del fascio di raggi. L'insieme di tutte le rette di uno stesso piano passanti per uno stesso punto **P** (posto al finito) dicesi fascio di rette a centro proprio o fascio proprio di rette. Un fascio di raggi ed un fascio di rette aventi lo stesso centro e situati sullo stesso piano si dicono sovrapposti. Se il punto **P** è improprio, cioè non situato al finito, allora tutte le rette del fascio sono fra loro parallele. In questo caso si parla di fascio improprio di rette o fascio di rette a centro improprio, cioè il fascio improprio di rette è l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una retta assegnata, che prende il nome di retta base del fascio. Se le rette del fascio sono orientate si parla di fascio di rette orientate. Poiché ad ogni retta orientata del fascio possiamo fare corrispondere il raggio positivo da essa individuato e viceversa, possiamo affermare che un fascio di rette orientate ed un fascio di raggi aventi lo stesso centro **P** hanno le stesse proprietà. Un fascio di rette (a centro proprio) può essere generato da una qualsiasi retta che ruota (in senso orario o in senso antiorario) attorno al suo centro, cioè un fascio di rette è dotato, per sua natura, di due soli versi di rotazione uno opposto dell'altro. Uno dei due versi di rotazione si dirà positivi l'altro, opposto, negativo.

Un fascio di rette è orientato quando per esso fissiamo come positivo uno dei due possibili versi di rotazione. La scelta del verso positivo è del tutto arbitraria. Noi converremo di considerare positive quelle rotazioni che avvengono in verso antiorario (verso opposto a quello delle lancette di un orologio) e negative le rotazioni che si compiono in verso orario (cioè nello stesso verso delle lancette di un orologio).




## Misura degli angoli orientati

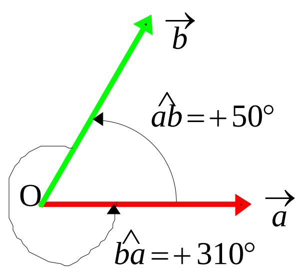
Due raggi $\vec{a}$ e $\vec{b}$ aventi la stessa origine **O** individuano due angoli non orientati (uno convesso ed uno concavo) che, in geometria euclidea, sono indicati indifferentemente coi simboli $\overset{\wedge}{ab}$ oppure $\overset{\wedge}{ba}$. In generale, però, si conviene di indicare con $\overset{\wedge}{ab}$ o con $\overset{\wedge}{ba}$ l'angolo convesso per cui quando vogliamo fare riferimento all'angolo concavo bisogna dichiararlo esplicitamente. La misura di un angolo non orientato è espressa da un numero positivo. Un angolo è orientato quando è concepito come la parte di piano descritta da una semiretta che ruota in senso orario o in senso antiorario attorno alla propria origine. La misura di un angolo orientato è espressa da un numero relativo.

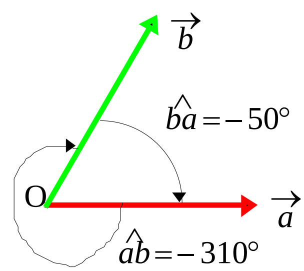
Per gli angoli orientati valgono le seguenti considerazioni:

1) con la scrittura $\hat{ab}$ stabiliamo che $\vec{a}$ è il primo lato (o lato origine) e $\vec{b}$ il secondo lato (o lato estremo) e quindi con $\hat{ba}$ intendiamo affermare che $\vec{b}$ è il primo lato ed $\vec{a}$ il secondo.

2) Immaginiamo un qualsiasi angolo orientato descritto dalla rotazione del primo lato fino alla sua sovrapposizione sul secondo

3) alla misura dell'angolo orientato assegniamo il segno **+** ( **-** ) se il primo lato per sovrapporsi al secondo compie una rotazione antioraria (oraria).

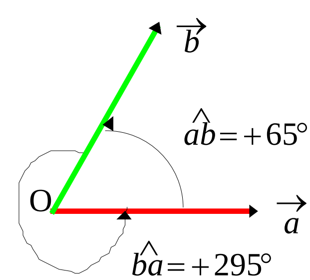



Ma noi sappiamo che il primo lato può sovrapporsi al secondo mediante una rotazione oraria o una rotazione antioraria che dovrà essere precisata da una ulteriore convenzione.

## PRIMA CONVENZIONE

Con questa convenzione si stabilisce che il primo lato deve ruotare in senso antiorario. Quindi col simbolo $\hat{ab}$ indichiamo l'angolo positivo $\alpha$ ( convesso o concavo, cioè $0° \leq \alpha \leq 360°$ ) di cui deve ruotare in senso antiorario il primo lato $\vec{a}$ fino a sovrapporsi al secondo lato $\vec{b}$ .




Risulta sempre : $\hat{ab} + \hat{ba} = 360°$

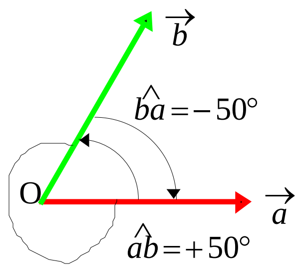
Nel caso della figura $\hat{ab}$ rappresenta l'angolo convesso , $\hat{ba}$ l'angolo concavo . Con questa convenzione la misura di un angolo orientato è espressa da un numero positivo .

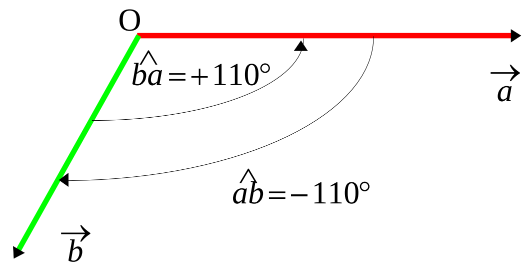
## SECONDA CONVENZIONE

Con questa seconda convenzione $\hat{ab}$ esprime la misura algebrica dell'angolo convesso formato dai raggi $\vec{a}$ e $\vec{b}$ , cioè con $\hat{ab}$ intendiamo indicare l'angolo convesso di cui deve ruotare ( in senso orario o in senso antiorario ) il primo lato $\vec{a}$ per sovrapporsi al secondo lato $\vec{b}$ .

Risulta sempre : $\hat{ab} + \hat{ba} = 0°$

La misura dell'angolo concavo individuato dai raggi $\vec{a}$ e $\vec{b}$ può essere facilmente dedotta dalla misura algebrica dell'angolo convesso $\widehat{ab}$ .



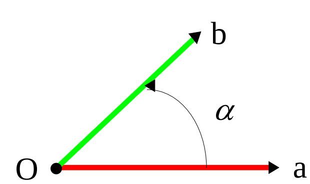

Con questa convenzione la misura di un angolo orientato può essere espressa o da un numero positivo o da un numero negativo .

## OSSERVAZIONI

- La posizione del secondo lato di un angolo orientato $\widehat{ab}$ è completamente individuata quando conosciamo la posizione del primo lato e la misura algebrica di $\widehat{ab}$ .

- Quando non intendiamo riferirci a nessuna delle due convenzioni precedentemente illustrate bisogna stabilire caso per caso se il primo lato , per sovrapporsi al secondo , deve ruotare in senso orario o in senso antiorario , cioè : $\widehat{ab} = -210°$ significa che $\vec{a}$ deve ruotare in senso orario descrivendo un angolo di $210°$ . $\widehat{ab} = 300°$ significa che $\vec{a}$ deve ruotare in senso antiorario descrivendo un angolo di $300°$ .
- Gli angoli relativi a rette orientate sono sempre definiti a meno di multipli di $360°$ , mentre gli angoli relativi a rette non orientate sono definiti a meno di multipli di $180°$ .

## Angolo generalizzato




Sia $a\hat{O}b$ un angolo avente come primo lato la semiretta $Oa$ e come secondo lato la semiretta $Ob$. Se concepiamo l'angolo in senso euclideo, cioè come la parte di piano delimitata da due semirette aventi la stessa origine , allora esistono due soli angoli ( uno convesso e l'altro concavo), aventi $Oa$ come primo lato ed $Ob$ come secondo lato. Se concepiamo l'angolo come la parte di piano descritta da una semiretta che ruota (in senso orario o in senso antiorario) attorno alla propria origine, esistono infiniti angoli (positivi e negativi) che hanno $Oa$ come primo lato ed $Ob$ come secondo lato.

Definizione: Definiamo angolo generalizzato l'insieme di tutti gli angoli positivi e negativi aventi come primo lato la semiretta $Oa$ e come secondo lato la semiretta $Ob$.

Uno qualsiasi di questi infiniti angoli sarà considerato come rappresentativo dell'angolo generalizzato. Un angolo generalizzato rappresenta infiniti angoli (aventi tutti come primo lato la semiretta $Oa$ e come secondo lato la semiretta $Ob$) a cui corrispondono misure diverse.

Se $\vartheta$ ed $\alpha$ sono misure diverse di uno stesso angolo generalizzato possiamo scrivere :

**[1]** $\vartheta = \alpha \pm k360°$ $\vartheta = \alpha \pm 2k\pi$ $k \in Z$

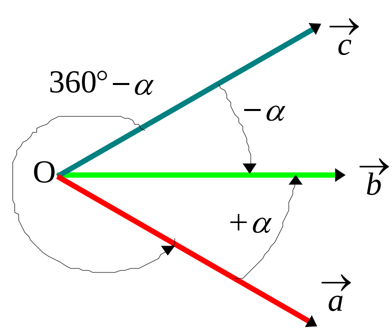
ed affermare che due misure diverse di uno stesso angolo generalizzato differiscono fra loro per un multiplo intero di $360°$ $(2\pi)$ . Simbolicamente la relazione [1] può essere scritta nella seguente maniera : [2] $\vartheta \equiv \alpha(\bmod 360°)$ $\vartheta \equiv \alpha(\bmod 2\pi)$ **[3]**

La [2] va letta così : << $\vartheta$ **è congruo ad** $\alpha$ **secondo il modulo** $2\pi$ >> oppure <<$\vartheta$ congruo $\alpha$ modulo $2\pi$>>. Degli infiniti angoli individuati da un angolo generalizzato due sono minori di un angolo giro e sono detti angoli propri, tutti gli altri sono maggiori di un angolo giro e sono detti angoli impropri. Definiamo minimo angolo positivo formato da due semirette orientate $\vec{a}$ e $\vec{b}$ aventi la stessa origine **O** l'angolo $\varphi$ (compreso tra $0°$ e $360°$) di cui deve ruotare in senso antiorario il primo lato $\vec{a}$ per sovrapporsi al secondo lato $\vec{b}$ . E' appena il caso di ricordare che il valore di $\varphi$ non dipende dalla particolare convenzione usata per la misura degli angoli orientati. L'operazione che consente di calcolare $\varphi$ (minimo angolo positivo ) è detta di riduzione al primo giro.

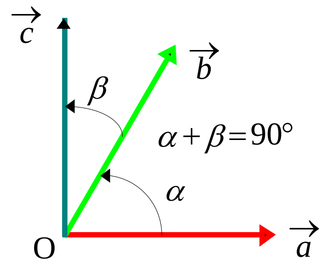
## OSSERVAZIONE N° 1

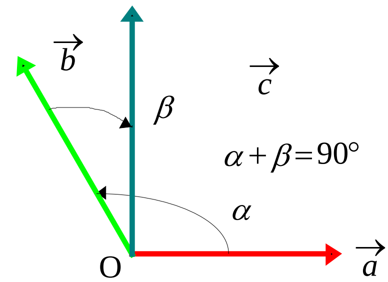
La misura $\alpha$ di un angolo orientato qualsiasi, in virtù della definizione di angolo generalizzato , può essere resa a piacere positiva o negativa. Basta sommare o sottrarre ad $\alpha$

Osservazione N°2: Due angoli orientati si dicono **opposti** quando hanno per somma l'**angolo giro** . Ad esempio gli angoli $\alpha = +50°$ ed $-\alpha = -50°$ sono **angoli opposti**.

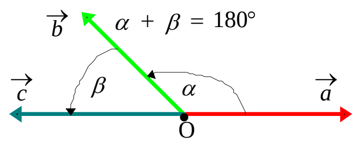


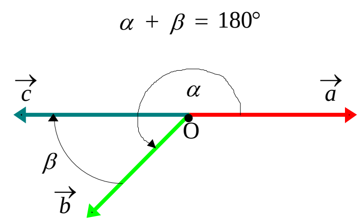
Due angoli orientati si dicono complementari quando la loro somma è un angolo retto (positivo). Ad esempio gli angoli $\alpha = -25°$ e $\beta = 90° - \alpha = 115°$ sono angoli complementari




Due angoli orientati si dicono supplementari quando la loro somma è un angolo piatto (positivo). Ad esempio gli angoli $\alpha = -30°$ e $\beta = 180° - \alpha = 210°$ sono angoli supplementari

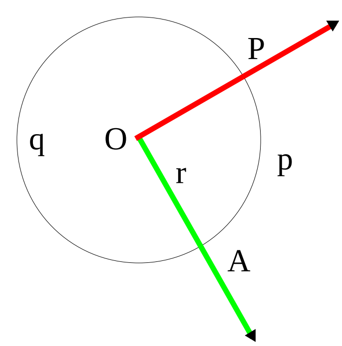



Due angoli orientati si dicono esplementari quando la loro somma è un angolo giro (positivo). Ad esempio gli angoli $\alpha = 50°$ e $\beta = 360° - \alpha = 310°$ sono angoli esplementari.

## Archi orientati di una circonferenza

Siano **A** e **P** due punti qualsiasi di una circonferenza di centro **O** e raggio **r**. Essi individuano sulla circonferenza due archi (propri) **p** e **q** delimitati dagli stessi punti. Conveniamo di chiamare uno dei due punti (ad esempio **A**) origine dell'arco $AP$ e l'altro estremo (dell'arco $AP$). Attribuiremo all'arco orientato $AP$ lo stesso segno dell'angolo orientato $A\hat{O}P$, cioè il segno dell'angolo al centro corrispondente.




Per gli archi orientati valgono le stesse considerazioni fatte per gli angoli generalizzati per cui possiamo affermare che la misura in radianti di un arco orientato è definita a meno di multipli di $2\pi$, cioè: [6] $\mathbf{AP = \lambda^R + 2k\pi}$ $\forall k \in Z$

Due di questi infiniti archi ( di solito uno minore e l'altro maggiore di una semicirconferenza ) sono detti archi propri, tutti gli altri sono detti archi impropri. La [6] può essere scritta:

$$\lambda_1 \equiv \lambda_2 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$