Unità Didattica N° 14
Le funzioni circolari

1) Le funzioni circolari

2) Alcune relazioni fra le varie funzioni circolari

3) Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo

4) Variazione delle funzioni circolari e loro periodicità

5) Rappresentazione grafica delle funzioni circolari

6) Le funzioni circolari inverse

Le funzioni circolari

● Consideriamo un sistema ortonormale di assi cartesiani di versori $\vec{i} = A - O$ e $\vec{j} = B - O$ e sia $\vec{e} = P - O$ un generico versore del piano cartesiano Oxy applicato al punto **O**.

Al variare della direzione del versore $\vec{e}$, il punto **P** descrive una circonferenza (detta circonferenza goniometrica) di centro o e raggio unitario. Sia $\alpha = \left(\vec{i}, \vec{e}\right)$ la misura in gradi o in radianti dell'arco AP o del corrispondente angolo al centro $A\hat{O}P$. Conveniamo di misurare gli angoli a partire dal lato OA e gli archi a partire dal punto A.

● Siano t , t' , t'' le tangenti geometriche alla circonferenza goniometrica rispettivamente nei punti A, B, P. Se E ed F sono rispettivamente le proiezioni ortogonali del punto P sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate, abbiamo:

$$\vec{\mathbf{e}} = (\mathbf{E}-\mathbf{O}) + (\mathbf{F}-\mathbf{O}) \qquad \textbf{[1]}$$

I punti E ed F assieme a quelli individuati dalle tre tangenti t (**T**) , t' (**G**) , t'' (**S** ed **R**) definiscono in maniera univoca i seguenti sei vettori :

$$E - O \ , \ G - B \ , \ S - O \ , \ F - O \ , \ T - A \ , \ R - O \qquad \textbf{[2]}$$

dei quali, i primi tre risultano paralleli al versore $\vec{i}$ e gli altri tre risultano paralleli al versore $\vec{j}$.

I seguenti sei rapporti fra vettori paralleli definiscono le sei funzioni circolari (o goniometriche o trigonometriche):

seno dell'angolo α = $\mathbf{sin}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{F-O}}{\vec{\mathbf{j}}} = \mathbf{y_P}$ = ordinata del punto **P** = la componente del versore $\vec{e}$ lungo l'asse delle ordinate

coseno dell'angolo α = $\mathbf{cos}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{E-O}}{\vec{\mathbf{i}}} = \mathbf{x_P}$ = ascissa del punto **P** = la componente del versore $\vec{e}$ lungo l'asse delle ascisse

tangente goniometrica dell'angolo α = $\mathbf{tg}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{T-A}}{\vec{\mathbf{j}}} = \mathbf{y_T}$ = ordinata del punto **T**

cotangente goniometrica dell'angolo α = $\mathbf{cotg}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{G-B}}{\vec{\mathbf{i}}} = \mathbf{x_G}$ = ascissa del punto **G**

secante dell'angolo α = $\mathbf{sec}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{S-O}}{\vec{\mathbf{i}}} = \mathbf{x_S}$ = ascissa del punto **S**

cosecante dell'angolo α = $\mathbf{cosec}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{R-O}}{\vec{\mathbf{j}}} = \mathbf{y_R}$ = ordinata del punto **R**

Le sei funzioni circolari così definite sono funzioni numeriche, cioè le loro immagini rappresentano numeri reali relativi variabili al variare dell'angolo α, cioè:

$$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{cotg}\,\alpha,\ \sec\alpha,\ \mathrm{cosec}\,\alpha \in R$$

Esse dipendono esclusivamente dall'arco AP (o ciò che è la stessa cosa dal corrispondente angolo al centro $A\hat{O}P$) e non dal particolare raggio unitario OA che si sceglie.

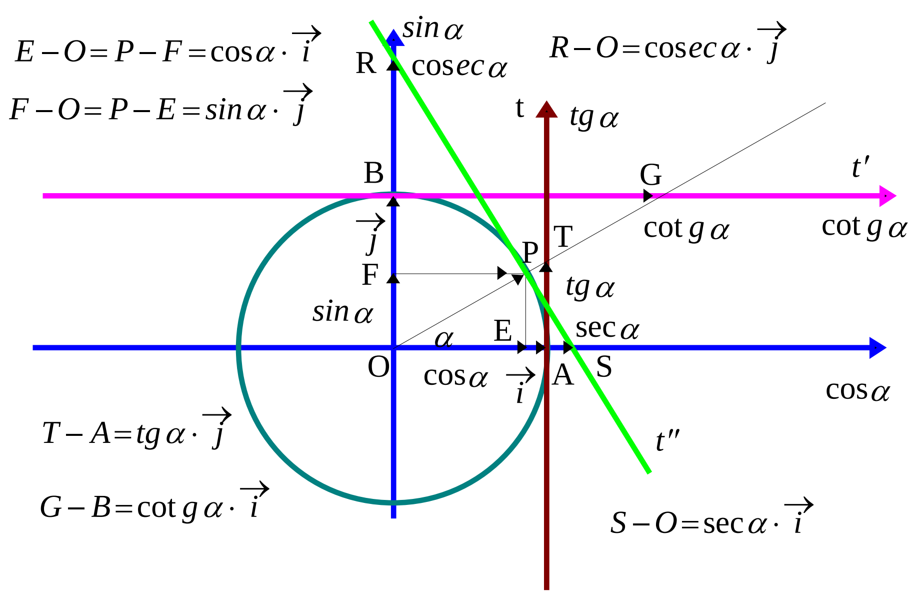
- In base alle cose dette possiamo scrivere:

$$E - O = \cos\alpha\cdot\vec{i}\ ,\ F - O = sin\alpha\cdot\vec{j}\ ,\ T - A = tg\,\alpha\cdot\vec{j}\ ,\ G - B = \cot g\,\alpha\cdot\vec{i}$$

$$S - O = \sec\alpha\cdot\vec{i}\ \ ,\ R - O = cosec\,\alpha\cdot\vec{j}$$

e quindi, la [1] assume la seguente forma: $\vec{e} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + sin\alpha\cdot\vec{j}$

Possiamo pertanto dire che $\cos\alpha$ e $sin\alpha$ rappresentano le componenti cartesiane di un qualsiasi versore $\vec{e}$ che forma con l'asse delle ascisse l'angolo α .



- Se fissiamo su di una retta un'origine **O** ed un versore $\vec{u} = Q - O$, ad ogni vettore $\vec{r} = P - O$ corrisponde un solo numero reale **r** rapporto fra i due vettori paralleli $\vec{r}$ ed $\vec{u}$ e viceversa ad ogni numero reale relativo **r** corrisponde un solo vettore $\vec{r} = P - O$ prodotto del numero **r** per il versore $\vec{u}$. Si dice che $\vec{r}$ é l'immagine vettoriale o il vettore rappresentativo del numero reale relativo **r** il quale, a sua volta, esprime la misura algebrica di $\vec{r}$ cioè il rapporto fra i vettori paralleli $\vec{r}$ ed $\vec{u}$.

Esiste pertanto una corrispondenza biunivoca fra i numeri reali relativi ed i vettori di una retta sulla quale abbiamo fissato l'origine **O** ed il versore $\vec{u} = Q - O$ e questa circostanza ci consente e di parlare di vettore $\vec{r}$ in luogo di numero reale **r** e viceversa.

● Nel nostro caso $E - O$, $G - B$, $S - O$, $F - O$, $T - A$, $R - O$ sono i vettori rappresentativi delle funzioni circolari seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante. Quindi, per la suddetta corrispondenza biunivoca, sarà lecito parlare di vettore $E - O$ al posto di $\cos\alpha$ e viceversa, cioè al vettore $E - O$ assoceremo il numero $\cos\alpha$ rapporto tra il vettore $E - O$ ed il corrispondente versore parallelo $\vec{i}$.

Alcune relazioni fra le varie funzioni circolari

$$\left\{ OP = OA \, , \, P\hat{O}S = A\hat{O}T \, , \, O\hat{P}S = O\hat{A}T \right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}T = O\overset{\Delta}{P}S \Rightarrow OT = OS$$

$$\left\{ OP = OB \, , \, O\hat{P}R = O\hat{B}G \, , \, O\hat{R}P = O\hat{G}B \right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{P}R = O\overset{\Delta}{B}G \Rightarrow OR = OG$$

$$O\overset{\Delta}{A}T \; [s] \; O\overset{\Delta}{E}P \Rightarrow \frac{T - A}{P - E} = \frac{A - O}{E - O} \Rightarrow \frac{tg\,\alpha \cdot \vec{j}}{sin\,\alpha \cdot \vec{j}} = \frac{\vec{i}}{\cos\alpha \cdot \vec{i}} \quad \text{Ma : } \frac{\vec{i}}{\vec{i}} = 1 \, , \, \frac{\vec{j}}{\vec{j}} = 1 \text{ per cui :}$$

$$\frac{tg\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad\qquad \mathbf{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$O\overset{\Delta}{A}T \; [s] \; O\overset{\Delta}{B}G \Rightarrow \frac{T - A}{B - O} = \frac{A - O}{G - B} = \frac{1}{\dfrac{G - B}{A - O}} \Rightarrow \frac{tg\,\alpha \cdot \vec{j}}{\vec{j}} = \frac{1}{\dfrac{\text{cotg}\,\alpha \cdot \vec{i}}{\vec{i}}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}} \qquad \mathbf{cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \mathbf{tg\,\alpha \cdot cotg\,\alpha = 1} \qquad \alpha \neq k\frac{\pi}{2} \quad , \quad \alpha \neq k\pi$$

$$O\overset{\Delta}{A}T \; [s] \; O\overset{\Delta}{E}P \Rightarrow \text{a} \Rightarrow \frac{S - O}{A - O} = \frac{1}{\dfrac{E - O}{A - O}} \Rightarrow \mathbf{sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

$$O\overset{\Delta}{B}G \; [s] \; O\overset{\Delta}{F}P \Rightarrow \frac{G - O}{P - O} = \frac{B - O}{F - O} \Rightarrow \frac{R - O}{B - O} = \frac{1}{\dfrac{B - O}{F - O}} \Rightarrow \mathbf{cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}} \quad \alpha \neq k\pi$$

Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo

Consideriamo un sistema ortonormale di assi cartesiani di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$, la circonferenza goniometrica ed un triangolo rettangolo ABC con i lati orientati come in figura e con il vertice C coincidente con l'origine degli assi cartesiani.

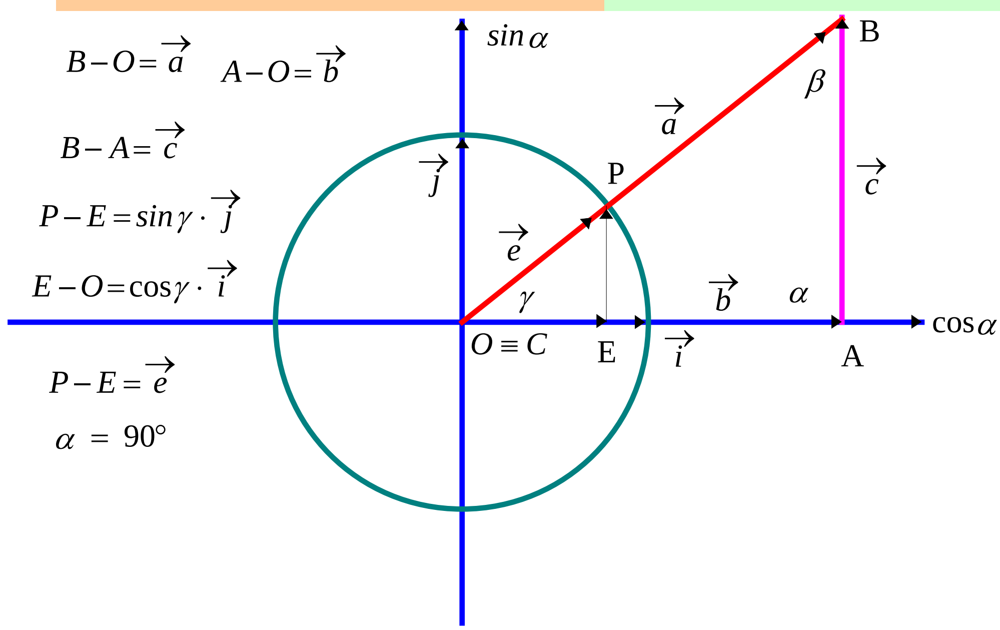
$$\overset{\Delta}{OAB}\ [s]\ \overset{\Delta}{OEP} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{B-A}{P-E} = \dfrac{B-O}{P-O} \Rightarrow \dfrac{\vec{c}}{\sin\gamma\cdot\vec{j}} = \dfrac{\vec{a}}{\vec{e}} \Rightarrow \dfrac{c}{\sin\gamma} = a \\ \dfrac{A-O}{E-O} = \dfrac{B-O}{P-O} \Rightarrow \dfrac{\vec{b}}{\cos\gamma\cdot\vec{i}} = \dfrac{\vec{a}}{\vec{e}} \Rightarrow \dfrac{b}{\cos\gamma} = a \\ \dfrac{B-A}{P-E} = \dfrac{A-O}{E-O} \Rightarrow \dfrac{\vec{c}}{\sin\gamma\cdot\vec{j}} = \dfrac{\vec{b}}{\cos\gamma\cdot\vec{i}} \Rightarrow \dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\cos\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a\cdot\sin\gamma \\ b = a\cdot\cos\gamma \\ c = b\cdot tg\,\gamma \\ b = c\cdot\cot g\,\gamma \end{cases}$$

Generalizzando possiamo affermare che in un triangolo rettangolo ogni cateto è uguale:

- al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o per il coseno dell'angolo adiacente

- al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto o per la cotangente dell'angolo Adiacente. In formule abbiamo :

$c = a\cdot\sin\gamma = a\cdot\cos\beta$	$b = a\cdot\sin\beta = a\cdot\cos\gamma$
$c = b\cdot tg\,\gamma = b\cdot\text{cotg}\,\beta$	$b = c\cdot tg\,\beta = b\cdot\text{cotg}\,\alpha$



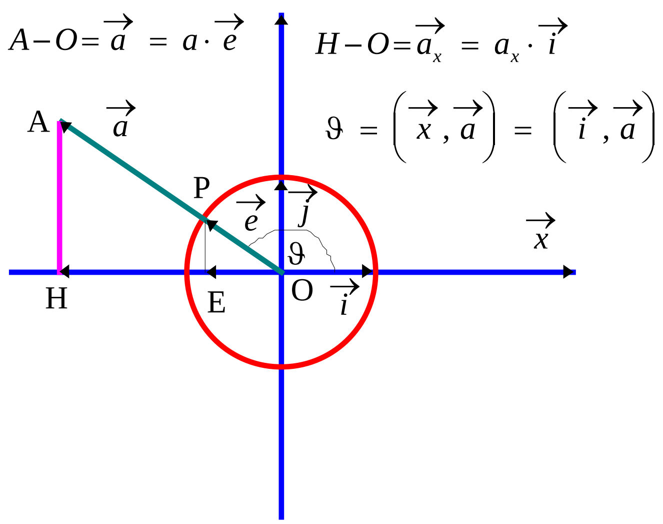
Teorema

La componente a_x di un vettore $\vec{a}$ lungo una retta orientata $\vec{x}$ di versore $\vec{i}$ è uguale al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per il coseno dell'angolo convesso ϑ formato da $\vec{i}$ e da $\vec{a}$. In simboli abbiamo:

$$\mathbf{a_x = a \cdot \cos\vartheta} \qquad \text{con} \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

Siano dati il vettore $A - O = \vec{a}$ e la retta orientata $\vec{x}$ di versore $\vec{i}$. Il vettore $H - O$ è il componente di $\vec{a}$ lungo la retta x, mentre $\dfrac{H-O}{\vec{i}} = a_x$ è la componente di $\vec{a}$ lungo la retta orientata $\vec{x}$ di versore $\vec{i}$. Considero la circonferenza goniometrica di centro O.

$$A\hat{H}D\,[s]\,P\hat{E}O \Rightarrow \frac{H-O}{E-O} = \frac{A-O}{P-O} \Rightarrow \frac{a_x \cdot \vec{i}}{\cos\vartheta \cdot \vec{i}} = \frac{a \cdot \vec{e}}{\vec{e}} \Rightarrow \frac{a_x}{\cos\vartheta} = a \Rightarrow \mathbf{a_x = a \cdot \cos\vartheta}$$



Variazione delle funzioni circolari e loro periodicità

- Due semirette a , b aventi la stessa origine o individuano infiniti angoli che differiscono fra loro per un numero intero di angoli giro. Per **minimo angolo positivo** individuato da due semirette aventi la stessa origine **O** intendiamo l'angolo ϑ descritto dal primo lato **a** , in una rotazione antioraria , per sovrapporsi una prima volta al secondo lato **b** . L'operazione della determinazione del minimo angolo positivo individuato da due semirette aventi la stessa origine O prende il nome di **riduzione dell'angolo ϑ al primo giro**.

● Variazione della funzione $\sin x$

Risulta : $\sin 0° = \sin 0^R = 0$ $\sin 90° = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\sin 180° = \sin\pi = 0$

$\sin 270° = \sin\frac{3}{2}\pi = -1$ $\sin 360° = \sin 2\pi = 0$

La funzione $\sin x$:

- Nel **primo quadrante** è **positiva** e *crescente*
- Nel **secondo quadrante** è **positiva** e *decrescente*
- Nel **terzo quadrante** è **negativa** e *decrescente* .
- Nel **quarto quadrante** è **negativa** e *crescente* .

La funzione $\sin x$ è una **funzione limitata**, **periodica** di periodo $360°$ ovvero 2π radianti.

dom sin x = R , **codom sin = [-1;1]** in quanto risulta: $-1 \le \sin x \le 1$

$$\sin\left(x° + k\cdot 360°\right) = \sin x° \qquad \sin\left(x + 2k\pi\right) = \sin x$$

● Variazione della funzione $\cos x$

Risulta : $\cos 0° = \cos 0^R = 1$ $\cos 180° = \cos\pi = -1$

$\cos 270° = \cos\frac{3}{2}\pi = 0$ $\cos 360° = \cos 2\pi = 1$

La funzione $\cos x$:

- Nel **primo quadrante** è **positiva** e *decrescente*
- Nel **secondo quadrante** è **negativa** e *decrescente*
- Nel **terzo quadrante** è **negativa** e *crescente* .
- Nel **quarto quadrante** è **positiva** e *crescente* .

La funzione $\cos x$ è una **funzione limitata**, **periodica** di periodo $360°$ ovvero 2π radianti .

dom cos x = R , **codom cos = [-1;1]** in quanto risulta : $-1 \le \cos x \le 1$

$$\cos\left(x° + k\cdot 360°\right) = \cos x° \qquad \cos\left(x + 2k\pi\right) = \cos x$$

● Variazione della funzione $tg\, x$. La funzione $tg\, x$:

- Nel **primo quadrante** è **positiva** e *crescente*
- Nel **secondo quadrante** è **negativa** e *crescente*

- Nel **terzo quadrante** è **positiva** e *crescente* .
- Nel **quarto quadrante** è **negativa** e *crescente* .

La funzione $\cos x$ è una **funzione illimitata**, *sempre crescente* , **periodica** di periodo 180° ovvero π radianti e perde di significato nei punti $x = \frac{\pi}{2}$ ($x = 90°$) ed $x = \frac{3}{2}\pi$ ($x = 270°$).

$$\textbf{dom tg x} = \mathbf{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad , \quad \textbf{codom tg} = \mathbf{R}$$

$$tg\left(x° + k\cdot 180°\right) = tg\, x° \qquad tg\left(x + k\pi\right) = tg\, x$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} tg\left(\frac{\pi}{2} \mp \varepsilon\right) = \pm\infty$$ con ε angolo positivo piccolo a piacere .

- Variazione della funzione $\operatorname{cotg} x$. La funzione $\operatorname{cotg} x$:
- Nel **primo quadrante** è **positiva** e *decrescente*
- Nel **secondo quadrante** è **negativa** e *decrescente*
- Nel **terzo quadrante** è **positiva** e *decrescente* .
- Nel **quarto quadrante** è **negativa** e *decrescente* .

La funzione $\operatorname{cotg} x$ è una **funzione illimitata**, *sempre decrescente*, **periodica** di periodo 180° ovvero π radianti e perde di significato nei punti $x = 0^R$ ($x = 0°$) , $x = \pi$ ($x = 180°$) e $x = 2\pi$ ($x = 360°$).

$$dom \operatorname{cotg} x = R - \{k\pi\} \quad , \quad codom \operatorname{cotg} x = R$$

$$\operatorname{cotg}\left(x° + k\cdot 180°\right) = \operatorname{cotg} x° \qquad \operatorname{cotg}\left(x + k\pi\right) = \operatorname{cotg} x \qquad \lim_{x \to 0\pm} \operatorname{cotg}(\ x\ ) = \pm\infty$$

- Variazione della funzione $sec\, x$

La funzione $sec\, x$:

- Nel **primo quadrante** è **positiva** e *crescente*
- Nel **secondo quadrante** è **negativa** e *crescente*
- Nel **terzo quadrante** è **negativa** e *decrescente* .
- Nel **quarto quadrante** è **positiva** e *decrescente* .

La funzione $sec\,x$ è una **funzione illimitata** , **periodica** di periodo $360°$ ovvero 2π radianti e perde di significato nei punti $x = \frac{\pi}{2}$ ($x = 90°$) ed $x = \frac{3}{2}\pi$

$$dom\sec x = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad , \quad codom\sec x =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$$

$$\sec\left(x° + k\cdot 360°\right) = \sec x° \qquad \sec\left(x + 2k\pi\right) = \sec x$$

$$\sec(90°-\varepsilon) = +\infty \quad , \quad \sec(90°+\varepsilon) = -\infty \quad , \quad \sec(270°-\varepsilon) = -\infty \quad , \quad \sec(270°+\varepsilon) = +\infty$$

con ε angolo positivo piccolo a piacere

- **Variazione della funzione** $\operatorname{cosec} x$. La funzione $\operatorname{cosec} x$:

- Nel **primo quadrante** è **positiva** e *decrescente*

- Nel **secondo quadrante** è **negativa** e *crescente*

- Nel **terzo quadrante** è **positiva** e *crescente* .

- Nel **quarto quadrante** è **negativa** e *decrescente* .

La funzione $\cos x$ è una **funzione illimitata** **periodica** di periodo $180°$ ovvero π radianti e perde di significato nei punti $x = 0^R$ ($x = 0°$) , $x = \pi$ ($x = 180°$) e $x = 2\pi$ ($x = 360°$) .

$$dom\operatorname{cosec} x = R - \left\{k\pi\right\} \quad , \quad codom\operatorname{cotg} =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$$

$$\operatorname{cosec}\left(x° + k\cdot 360°\right) = \operatorname{cosec} x° \qquad \operatorname{cosec}\left(x + 2k\pi\right) = \operatorname{cosec} x$$

$$\operatorname{cosec}(+\varepsilon) = -\infty \quad , \quad \operatorname{cosec}(-\varepsilon) = +\infty \qquad \operatorname{cosec}(180°-\varepsilon) = +\infty \quad , \quad \operatorname{cosec}(180°+\varepsilon) = -\infty \quad ,$$

$\operatorname{cosec}(360°-\varepsilon) = -\infty$ con ε angolo positivo piccolo a piacere

	0^R 0°	I quadrante	$\frac{\pi}{2}$ 90°	II quadrante	π 180°	III quadrante	$\frac{3}{2}\pi$ 270°	IV quadrante	2π 360°
Seno	**0**	**positivo crescente**	**+1**	**Positivo decrescente**	**0**	**negativo decrescente**	**-1**	**negativo crescente**	**0**
Coseno	**+1**	**positivo decrescente**	**0**	**negativo decrescente**	**-1**	**negativo crescente**	**0**	**positivo crescente**	**+1**
Tangente	**0**	**positivo crescente**	$\pm\infty$	**negativo crescente**	**0**	**Positivo crescente**	$\pm\infty$	**negativo crescente**	**0**
Cotangente	$\pm\infty$	**positivo decrescente**	**0**	**negativo decrescente**	$\pm\infty$	**Positivo decrescente**	**0**	**negativo decrescente**	$\pm\infty$
Secante	**+1**	**positivo crescente**	$\pm\infty$	**negativo crescente**	**-1**	**negativo decrescente**	$\pm\infty$	**negativo decrescente**	**+1**
cosecante	$\pm\infty$	**positivo decrescente**	**+1**	**Positivo crescente**	$\pm\infty$	**negativo crescente**	**-1**	**negativo decrescente**	$\pm\infty$

$\text{sen } 0^\circ = \text{sen } 0 = 0$

$\text{sen } 90^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

$\text{sen } 180^\circ = \text{sen } \pi = 0$

$\text{sen } 270^\circ = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

$\text{sen } 360^\circ = \text{sen } 2\pi = 0$

$\cos 0^\circ = \cos 0 = 1$

$\cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\cos 180^\circ = \cos \pi = -1$

$\cos 270^\circ = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$

$\cos 360^\circ = \cos 2\pi = 1$

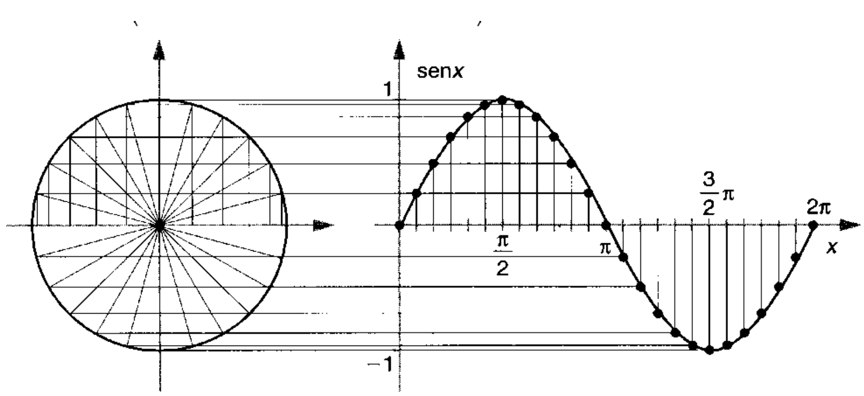
$\text{sen } (\theta + 2k\pi) = \text{sen } \theta$

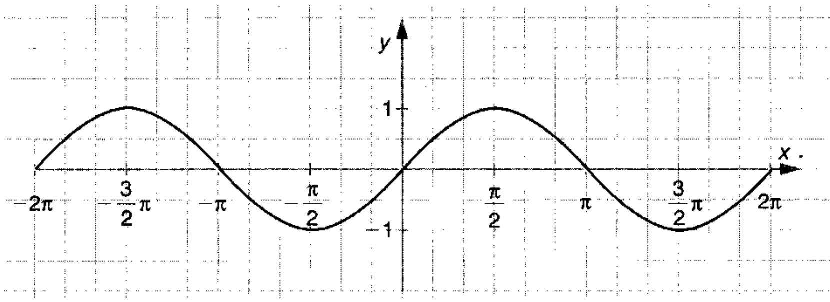
$\cos (\theta + 2k\pi) = \cos \theta$

$\text{tg } (\theta + k\pi) = \text{tg } \theta$

Rappresentazione grafica delle funzioni circolari

Il grafico della funzione $f(x) = \sin x$





Il grafico della funzione $f(x) = \cos x$

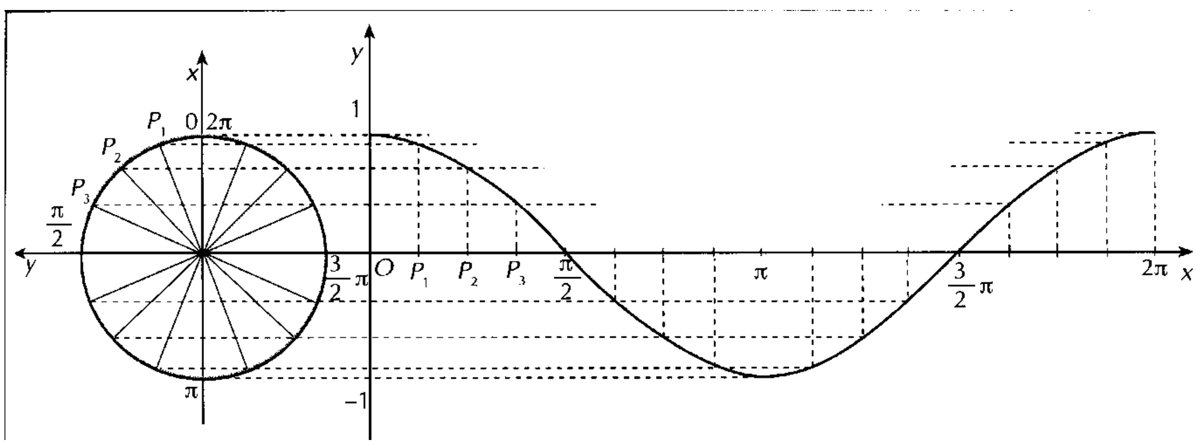
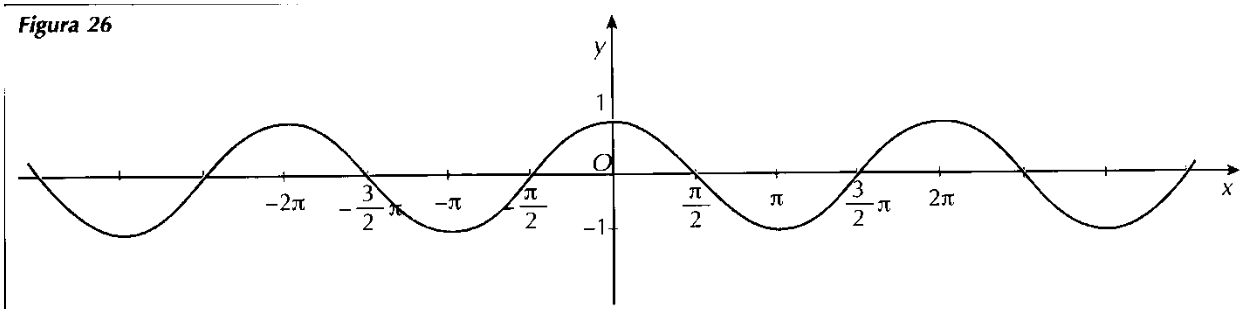
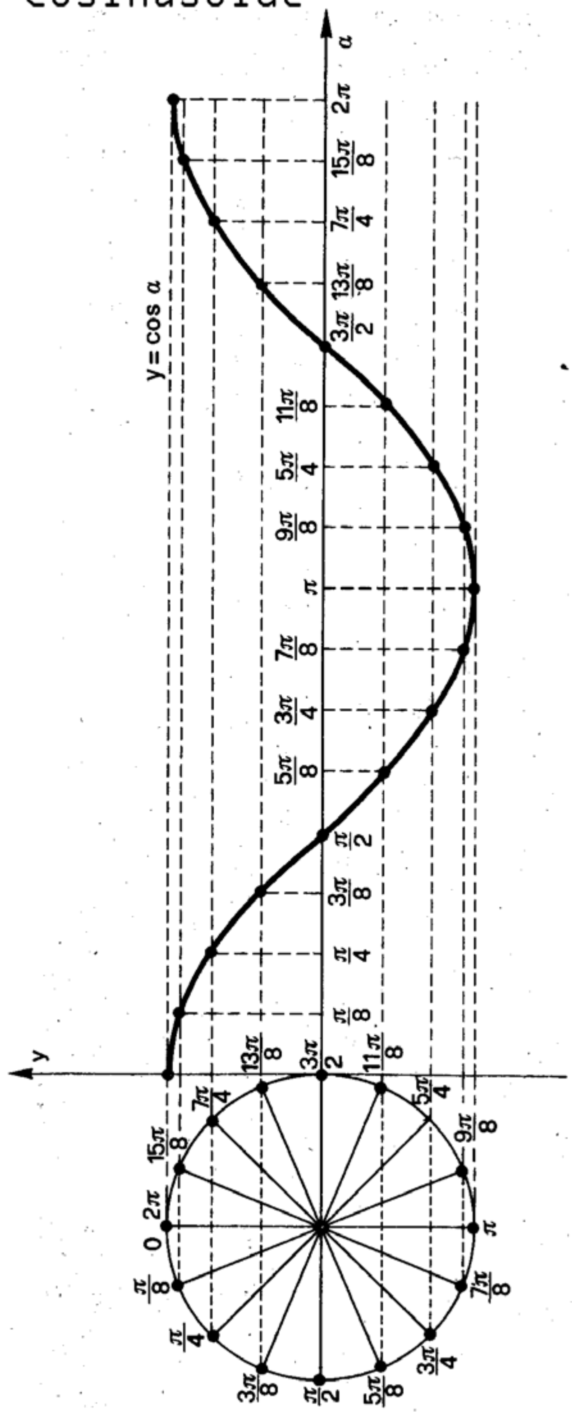


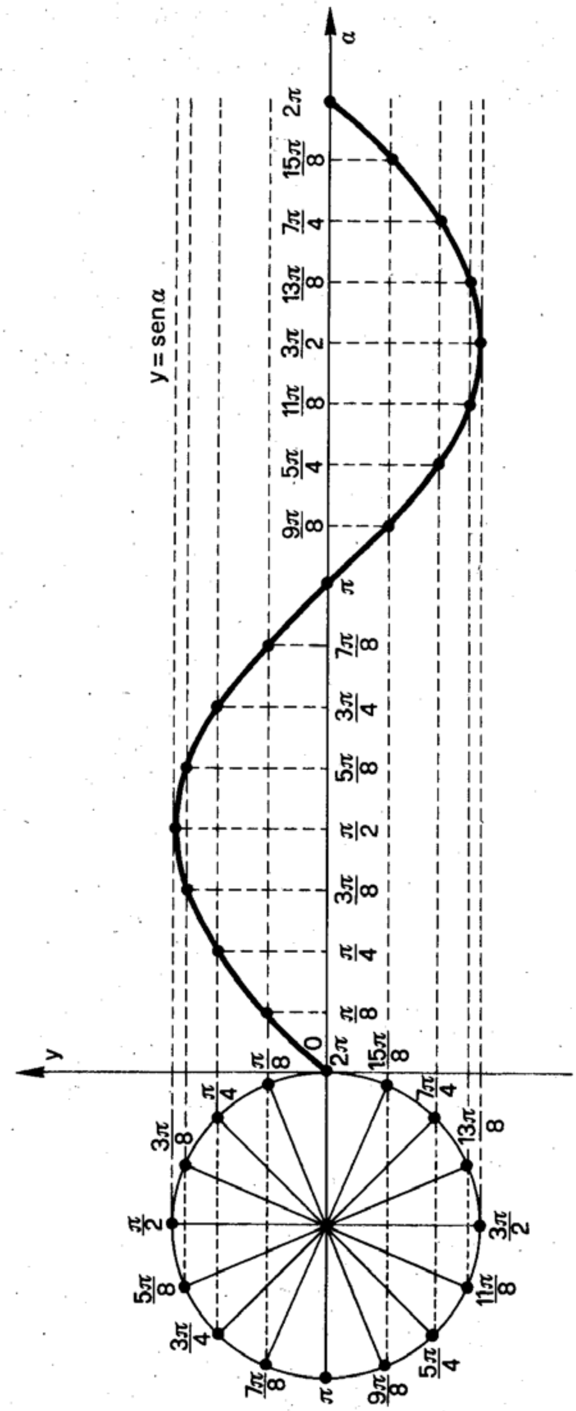
Figura 26



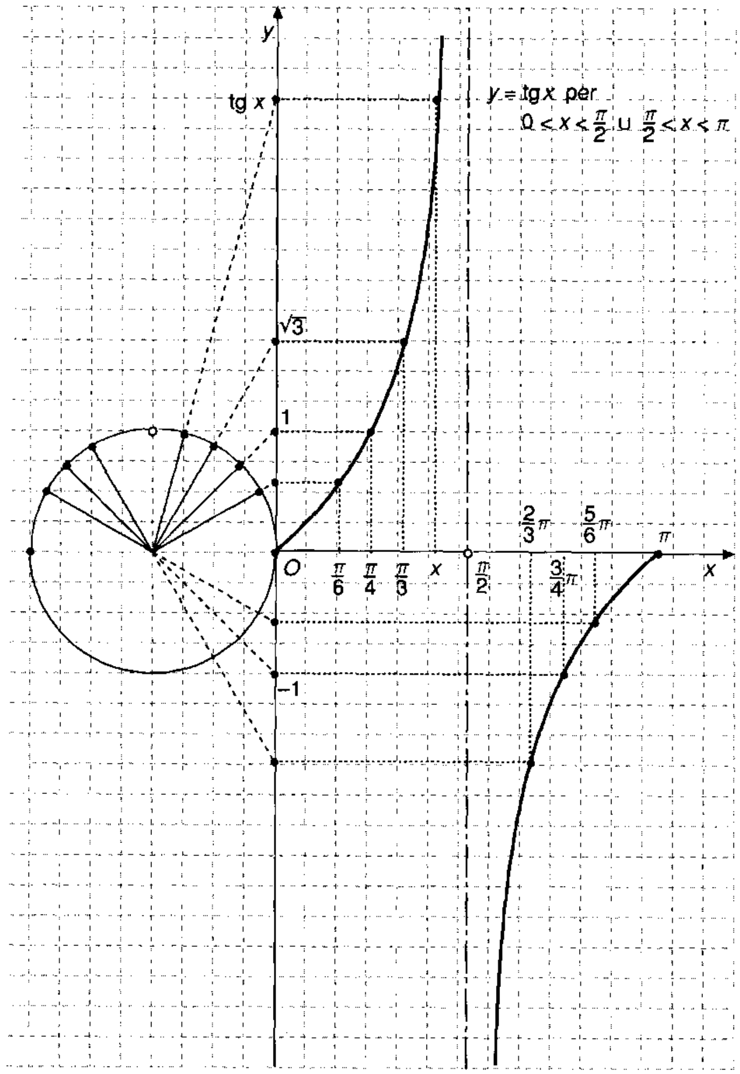
cosinusoide

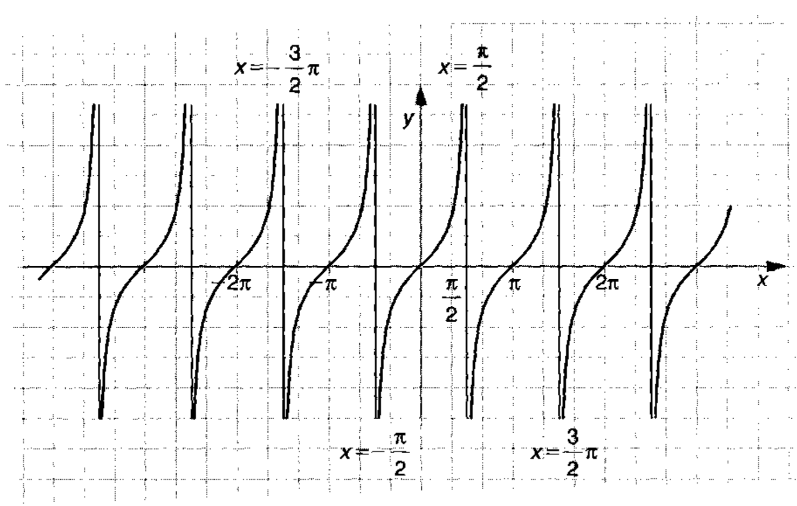


sinusoide



Il grafico della funzione $f(x) = tg\,x$ **(tangentoide)**





Il grafico della funzione $f(x) = \text{cotg}\, x$ (**Cotangentoide**)

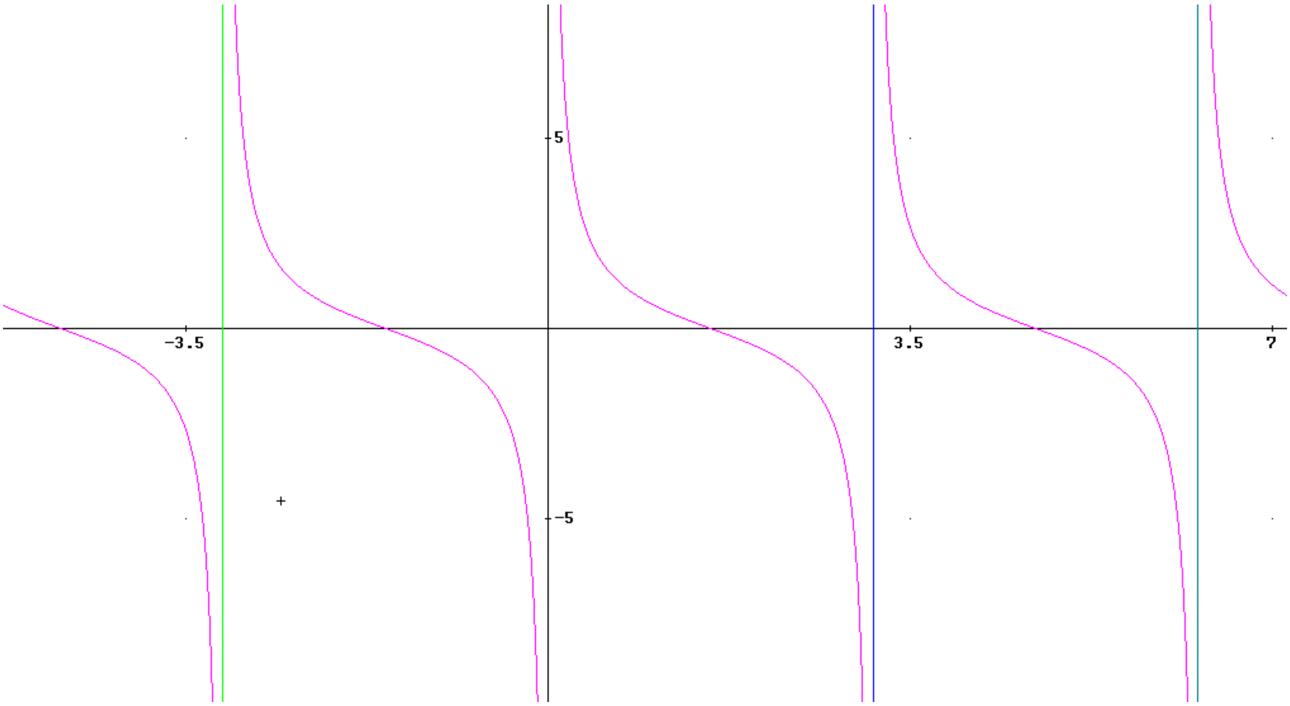


Grafico della funzione $sec\, x$ (**secantoide**)

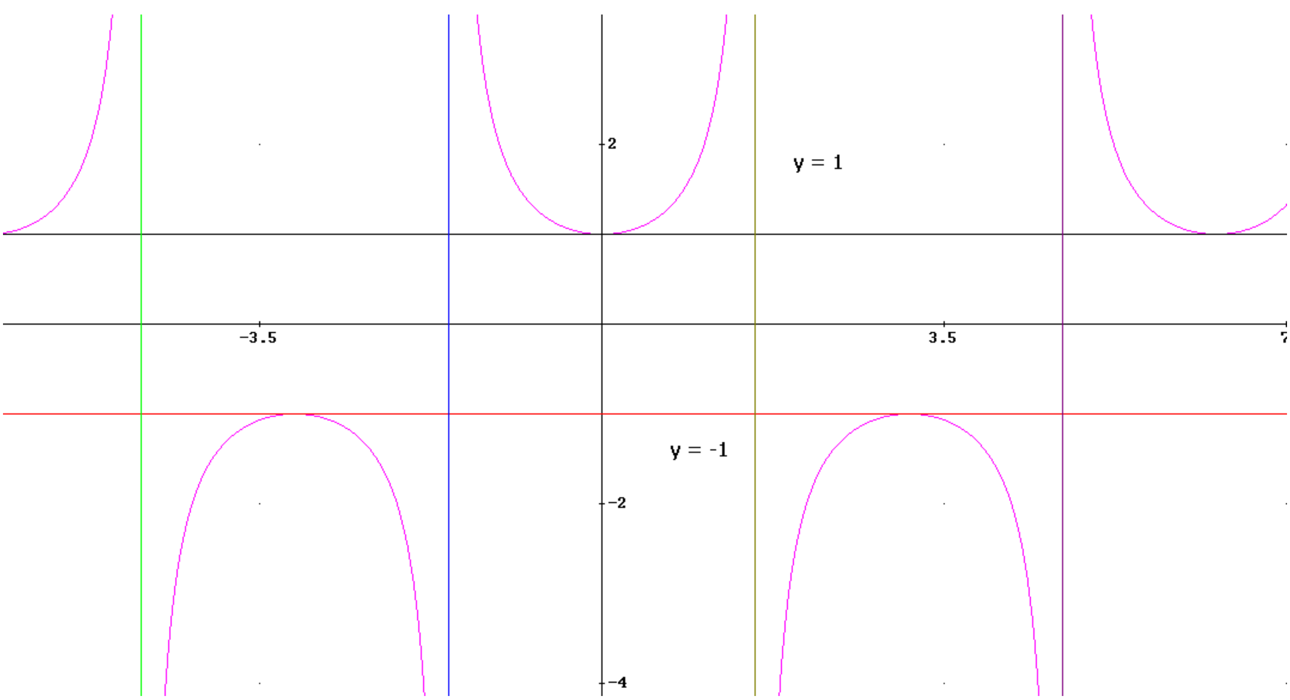
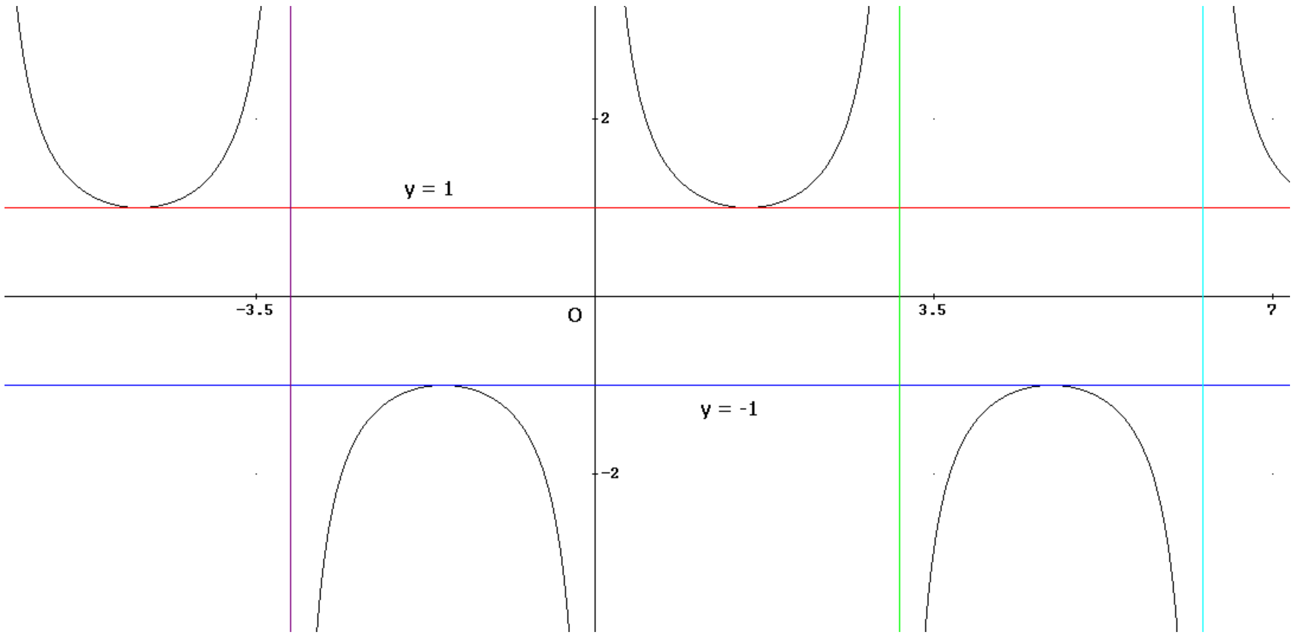


Grafico della funzione $\operatorname{cosec} x$ (cosecantoide)

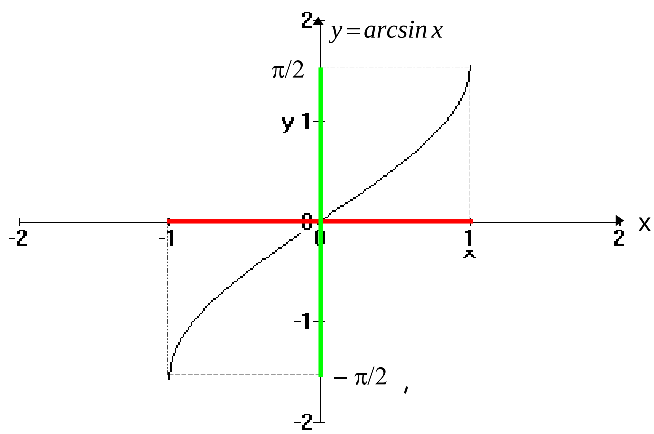


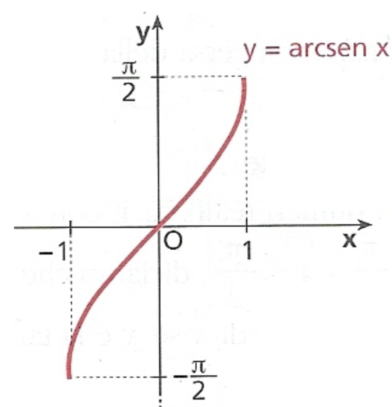
Funzioni inverse delle funzioni circolari ovvero le funzioni goniometriche inverse

• La funzione $x = \sin y$ è **strettamente crescente** nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e quindi è ivi localmente invertibile. La funzione inversa di $x = \sin y$ è indicata col simbolo: $y = \arcsin x$

$\operatorname{dom} \sin y = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $\qquad$ $\operatorname{codom} \sin y = [-1,1]$

$\mathbf{dom\, arcsin\, x = [-1,1]}$ $\qquad$ $\mathbf{codom\, arcsin\, x = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$

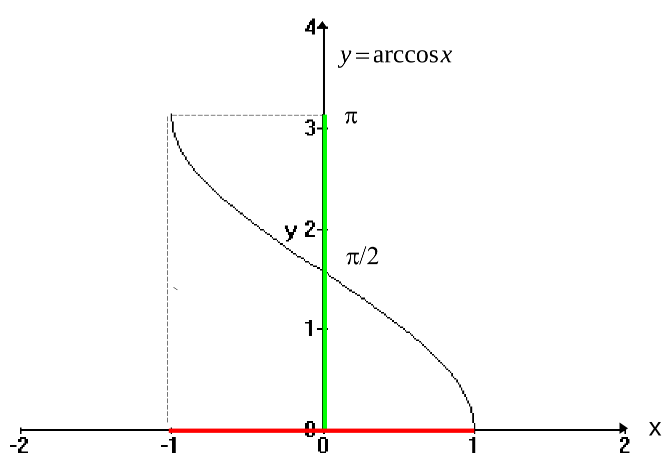


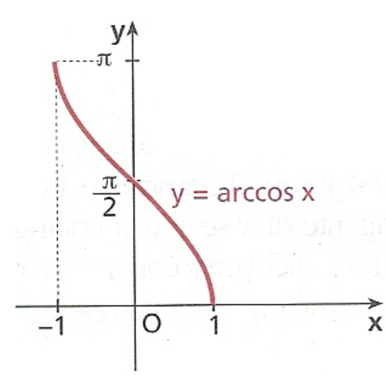


• La funzione $x = \cos y$ è **strettamente decrescente** nell'intervallo $[0,\pi]$ e quindi è ivi localmente invertibile. La funzione inversa di $x = \cos y$ è indicata col simbolo: $y = \arccos x$

$\mathbf{dom\, cos\, y = [0,\pi]}$ $\qquad$ $\mathbf{codom\, cos\, y = [-1,1]}$

$\mathbf{dom\, arccos\, x = [-1,1]}$ $\qquad$ $\mathbf{codom\, arccos\, x = [0,\pi]}$

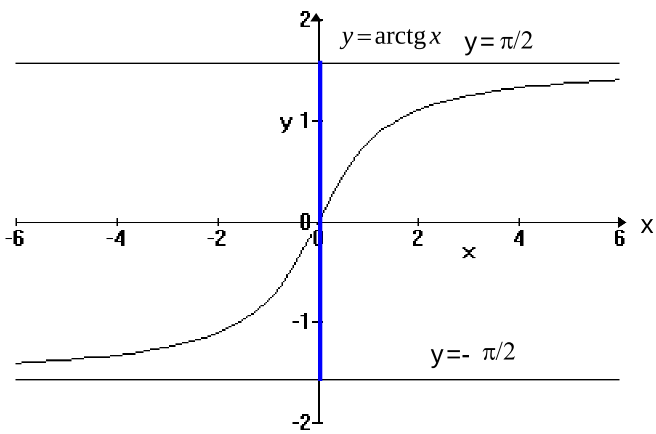


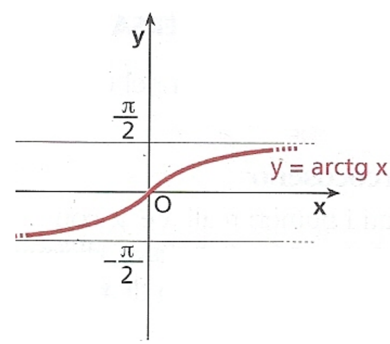


• La funzione $x = tg\, y$ è strettamente crescente nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e quindi è ivi localmente invertibile. La funzione inversa della funzione $x = \text{tg}\, y$ è indicata col simbolo $y = \text{arctg}\, x$

dom tg y = $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ **codom tg y = $]-\infty,+\infty[$**

dom arctg x = $]-\infty,+\infty[$ **codom arctg x = $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$**

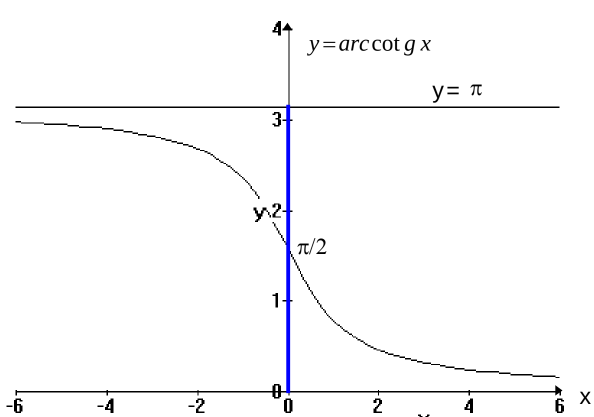


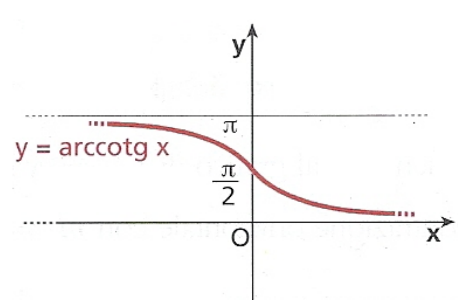


• La funzione **x = cotg y** è strettamente crescente nell'intervallo $]0,\pi[$ e quindi è ivi localmente invertibile. La funzione inversa della funzione $x = \cot g\, y$ è indicata col simbolo $y = \text{arccotg}\, x$

dom cotg y = $]0,\pi[$ **codom cotg y = $]-\infty,+\infty[$**

dom arccotg x = $]-\infty,+\infty[$ **codom arccotg x = $]0,\pi[$**





Alcune identità sulle funzioni goniometriche inverse

Premessa: $y=\arcsin x \iff x=\sin y \qquad -\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}$

$y=\arccos x \iff x=\cos y \qquad 0<x<\pi$

$y=\operatorname{arctg} x \iff x=\operatorname{tg} y \qquad -\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}$

$y=\operatorname{arccotg} x \iff x=\operatorname{cotg} y \qquad 0<x<\pi$

$$\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2} \qquad \sin\arccos x = \sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin \operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \sin\operatorname{arctg} x = \sin y=\frac{tg\, y}{\sqrt{1+tg^2 y}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \sin\operatorname{arccotg} x = \sin y=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2} \qquad \cos\arcsin x = \cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\operatorname{arctg} x = \cos y=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos\operatorname{arctg} x = \cos y=\frac{\operatorname{cotg} y}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 y}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{tg} \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \operatorname{tg}\arcsin x = \operatorname{tg} y=\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{tg} \arccos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \operatorname{tg}\arccos x = \operatorname{tg} y=\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos y}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{x} \qquad \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x = \operatorname{tg} y=\frac{1}{\operatorname{cotg} y}=\frac{1}{x}$$

$$\cos(\arcsin x)=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\operatorname{cotg} \arcsin x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad \operatorname{tg}\arcsin x = \operatorname{cotg} y=\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 y}}{\sin x}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\operatorname{cotg} \arccos x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \operatorname{cotg}\arccos x = \operatorname{cotg} y=\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{\cos y}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\mathbf{cotg\,arctg\,x=\frac{1}{x}}$ $\quad \operatorname{cotg}\operatorname{arctg} x=\operatorname{cotg} y=\frac{1}{\operatorname{tg} y}=\frac{1}{x}$

$\mathbf{cotg(arctg\,x) = tg(arccotg\,x) = \frac{1}{x}}$ $\quad x = \operatorname{tg} y \;\Rightarrow\; y = \operatorname{arctg} x \;\Rightarrow\; \operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg}(\operatorname{arctg} x)$

$\frac{1}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{cotg}(\operatorname{arctg} x) \qquad \frac{1}{x} = \operatorname{cotg}(\operatorname{arctg} x)$

$x = \operatorname{cotg} y \;\Rightarrow\; y = \operatorname{arccotg} x \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcotg} x)$

$\frac{1}{\operatorname{cotg} y} = \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) \qquad \frac{1}{x} = \operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x)$

$\mathbf{arcsin(-x)=-arcsin\,x}$ se $-1\le x\le +1$

$y=\arcsin(-x)=-\arcsin x \;\Rightarrow\; -x=\sin y \qquad x=-\sin y=\sin(-y)$

$-x=\sin y \;\Rightarrow\; y=\arcsin(-x) \qquad x=\sin(-y) \;\Rightarrow\; -y=\arcsin x$

Sommando membro a membro $y=\arcsin(-x)$ e $-y=\arcsin x$ otteniamo:

$\arcsin(-x)+\arcsin x=y-y=0 \qquad \arcsin(-x)+\arcsin x=0 \qquad \arcsin(-x)=-\arcsin x$

$\mathbf{arctg(-x)=-arctg\,x}$

$y=\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x \;\Rightarrow\; -x=\operatorname{tg} y \qquad x=-\operatorname{tg} y=\operatorname{tg}(-y)$

$-x=\operatorname{tg} y \;\Rightarrow\; y=\operatorname{arctg}(-x) \qquad x=\operatorname{tg}(-y) \;\Rightarrow\; -y=\operatorname{arctg} x$

Sommando membro a membro $y=\operatorname{arctg}(-x)$ e $-y=\operatorname{arctg} x$ otteniamo:

$\operatorname{arctg}(-x)+\operatorname{arctg}x=y-y=0 \qquad \operatorname{arctg}(-x)+\operatorname{arctg}x=0 \qquad \operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}$

$\mathbf{arcos(-x)=\pi-arcos\,x}$ cioè $\mathbf{arcos\,x+arcos(-x)=\pi}$ se $-1\le x\le +1$

Pongo: $x=\cos y$ Ottengo: $y=\arccos x \qquad \cos(\pi-y)=-\cos y=-x \;\Rightarrow\; \pi-y=\arccos(-x)$

$y=\arccos x \qquad \pi-y=\arccos(-x) \;\Rightarrow\; \arccos(-x)+\arccos x=\pi-y+y=\pi \;\Rightarrow$

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

$\mathbf{arcotg(-x)=\pi-arcotg\,x}$

Pongo: $x=\operatorname{tg} y$ Ottengo: $y=\operatorname{arctg}\, x \qquad \operatorname{tg}(\pi-y)=-\operatorname{tg} y=-x \;\Rightarrow\; \pi-y=\operatorname{arctg}(-x)$

$y=\operatorname{arctg}\, x \qquad \pi-y=\operatorname{arctg}(-x) \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg}(-x)+\operatorname{arctg} x=\pi-y+y=\pi \;\Rightarrow$

$\operatorname{arctg}(-x)=\pi-\operatorname{arctg} x$

$$\mathbf{arctg\,x = arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Pongo: $x = \operatorname{tg} y$ Ottengo: $y = \operatorname{arctg} x$ $\sin y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \wedge y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \wedge y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\mathbf{arccotg\,x = arctg\frac{1}{x}}$ $x = \operatorname{cotg} y \Rightarrow y = \operatorname{arccotg} x$ $\operatorname{tg} y = \frac{1}{\operatorname{cotg} y} = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccotg} x \\ y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

$\operatorname{tg}\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\arcsin x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\mathbf{arcsin\,x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\operatorname{tg}\arccos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\arccos x) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\mathbf{arccos\,x = arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$

$\operatorname{cotg}\arcsin x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}\arcsin x) = \operatorname{arccotg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\mathbf{arcsin\,x = arccotg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$

$\operatorname{cotg}\arccos x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}\arccos x) = \operatorname{arccotg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$ $\mathbf{arccos\,x = arccotg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$\mathbf{arcsin\,x + arccos\,x = \frac{\pi}{2}} \qquad \forall x \in [-1;1]$$

$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - y = \arccos x$

$$\begin{array}{rcl} \arcsin x & = & y \\ \arccos x & = & \frac{\pi}{2} - y \\ \hline \arcsin x + \arccos x & = & \frac{\pi}{2} \end{array}$$