Unità Didattica N° 17

Equazioni ed inequazioni goniometriche

01) Equazioni goniometriche elementari

02) Risoluzione di semplici equazioni goniometriche

03) Inequazioni goniometriche elementari

04) Risoluzione di semplici inequazioni goniometriche

05) Identità goniometriche e loro interpretazione geometrica

Equazioni goniometriche elementari

Le **equazioni goniometriche elementari** sono sei , precisamente :

$\cos x = m$	$\sin x = \ell$	$tg\, x = p$	$\text{cotg}\, x = q$	$\sec x = r$	$\text{cosec}\, x = s$

Risolvere una equazione goniometrica significa determinare tutti gli angoli (archi) che hanno una medesima funzione circolare . Risolviamo l'equazione goniometrica elementare :

[1] $\boxed{\cos x = m}$ $\qquad -1 \le m \le 1$

Sia $E - O = m \cdot \vec{i}$ il vettore rappresentativo della funzione circolare $\cos x = m$. La retta passante per E e parallela all'asse delle ordinate incontra la circonferenza goniometrica nel punti P_1 e P_2 a cui corrispondono gli angoli (archi) $A\hat{O}P_1 = \alpha$ $(\overset{\frown}{AP_2} = -\alpha)$ ed $A\hat{O}P_2 = 2\pi - \alpha = -\alpha$ $(\overset{\frown}{AP_2} = -\alpha)$. Poiché la funzione circolare $\cos x$ è periodica di periodo 2π, possiamo affermare che tutti gli angoli (archi) propri ed impropri che hanno lo stesso coseno **m** sono i seguenti:

[2]

$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$	$\begin{cases} x = \alpha + k360° \\ x = -\alpha + k360° \end{cases}$

$k \in Z$

Oppure, utilizzando un'unica formula:

$\boxed{x = \pm\alpha + k360°}$ $\quad$ $\boxed{x = \pm\alpha + 2k\pi}$ $\quad$ $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4 \cdots\cdots$ Risulta : $\boxed{0 \le \alpha \le \pi}$

Per indicare tutti gli angoli il cui coseno è **m** possiamo usare anche la seguente scrittura:

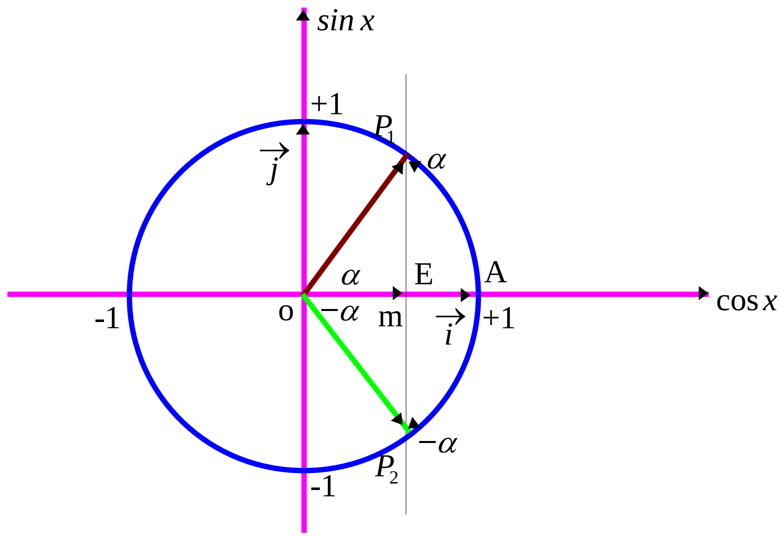
$\boxed{x = \arccos \text{m}}$ $\qquad$ **[5]**

Esempi

$\cos x = \frac{1}{2} \quad (\alpha = 60°) \qquad x = \pm 60° + k360°$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \; (\alpha = 150°) \; x = \pm 150° + k360°$

$\cos x = -\frac{5}{6} \qquad x = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$



Casi particolari

$\boxed{\cos x = 0}$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}}$ oppure $\boxed{x = (2k+1)90°}$

$\boxed{\cos x = 1}$ $(\alpha = 0)$ $\boxed{x = 2k\pi}$ oppure $\boxed{x = k\,360°}$

$\boxed{\cos x = -1}$ $(\alpha = \pi)$ $\boxed{x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi}$ oppure $\boxed{x = (2k+1)180°}$

APPLICAZIONI

$\boxed{\cos f(x) = \cos g(x)}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$ oppure $g(x) = \pm f(x) + 2k\pi$

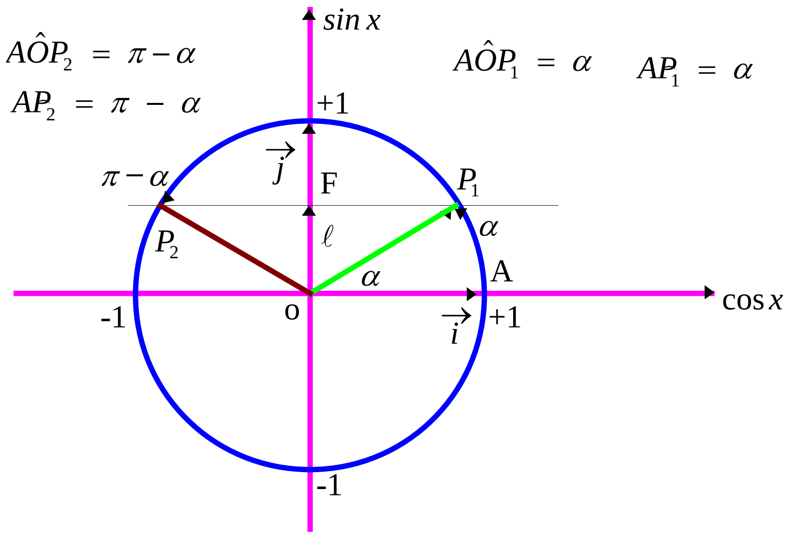
Due angoli aventi lo stesso coseno sono, a meno di multipli di 2π, o uguali o opposti.

$\boxed{\cos(5x + 50°) = \cos(4x + 40°)}$ $5x + 50° = 4x + 40° + k360°$ $x = -10° + k360°$

$5x + 50° = -4x - 40° + k360°$, $9x = -50° - 40° + k360°$, $9x = -90° + k360°$, $x = -10° + k40°$

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $\boxed{\sin x = \ell}$ [2] con $\boxed{-1 \leq \ell \leq +1}$

Sia $F - O = \ell \cdot \vec{j}$ il vettore rappresentativo della funzione circolare $\sin x = \ell$. La retta passante per F e parallela all'asse delle ascisse incontra la circonferenza goniometrica nel punti P_1 e P_2 a cui corrispondono gli angoli (archi) $A\hat{O}P_1 = \alpha$ ($\overset{\frown}{AP_1} = \alpha$) ed $A\hat{O}P_2 = \pi - \alpha$ ($\overset{\frown}{AP_2} = \pi - \alpha$). Poiché la funzione circolare $\sin x$ è periodica di periodo 2π, possiamo affermare che tutti gli angoli (archi) propri ed impropri che hanno lo stesso seno ℓ sono i seguenti:



$$\begin{cases} x = \alpha + k360° \\ x = 180° - \alpha + k360° \end{cases} \quad [3] \text{ oppure } [4] \quad \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4 \cdots\cdots$$

Le formule [3] e [4] possono essere sintetizzate in una unica formula in base alle seguenti considerazioni :

$$\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + (2k+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \quad [5] \quad \boxed{x = (-1)^h \cdot \alpha + h\pi} \text{ oppure } \boxed{x = (-1)^h \cdot \alpha° + h180°}$$

con $h = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4 \cdots\cdots$, in quanto: $2k$ è un **numero pari** , $2k + 1$ è un **numero dispari** . $(-1)^h$ dà $+1$ se h è **pari** , -1 se h è **dispari** .

Risulta : $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ oppure $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ e $\pi \leq \alpha \leq \dfrac{3}{2}\pi$

Possiamo anche scrivere :

$$\boxed{\sin\left[(-1)^h \cdot \alpha + h\pi\right] = \sin\alpha} \qquad \boxed{\sin\left[(-1)^h \cdot \alpha° + h180°\right] = \sin\alpha} \qquad h \in Z$$

Per indicare tutti gli angoli il cui seno è ℓ possiamo usare anche la seguente scrittura :

$$\boxed{x = \arcsin \ell}$$

Esempi

$\boxed{\sin x = \frac{1}{2}}$ $\quad (\alpha = 30°)$ $\quad \begin{cases} x = 30° + k\,360° \\ x = 180 - 30° + k\,360° = 150° + k\,360° \end{cases}$

oppure , in forma compatta : $\quad x = (-1)^h \cdot 30° + h180°$

$\boxed{\sin x = -\frac{1}{2}}$ $\quad (\alpha = 210°)$ $\quad \begin{cases} x = 210° + k360° \\ x = -30° + k360° \end{cases}$ oppure $\quad x = (-1)^h \cdot 210° + h180°$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad (\alpha = 60°)\begin{cases} x = 60° + k360° \\ x = 120° + k360° \end{cases}$ oppure $\quad x = (-1)^h \cdot 60° + h180°$

CASI PARTICOLARI

$\boxed{\sin x = 0}$ $\quad (\alpha = 0) \Rightarrow$ $\boxed{x = k180°}$ **oppure** $\boxed{x = k\pi}$

$\boxed{\sin x = 1}$ $\quad (\alpha = 90°) \Rightarrow$ $\boxed{x = (4k + 1)90°}$ oppure $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k + 1)\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\sin x = -1}$ $\quad (\alpha = -\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ $\boxed{x = (4k - 1)90°}$ oppure $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k - 1)\frac{\pi}{2}}$

APPLICAZIONI

$\boxed{\sin f(x) = \sin g(x)}$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + 2k\pi$ oppure $f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$

Due angoli aventi lo stesso seno risultano, a meno di multipli di 2π, uguali o supplementari

Le due precedenti formule possono essere così sintetizzate :

$\boxed{f(x) = (-1)^h \cdot g(x) + h\pi}$ oppure $\boxed{g(x) = (-1)^h \cdot f(x) + h\pi}$

$\boxed{\sin(4x - 20°) = \sin(-2x + 40°)}$ $\quad 4x - 20° = -2x + 40° + k360° \quad , \quad x = (6k + 1)10°$

$4x - 20° = 180° + 2x - 40° + k360° \qquad x = (9k + 4)20°$

$\boxed{\sin(x + 10°) = \cos 2x}$ $\quad \sin(x + 10°) = \sin(90° - 2x) \quad x + 10° = 90° - 2x + k360°$

$$\boxed{x = \frac{80°}{3} + k120°}$$

$x + 10° = 180° - 90° + 2x + k360° \qquad \boxed{x = -80° + k360°}$

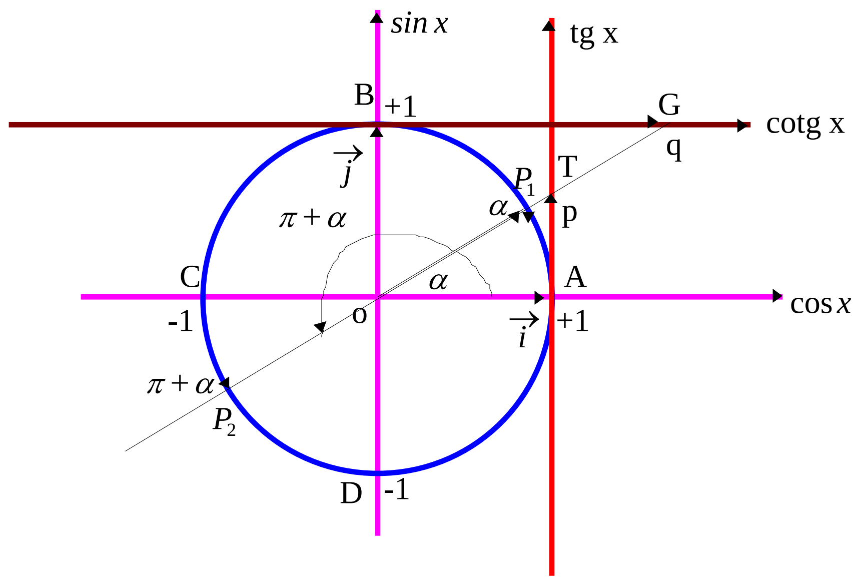
Le soluzioni dell'equazione goniometrica $\boxed{\mathrm{tg}\, x = p}$ con $p \in R$ sono :

$\boxed{x = \alpha + k\pi}$ oppure $\boxed{x = \alpha + k180°}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \cdots\cdots$ e

$0° \le \alpha \le 180°$ $(\ \alpha \ne 90°\ )$ $-90° < \alpha < 90°$

Queste soluzioni possono essere indicate con la scrittura : $\boxed{x = \mathrm{arctg}\, p}$

$tg\, x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 45° + k180°$ $\quad tg\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$



APPLICAZIONI

$$tg\, f(x) = tg\, g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + k\pi \quad \text{oppure} \quad g(x) = f(x) + k\pi$$

Le soluzioni dell ' equazione goniometrica $\boxed{\mathrm{cotg}\, x = q}$ con $q \in R$ sono :

$\boxed{x = \alpha + k\pi}$ oppure $\boxed{x = \alpha + k180°}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \cdots\cdots$ e

$0° \le \alpha \le 180°$ $(\ \alpha \ne 90°\ )$ $-90° < \alpha < 90°$

Queste soluzioni possono essere indicate con la scrittura : $\boxed{x = \mathrm{arccotg}\, p}$

$\boxed{\mathrm{cotg}\, x = \sqrt{3}}$ $\quad (\alpha = 30°) \quad$ $x = 30° + k180°$

$\boxed{tg(3x + 75°) = tg(x + 35°)}$ $\quad 3x + 75° = x + 35° + k360° \quad$ $\boxed{x = -20° + k90°}$

Risoluzione di semplici equazioni goniometriche

Le equazioni goniometriche del tipo :

$a \cdot sin^2 x + b \cdot sin x + c = 0$	$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x + c = 0$	$a \cdot tg^2 x + b \cdot tg x + c = 0$

si risolvono ponendo rispettivamente: $sin x = y$, $\cos x = y$, $tg x = y$

Si ottiene l'equazione di secondo grado $ay^2 + by + c = 0$ che ha come radici i numeri :

$$y_1 \ , \ y_2$$

Le equazioni goniometriche date si trasformano nelle seguenti equazioni goniometriche elementari :

$$sin x = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases} \quad , \quad \cos x = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases} \quad , \quad tg x = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}$$

ESEMPI

$\boxed{2 sin^2 x - 5 sin x + 2 = 0}$ Pongo : $sin x = y$ Ottengo : $2y^2 - 5y + 2 = 0$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{sin x = 2}$ questa equazione non ammette radici reali

$$\boxed{sin x = \frac{1}{2}} \qquad (\ \alpha = 30° \ ) \qquad \begin{cases} x = 30° + k360° \\ x = 150° + k36° \end{cases}$$

Le equazioni goniometriche del tipo:

$a \cdot sin^2 x + b \cdot \cos x + c = 0$	$a \cdot \cos^2 x + b \cdot sin x + c = 0$

si risolvono tenendo presente l'identità fondamentale della goniometria :

$$sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (\quad sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad , \quad \cos^2 x = 1 - sin^2 x \ )$$

ESEMPI

$\boxed{2(1 - sin^2 x) = \sqrt{3}\cdot\cos x}$ $\quad 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cdot\cos x = 0 \quad \cos x(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Le equazioni goniometriche

$a\cdot tg^2 x + b\cdot sin^2 x + c = 0$	$a\cdot tg^2 x + b\cdot\cos^2 x + c = 0$

si risolvono tenendo presente che:

$$tg^2 x = \frac{sin^2 x}{1 - sin^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \qquad sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$$

$$\cos^2 x = 1 - sin^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$$

L'equazione $\boxed{a\cdot tg^2 x + b\cdot sin^2 x + c = 0}$ si tramuta in una delle tre seguenti equazioni goniometriche :

$$b\cdot sin^4 x - (a + b - c)sin^2 x - c = 0$$

$$b\cdot\cos^4 x + (a - b - c)\cos^2 x - a = 0$$

$$a\cdot tg^4 x + (a + b + c)tg^2 x + c = 0$$

L'equazione $\boxed{a\cdot tg^2 x + b\cdot\cos^2 x + c = 0}$ si tramuta in una delle tre seguenti equazioni goniometriche:

$$b\cdot sin^4 x - (a - 2b - c)sin^2 x + b + c = 0$$

$$b\cdot\cos^4 x - (a - c)\cos^2 x + a = 0$$

$$a\cdot tg^4 x + (a + c)tg^2 x + b + c = 0$$

ESEMPI

$$\boxed{2 + \frac{3}{2} tg^2 x = 2\cos^2 x + 1 = 0} \qquad 4 + 3tg^2 x = 4\cos^2 x + 2 \qquad 2 + 3tg^2 x = \frac{4}{1 + tg^2 x}$$

$$3tg^4 x + 5tg^2 x - 2 = 0 \qquad tg^2 x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\boxed{tg^2 x = -2}$ Questa equazione non ammette radici reali

$$\boxed{tg^2 x = \frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad tg\, x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\boxed{2sin^2 x - sin\, x - 1 = 0} \qquad sin\, x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

$$sin\, x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 210° + k360° \ \left(x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \right)$$

$$x = 180° - 210° + k360° = -30° + k360° \ \left(x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right)$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \qquad \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 60° + k360° \ \left(x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$$

$$\boxed{\cos x = 1} \quad \Rightarrow \quad x = k360° \ (x = 2k\pi)$$

$$\boxed{3tg^2 x - 4\sqrt{3}\, tg\, x + 3 = 0} \qquad tg\, x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 9}}{3} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3} \end{cases}$$

$$tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 30° + k180° \ \left(x = \frac{\pi}{6} + k\pi \right)$$

$$tg\, x = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 60° + k180° \ \left(x = \frac{\pi}{3} + k\pi \right)$$

$\boxed{tg^3 x + 1 = 0}$ $\quad (tg\, x + 1)(tg^2 x - tg\, x + 1) = 0 \quad tg\, x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 135° + k180°$

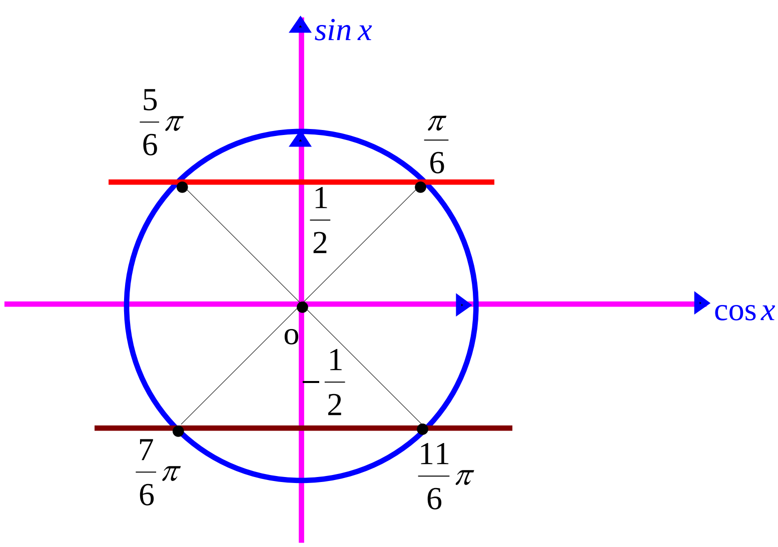
$$\left(x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \right)$$

$tg^2 x - tg\, x + 1 = 0 \quad tg\, x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ queste due equazioni goniometriche non ammettono radici reali .

$\boxed{16 sin^4 x - 1 = 0}$ $\quad (4 sin^2 x - 1)(4 sin^2 x + 1) = 0 \quad 4 sin^2 x - 1 = 0 \quad sin\, x = \pm\dfrac{1}{2}$

$sin\, x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30° + k360° \left(x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \right) x = 150° + k360° \left(x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \right)$

$sin\, x = -\dfrac{1}{2} \quad x = 210° + k360° \left(x = \dfrac{7}{6}\pi + 2k\pi \right) x = -30° + k360° \left(x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \right)$



Le formule precedenti possono essere sintetizzate nelle due seguenti formule :

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$$

$\boxed{sin\, x \cos x - \cos x = 0}$ $\quad \cos x(sin\, x - 1) = 0 \quad \cos x = 0 \quad x = 90° + k180° \left(x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right)$

$sin\, x - 1 = 0 \quad sin\, x = 1 \quad x = 90° + k360° \left(x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$

$\boxed{2 sin^2 x - \cos x = 1}$ $\quad 2 - 2\cos^2 x - \cos x = 1 \quad 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 60° + k360° \quad \left(x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \right)$

$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = (2k+1)180° \quad [\, (x = (2k+1)\pi \,]$

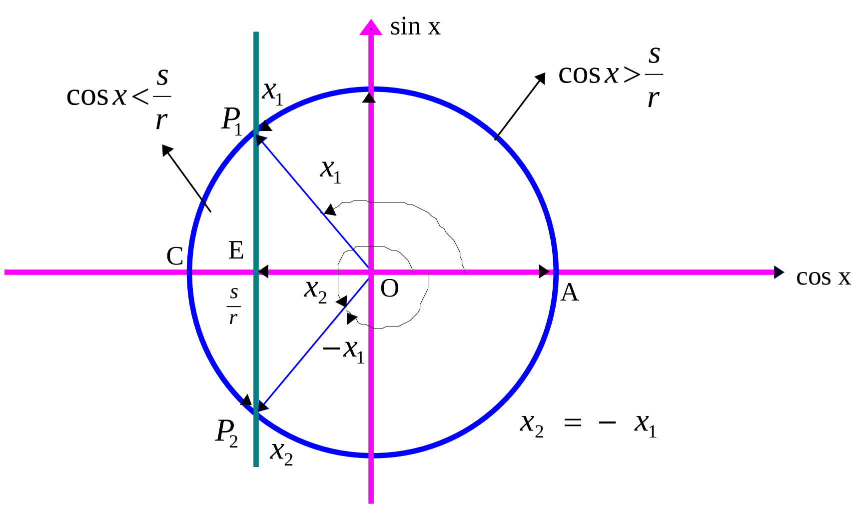
Inequazioni goniometriche elementari

Sono inequazioni riconducibili ad una delle seguenti forme :

$\boxed{r \cdot \cos x \gtrless s}$ $\boxed{a \cdot \sin x \gtrless b}$ $\boxed{p \cdot tg\, x \gtrless q}$

Risolviamo l'inequazione $\boxed{r \cdot \cos x \gtrless s}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ [1]

Sia $E - O = \frac{s}{r} \cdot \vec{i}$ il vettore rappresentativo della funzione circolare $\cos x = \frac{s}{r}$. La retta passante per E e parallela all'asse delle ordinate incontra la circonferenza goniometrica nei punti P_1 e P_2 a cui corrispondono gli angoli propri x_1 ed x_2 che sono le radici proprie dell'equazione associata $r \cos x = s$. Ai punti dell'arco $P_2 \widehat{A} P_1$ corrispondono angoli il cui coseno è maggiore di $\frac{s}{r}$ ($\cos x > \frac{s}{r}$) , mentre ai punti dell'arco $P_1 \widehat{C} P_2$ corrispondono angoli il cui coseno è minore di $\frac{s}{r}$ ($\cos x < \frac{s}{r}$) .



$$r \cdot \cos x > s \quad \text{per} \quad \begin{cases} \cos x > \frac{s}{r} \quad \textit{cioé per} \quad 0 \le x < x_1 \ , \ x_2 < x \le 2\pi \quad \textit{se} \quad r > 0 \\ \qquad \textit{oppure} \quad -x_1 < x < x_1 \\ \cos x < \frac{s}{r} \quad \textit{cioé per} \quad x_1 < x < x_2 \quad \textit{se} \quad r < 0 \end{cases}$$

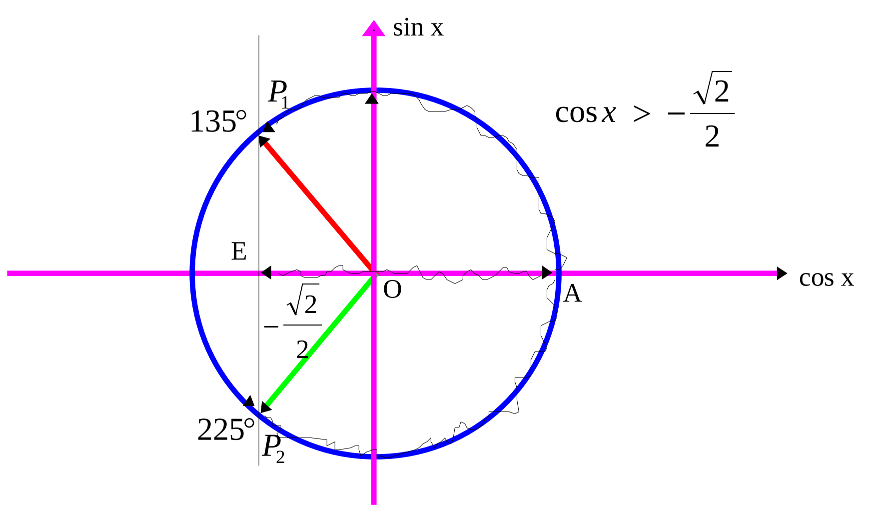
[1] L'equazione associata $r \cos x = 0$ ammette , in generale , due radici proprie x_1 ed x_2

$$r \cdot \cos x < s \quad \text{per} \quad \begin{cases} \cos x < \dfrac{s}{r} & \textit{cioé per} \quad x_1 < x < x_2 \quad \textit{se } r > 0 \\ \cos x > \dfrac{s}{r} & \textit{cioé per} \quad 0 \le x < x_1 \ , x_2 < x \le 2\pi \quad \textit{se } r < 0 \\ & \textit{oppure} \quad -x_1 < x < x_1 \end{cases}$$

ESEMPI

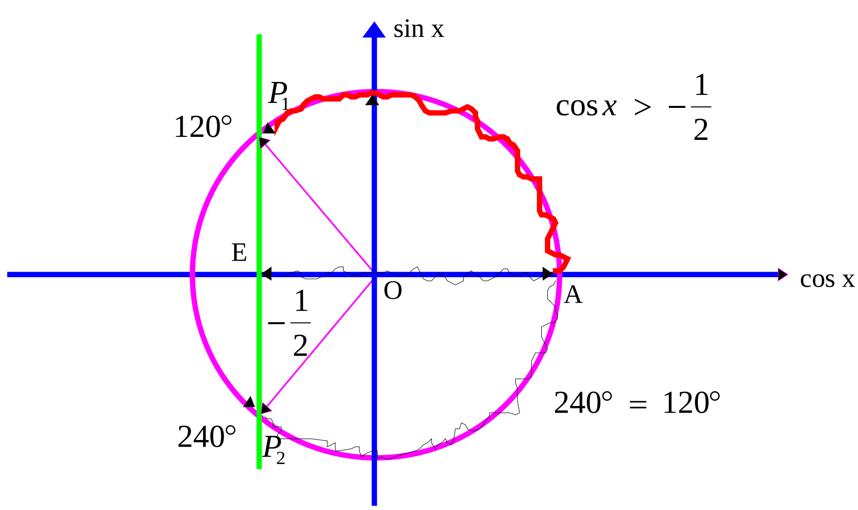
$\boxed{2\cos x + \sqrt{2} > 0}$ per $\cos x > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ cioè per $0° \le x < 135° \vee 225° < x \le 360°$

oppure per : $-135° < x < 135°$



$\boxed{-2\cos x - 1 < 0}$ per $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ cioè per $0° \le x < 120° \vee 240° < x \le 360°$

oppure per : $-120° < x < 120°$

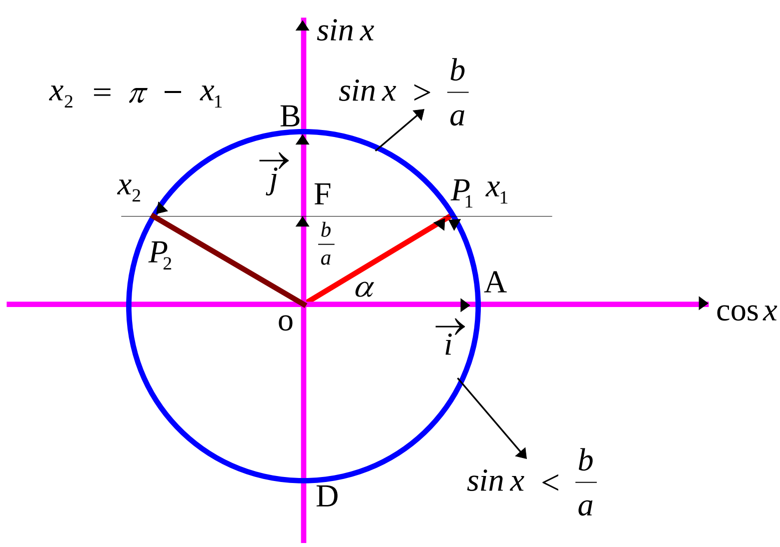


Risolviamo l'inequazione $\boxed{a \cdot \sin x \gtrless b}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ [1]

Sia $F - O = \frac{b}{a} \cdot \vec{j}$ il vettore rappresentativo della funzione circolare $sinx = \frac{b}{a}$. La retta passante per F e parallela all'asse delle ascisse incontra la circonferenza goniometrica nei punti P_1 e P_2 a cui corrispondono gli angoli propri x_1 ed x_2 che sono le radici proprie dell'equazione associata $a \sin x = b$. Ai punti dell'arco $P_2 \widehat{B} P_1$ corrispondono angoli il cui seno è maggiore di $\frac{b}{a}$ ($\sin x > \frac{b}{a}$) , mentre ai punti dell'arco $P_1 \widehat{D} P_2$ corrispondono angoli il cui seno è minore di $\frac{b}{a}$ ($\sin x < \frac{b}{a}$) .

$$a \cdot \sin x > b \quad \text{per} \quad \begin{cases} \sin x < \dfrac{b}{a} & cioé \;\; per \quad 0 \le x < x_1 \; , x_2 < x \le 2\pi \\ & oppure \quad -(\pi + x_1) < x < x_1 \quad se \;\; a < 0 \\ \cos x > \dfrac{b}{a} & cioé \quad per \quad x_1 < x < x_2 \quad se \;\; a > 0 \end{cases}$$

$$a \cdot \sin x < b \quad \text{per} \quad \begin{cases} \sin x < \dfrac{b}{a} & cioé \;\; per \quad 0 \le x < x_1 \; , x_2 < x \le 2\pi \\ & oppure \quad -(\pi + x_1) < x < x_1 \quad se \;\; a > 0 \\ \cos x > \dfrac{b}{a} & cioé \quad per \quad x_1 < x < x_2 \quad se \;\; a < 0 \end{cases}$$

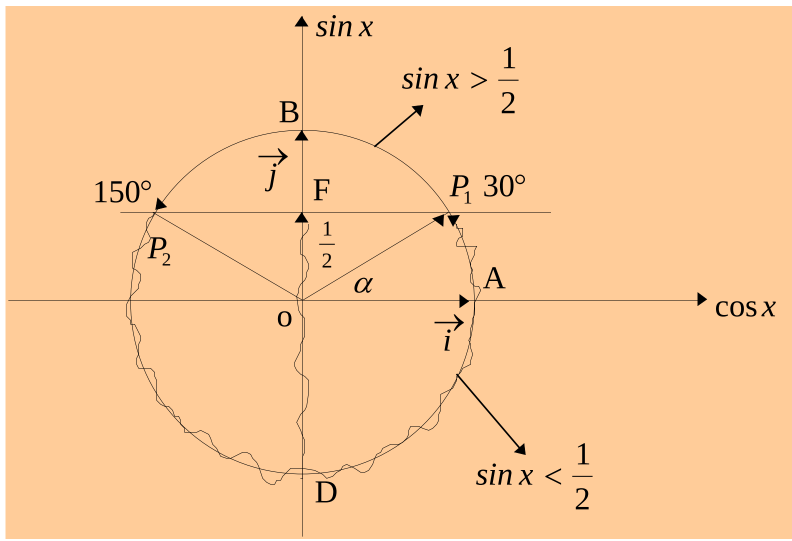


[1] L'equazione associata $a \sin x = b$ ammette , in generale , due radici proprie x_1 ed x_2

ESEMPI

$\boxed{-2\sin x + 1 > 0}$ per $\sin x < \frac{1}{2}$ cioè per : $0° \leq x < 30°$, $150° < x \leq 360°$

o in forma compatta : $-210° < x < 30°$

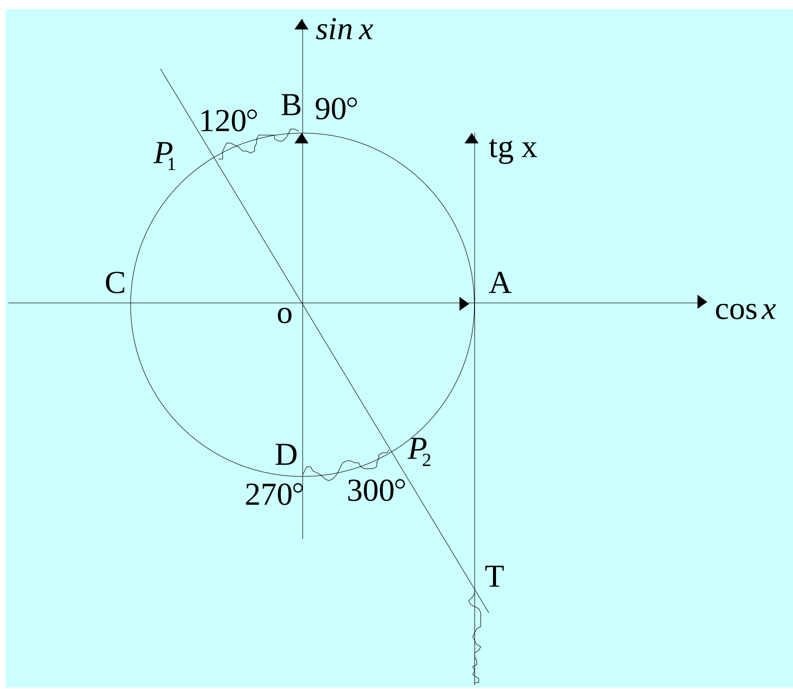


Risolviamo l'inequazione $\boxed{p \cdot tg\,x \gtrless q}$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Sia $T - A = \frac{q}{p} \cdot \vec{j}$ il vettore rappresentativo della funzione circolare $tg\,x = \frac{q}{p}$. La retta OT incontra la circonferenza goniometrica nei punti P_1 e P_2 a cui corrispondono gli angoli x_1 ed x_2 che sono le radici proprie dell'equazione associata $p \cdot tg\,x = q$. Ai punti degli archi $P_1\widehat{B}$ e $P_2\widehat{D}$ corrispondono angoli la cui tangente è maggiore di $\frac{q}{p}$ ($tg\,x > \frac{q}{p}$) mentre ai punti degli archi $B\widehat{C}P_2$, $D\widehat{A}P_1$ corrispondono angoli la cui tangente è minore di $\frac{q}{p}$ ($tg\,x < \frac{q}{p}$) .

$$p\,tg\,x > q \quad \text{per} \quad \begin{cases} x_1 < x < \frac{\pi}{2} \ , \ x_2 < x < \frac{3}{2}\pi \qquad se \quad p > 0 \\ 0 \leq x < x_1 \ , \ \frac{\pi}{2} < x < x_2 \ , \ \frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi \quad oppure \\ -\frac{\pi}{2} < x < x_1 \ , \ \frac{\pi}{2} < x < x_2 \qquad se \quad p < 0 \end{cases}$$

$$p\,tg\,x < q \qquad \begin{cases} x_1 < x < \dfrac{\pi}{2}\ ,\ x_2 < x < \dfrac{3}{2}\pi & se\ \ p < 0 \\ 0 \le x < x_1\ ,\ \dfrac{\pi}{2} < x < x_2\ ,\ \dfrac{3}{2}\pi < x \le 2\pi\ \ oppure \\ -\dfrac{\pi}{2} < x < x_1\ ,\ \dfrac{\pi}{2} < x < x_2 & se\ \ p > 0 \end{cases}$$

$\boxed{tg\,x + \sqrt{3} < 0}$ per $tg\,x < -\sqrt{3}$ cioè per $90° < x < 120°\ ,\ 270° < x < 300°$



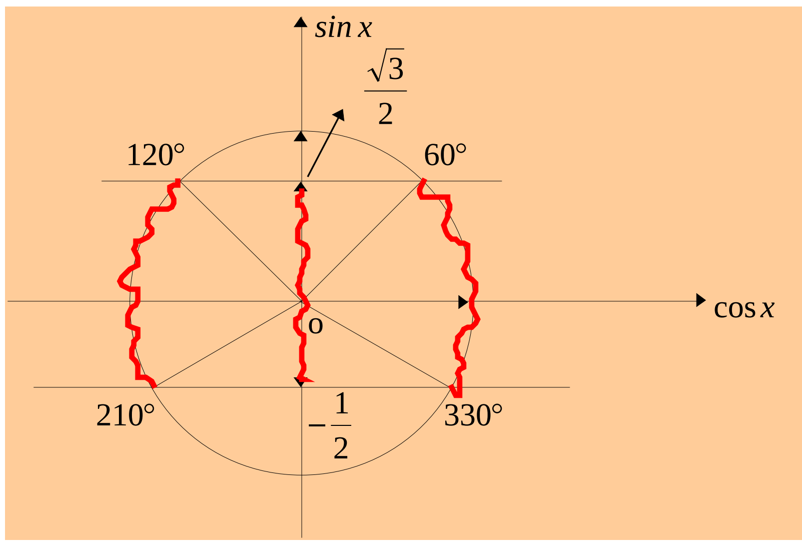
Risoluzione di semplici inequazioni goniometriche

$4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}-1)\sin x - \sqrt{3} < 0$ per $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ cioè per

$0° \leq x < 60°$, $120° < x < 210°$, $330° < x \leq 360°$ oppure $-30° < x < 60°, 120° < x < 210°$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}-1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1 \pm \left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

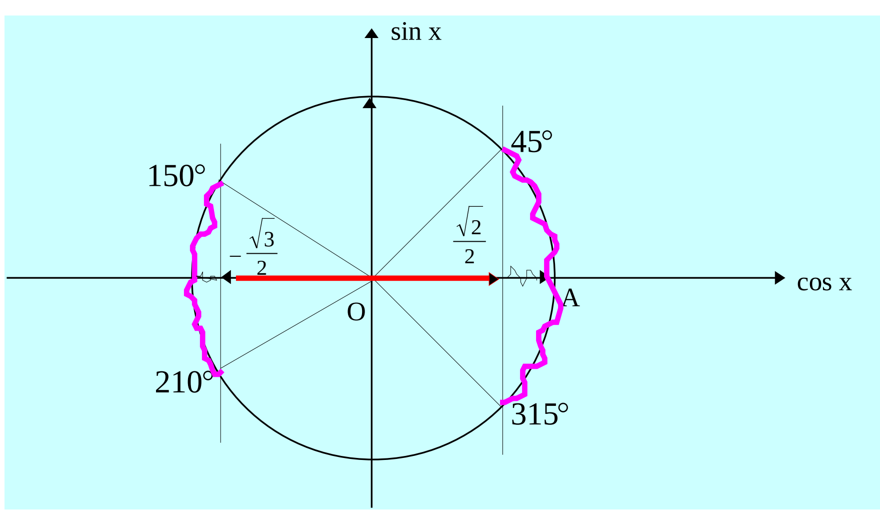
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \sin x = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



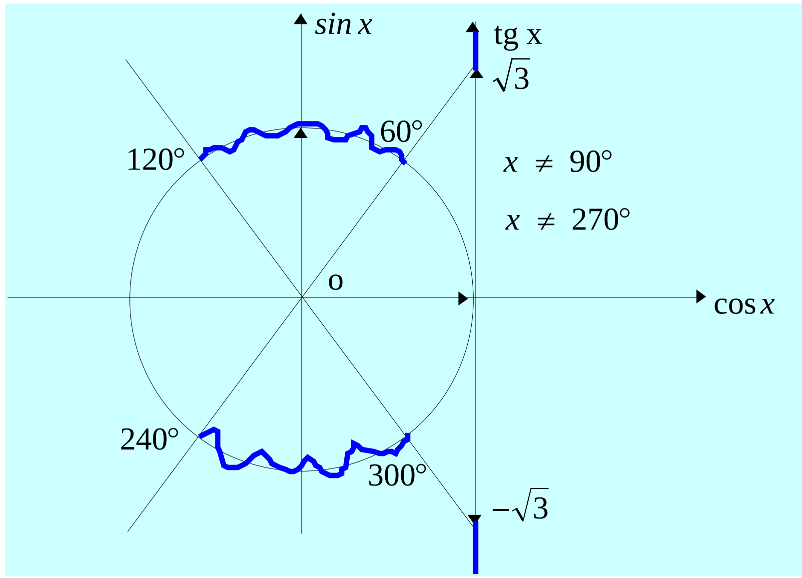
$4\cos^2 x + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos x - \sqrt{6} > 0$ per $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ cioè per :

$0 \leq x < 45°$, $150° < x < 210°$, $315° < x \leq 360°$ o , in forma compatta, per :

$-45° < x < 45°$, $150° < x < 210°$



$tg^2 x - 3 > 0$ per $tg\,x < -\sqrt{3}$, $tg\,x > \sqrt{3}$ cioè per : $60° < x < 120°$, $240° < x < 300°$



$$\frac{2\sin^2 x - (2-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{3}}{2\cos^2 x - 1} > 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \\ \frac{5}{4}\pi < x < \frac{4}{3}\pi \\ \frac{5}{3}\pi < x < \frac{7}{4}\pi \end{cases} \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(2\sin x + \sqrt{3})(\sin x - 1)}{2\cos^2 x - 1} > 0 \qquad 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \qquad 2\cos^2 x - 1 = 0 \qquad \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

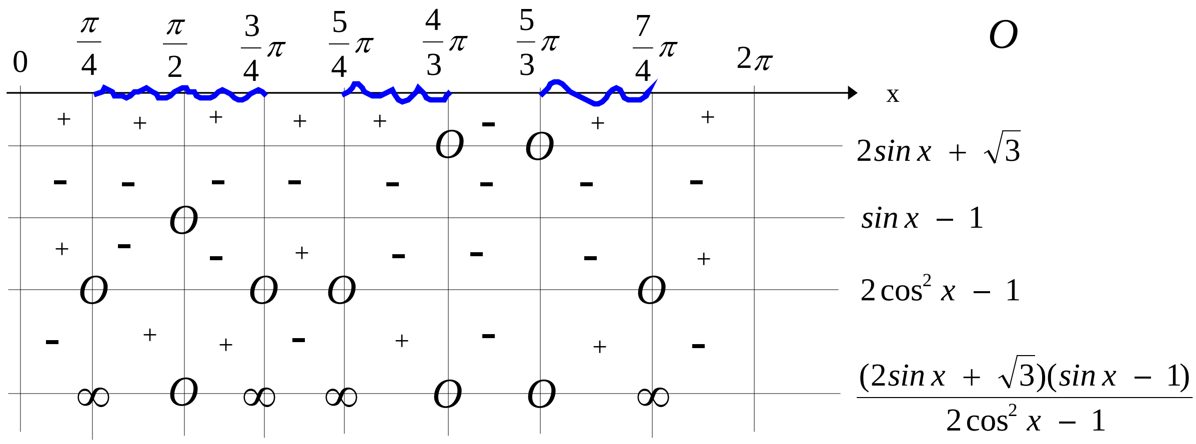
$$2\cos^2 x - 1 > 0 \quad \text{per} \quad \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \,,\ \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

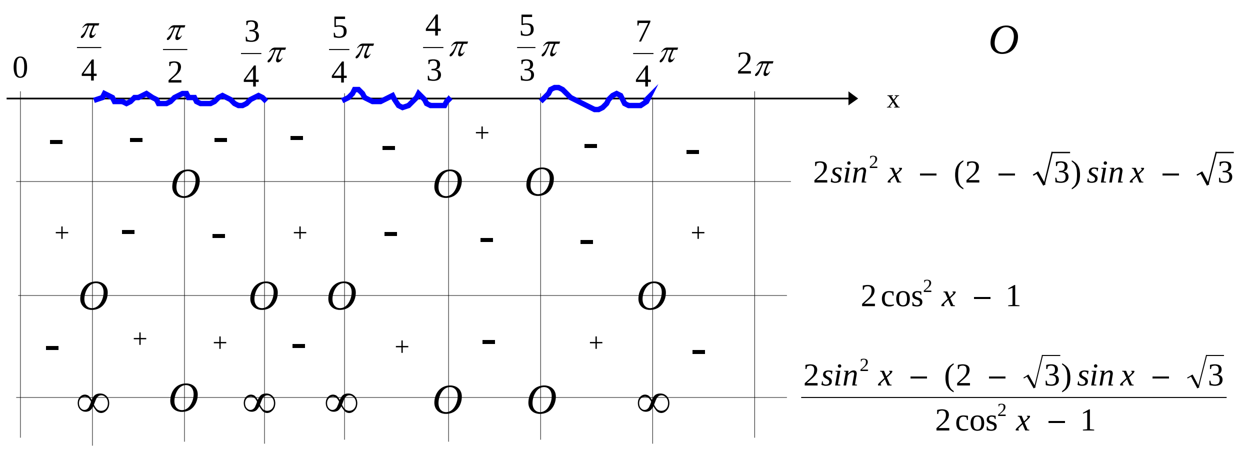
$$2\cos^2 x - 1 < 0 \quad \text{per} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

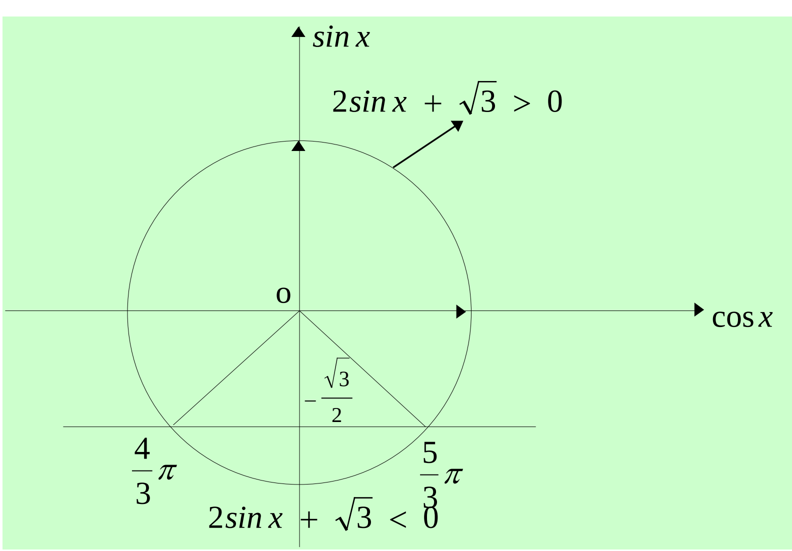
$$2\sin x + \sqrt{3} > 0 \text{ per } \sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x - 1 < 0 \quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2}$$

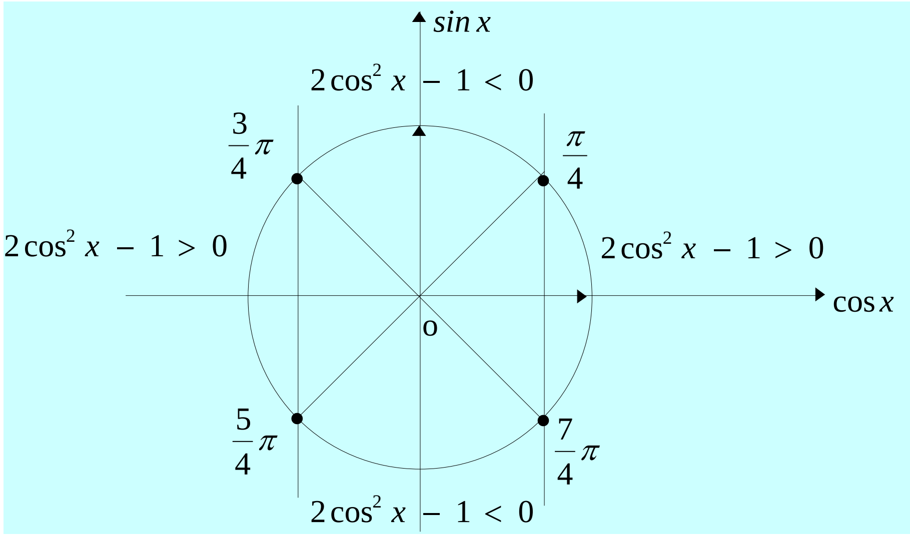
$2\sin^2 x - (2-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} > 0$ per $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x > 1$ cioè per :

$\frac{4}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$ in quanto $\sin x > 1 \quad \forall\ x \in \emptyset$ cioè l'inequazione $\sin x > 1$ non ammette soluzioni reali .









$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 > 0$ per $\cos x < -\frac{3}{2}$, $\cos x > \frac{1}{2}$ cioè per $\cos x > \frac{1}{2}$ in quanto $\cos x < -\frac{3}{2}$ non ammette soluzioni , cioè per : $0 \le x \frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi$

Altra risoluzione : $(2\cos x + 3)(2\cos x - 1) > 0$ $2\cos x + 3 > 0$ $\forall\ x \in R$ e quindi : $2\cos x - 1 > 0$ come prima .

$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 > 0$ per $\cos x < -\frac{1}{2}$, $\cos x > \frac{3}{2}$ cioè per $\cos x < -\frac{1}{2}$ in quanto $\cos x > \frac{3}{2}$ può essere trascurata in quanto non ammette soluzioni, cioè per: $120° < x < 240°$

Altra risoluzione $(2\cos x + 1)(2\cos x - 3) > 0$ $2\cos x + 3 > 0$ $\forall\ x \in R$ e , quindi , la precedente inequazione diventa : per $x 2\cos x + 1 < 0$ $\cos x < -\frac{1}{2}$ come prima .