

## Unità Didattica N° 18

### Altre proprietà delle funzioni circolari

- 1) Formule di addizione e sottrazione
- 2) Angolo formato da due rette
- 3) Formule di duplicazione
- 4) Formule parametriche
- 5) Formule di bisezione
- 6) Formule di triplicazione
- 7) Formule di prostaferesi
- 8) Formule di Werner
- 9) Formule di Simpson

### Formule di addizione e di sottrazione

Sono formule che ci consentono di calcolare le funzioni goniometriche degli angoli  $\alpha + \beta$  ed  $\alpha - \beta$  quando conosciamo le funzioni goniometriche degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ .

Siano  $\vec{e} = P - O = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}$  e  $\vec{u} = Q - O = \cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j}$  due qualsiasi vettori applicati in O, per i quali risulta:  $\alpha = (\vec{i}, \vec{e})$ ,  $\beta = (\vec{i}, \vec{u})$ .

$$\vec{e} \times \vec{u} = \cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha \cdot \vec{i} + \sin\alpha \cdot \vec{j}) \times (\cos\beta \cdot \vec{i} + \sin\beta \cdot \vec{j})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Mutando  $\beta$  in  $-\beta$  otteniamo:  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

Poiché il seno di un angolo è uguale al coseno del suo complementare possiamo scrivere:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Cambiando  $\beta$  in  $-\beta$  otteniamo:  $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

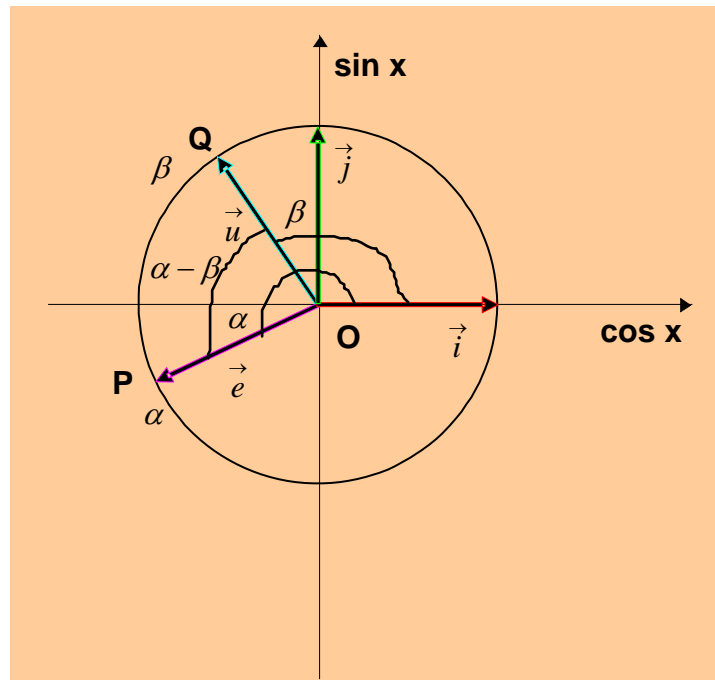
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \frac{\sin\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}$$

con  $\cos\alpha \neq 0$ ,  $\cos\beta \neq 0$  e quindi:  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$   $\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - \beta \end{matrix} \right\} \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

Alla stessa maniera si dimostra che:  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$   $\left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{matrix} \right\} \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \sin\beta} = \frac{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}}{\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}}$$

$\cos\alpha \neq 0$ ,  $\cos\beta \neq 0$ .



$$\cot g(\alpha + \beta) = \frac{\cot g\alpha \cot g\beta - 1}{\cot g\alpha + \cot g\beta} \quad \left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{matrix} \right\} \neq k\pi$$

Alla stessa maniera si dimostra che :

$$\cot g(\alpha - \beta) = \frac{\cot g\alpha \cot g\beta + 1}{\cot g\beta - \cot g\alpha} \quad \left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - \beta \end{matrix} \right\} \neq k\pi$$

<< **Calcolare i valori naturali delle funzioni circolari degli angoli di 15° e 75°** >>

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75^\circ$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3} = \operatorname{cotg} 75^\circ \quad \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} = \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$\operatorname{sec} 45^\circ = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2} = \operatorname{cosec} 75^\circ$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} = \operatorname{sec} 75^\circ$$

### Angolo formato da due rette

E' noto dalla geometria euclidea che due rette  $r$  ed  $r_1$  non orientate formano quattro angoli a due a due uguali ed a due a due supplementari . Questo significa che , in generale , le due rette formano quattro angoli di cui due sono acuti ed uguali tra loro, gli altri due sono ottusi, uguali fra loro e supplementari dei precedenti . Se le due rette sono fra loro ortogonali allora i quattro angoli sono uguali fra loro e sono pertanto retti . Noto il valore  $\vartheta$  di uno di essi possiamo facilmente calcolare i valori degli altri tre . Supponiamo che le rette considerate abbiano equazioni :

$$r : y = mx + n \quad \text{oppure} \quad ax + by + c = 0 , \quad m = -\frac{a}{b}$$

$$r_1 : y = m_1x + n_1 \quad \text{oppure} \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 , \quad m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$$

Poiché risulta :  $\text{tg } \delta = m_1$  ,  $\text{tg } \varphi = m$  ,  $\delta = \varphi + \vartheta$  (  $\vartheta = \delta - \varphi$  )

$$\text{possiamo scrivere : } \text{tg } \vartheta = \text{tg}(\delta - \varphi) = \frac{\text{tg } \delta - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \varphi \text{tg } \delta} \quad \text{tg } \vartheta = \frac{m_1 - m}{1 + mm_1} = \frac{ab_1 - a_1b}{aa_1 + bb_1} \quad [1]$$

$$\beta = \pi - \vartheta \Rightarrow \text{tg } \beta = \text{tg}(\pi - \vartheta) = -\text{tg } \vartheta \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{m - m_1}{1 + mm_1} = \frac{a_1b - ab_1}{aa_1 + bb_1} \quad [2]$$

Quindi se intendiamo riferirci all'angolo acuto  $\vartheta$  dobbiamo scrivere :

$$\widehat{\text{tg } r r_1} = \left| \frac{m_1 - m}{1 + mm_1} \right| = \left| \frac{ab_1 - a_1b}{aa_1 + bb_1} \right| \quad \text{tg } \vartheta = \left| \frac{m_1 - m}{1 + mm_1} \right| = \left| \frac{ab_1 - a_1b}{aa_1 + bb_1} \right|$$

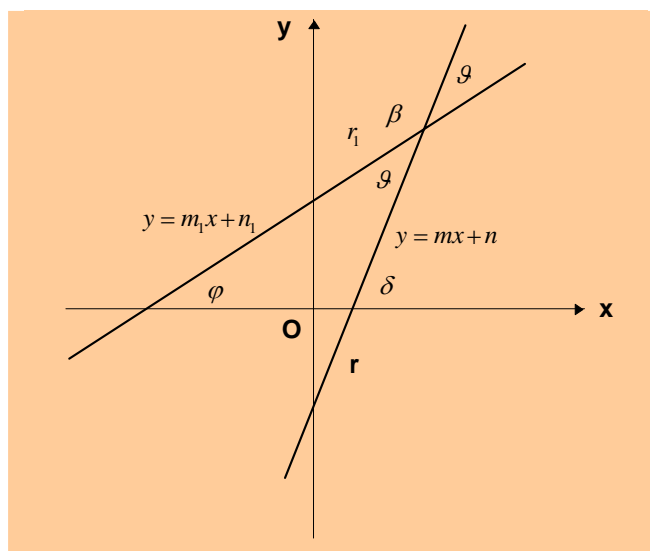
$$r_1 // r \Rightarrow m_1 - m = 0 \Rightarrow m_1 = m$$

che esprime la **condizione di parallelismo** già trovata per altra via .

$$r_1 \perp r \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{tg } \vartheta = \infty \Rightarrow$$

$$1 + m \cdot m_1 = 0$$

che esprime la **condizione di perpendicolarità** già trovata per altra via .



## Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione si ricavano da quelle di addizione ponendo in esse  $\alpha = \beta$ .

Esse ci consentono, noti i valori delle funzioni circolari dell'angolo  $\alpha$ , di calcolare quelle dell'angolo doppio  $2\alpha$ .

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq \begin{cases} (2k+1)\frac{\pi}{2}, & (2k+1)90^\circ \\ (2k+1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq k \frac{\pi}{2}$$

<< **Calcolare i valori naturali delle funzioni circolari degli angoli di  $36^\circ$  e  $54^\circ$**  >>

$$\cos 36^\circ = \cos 2 \cdot 18^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} - \frac{3 - \sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \sin 54^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin 36^\circ &= 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 2 \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2 (10 + 2\sqrt{5})}}{8} = \\ &= \frac{\sqrt{(3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}}{4} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^\circ \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{(1 + \sqrt{5})^2}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = \operatorname{cotg} 54^\circ$$

$$\operatorname{cotg} 36^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 36^\circ} = \frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} = \frac{1}{5} \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \operatorname{tg} 54^\circ$$

### Formule parametriche

Le formule parametriche sono formule che ci consentono di esprimere razionalmente le funzioni circolari di un angolo mediante la tangente goniometrica dell'angolo metà .

Esse si deducono dalle formule di duplicazione .

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha = \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq \begin{cases} (2k + 1)\frac{\pi}{2}, & (2k + 1)90^\circ \\ (2k + 1)\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cot g 2\alpha = \frac{\cot g^2\alpha - 1}{2\cot g\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \neq k\frac{\pi}{2}$$

### Formule di bisezione

Le formule di bisezione permettono di esprimere le funzioni circolari dell'angolo  $\alpha$  mediante quelle dell'angolo doppio  $2\alpha$  . Si ricavano dalle formule di duplicazione .

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}} \quad \text{con} \quad \alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \cot g\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}}$$

**Dimostrare le due seguenti identità :**

$$tg \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$tg \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = tg \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} = tg \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

**Calcolare i valori delle funzioni circolari degli angoli di 22°30' e 67°30' .**

$$\cos 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sin 67^\circ 30'$$

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \cos 67^\circ 30'$$

$$tg 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1}} = \sqrt{2} - 1 = ctg 67^\circ 30'$$

$$\cot g 22^\circ 30' = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = tg 67^\circ 30'$$

### Formule di prostaferesi

Le formule di prostaferesi servono a trasformare somme algebriche in prodotti , servono cioè a rendere logaritmica una espressione polinomia .

Esse si ricavano dalle formule di addizione e sottrazione tenendo presente le seguenti relazioni :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{p + q}{2} \\ \beta = \frac{p - q}{2} \end{array} \right.$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \quad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta \quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \cos q = \sin p + \sin(90^\circ - q) = 2\sin\frac{p+(90^\circ-q)}{2}\cos\frac{p-(90^\circ-q)}{2}$$

$$\sin p + \cos q = 2\sin\left(45^\circ + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2} - 45^\circ\right)$$

$$\sin p - \cos q = \sin p - \sin(90^\circ - q) = 2\cos\frac{p+(90^\circ-q)}{2}\sin\frac{p-(90^\circ-q)}{2}$$

$$\sin p - \cos q = 2\cos\left(45^\circ + \frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2} - 45^\circ\right)$$

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p \cos q \pm \sin q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q} \quad \cot g p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}$$

<< **Risolvere la seguente equazione goniometrica**  $\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$  >>

Applicando le formule di **prostaferesi** otteniamo :

$$2\cos\frac{8x}{2}\sin\frac{2x}{2} = 2\cos\frac{8x}{2}\cos\frac{4x}{2} \quad \text{cioè :} \quad \cos 4x \sin x = \cos 4x \cos 2x ;$$

$$\cos 4x(\sin x - \cos 2x) = 0 \quad , \quad \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \quad , \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k 30^\circ + k \cdot 180^\circ \quad , \quad \sin x = -1 \Rightarrow x = (4k - 1)\frac{\pi}{2}$$



## Formule di triplicazione

Si ricavano applicando le formule di addizione.

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha =$$

$$\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha =$$

$$= \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha =$$

$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

In maniera del tutto analoga si dimostrano le seguenti identità :

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cot} g 3\alpha = \frac{\operatorname{cot} g^3 \alpha - 3\operatorname{cot} g \alpha}{3\operatorname{cot} g^2 \alpha - 1}$$

Verificare la seguente identità :

$$\frac{\operatorname{tg} 3y}{\operatorname{tg} y} = \frac{2\cos 2y + 1}{2\cos 2y - 1}$$

$$\frac{\operatorname{tg} 3y}{\operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} y(3 - \operatorname{tg}^2 y)}{\operatorname{tg} y(1 - 3\operatorname{tg}^2 y)} = \frac{3 - \frac{1 - \cos 2y}{1 + \cos 2y}}{1 - \frac{3(1 - \cos 2y)}{1 + \cos 2y}} = \frac{3 + 3\cos 2y - 1 + \cos 2y}{1 + \cos 2y - 3 + 3\cos^2 y} = \frac{2\cos 2y + 1}{2\cos 2y - 1}$$

Eliminare l'angolo  $\vartheta$  dal seguente sistema :

$$\begin{cases} x = 3\cos\vartheta + \cos 3\vartheta \\ y = 3\sin\vartheta + \sin 3\vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3\cos\vartheta + 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta \\ x = 3\sin\vartheta + 4\sin^3\vartheta - 3\sin\vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4\cos^3\vartheta \\ y = 4\sin^3\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \sin\vartheta = \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos^2\vartheta = \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \sin^2\vartheta = \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1 = \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{cioè :}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{16}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{16}} = 1$$

Risolvere il seguente sistema goniometrico 
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{Dividendo membro a membro otteniamo :}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = 1 \quad \text{cioè : } \frac{x+y}{2} = 45^\circ + k180^\circ \quad x+y = 90^\circ + k360^\circ \quad \boxed{y = 90^\circ + k360^\circ - x}$$

Sostituendo nella seconda equazione del sistema otteniamo :  $\cos x + \cos(90^\circ - k360^\circ - x) = 1$

$\cos x + \sin x = 1$  Si tratta di una equazione lineare in seno e coseno le cui soluzioni sono :

$$x = k360^\circ \quad x = 90^\circ + k360^\circ$$

### Formule di Werner

Le formule di Werner servono a trasformare prodotti in somme algebriche .

Esse si deducono facilmente utilizzando le formule di addizione e sottrazione in tutte le loro possibili combinazioni .

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos\alpha \sin\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

**Risolvere la seguente equazione goniometrica**  $4.\sin x.\sin 3x = 1$

$$2(\cos 2x - \cos 4x) = 1 \quad \text{Ma : } \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \quad \text{Quindi : } 4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 1 = 0$$

$$\cos 2x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad 2x = \pm 36^\circ + k360^\circ \quad x = \pm 18^\circ + k180^\circ$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad 2x = \pm 108^\circ + k360^\circ \quad x = \pm 54^\circ + k180^\circ$$

Le **formule di Werner** possono essere dimostrate vettorialmente .

### Formule di moltiplicazione

Le formule di moltiplicazione si ottengono ponendo nelle formule di addizione  $\beta = (n - 1)\alpha$  .

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin n\alpha = \sin\alpha \cos(n-1)\alpha + \cos\alpha \sin(n-1)\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos n\alpha = \cos\alpha \cos(n-1)\alpha + \sin\alpha \sin(n-1)\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(n-1)\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(n-1)\alpha}$$

$$\operatorname{cot} g(\alpha + \beta) = \operatorname{cot} g n\alpha = \frac{\operatorname{cot} g\alpha \operatorname{cot} g(n-1)\alpha - 1}{\operatorname{cot} g\alpha + \operatorname{cot} g(n-1)\alpha}$$

### Formule di Simpson

Possono essere utili le seguenti due formule di Simpson :

$$\sin n\beta = 2\cos\beta \sin(n-1)\beta - \sin(n-2)\beta$$

$$\cos n\beta = 2\cos\beta \cos(n-1)\beta - \cos(n-2)\beta$$

Si ricavano dalle identità

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha \cos\beta \quad \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha \sin\beta$$

ponendo  $\alpha = (n - 1)\beta$  .

Infatti , in tal caso , abbiamo :  $\alpha + \beta = n\beta - \beta + \beta = n\beta$  ,

$\alpha - \beta = n\beta - \beta - \beta = (n - 2)\beta$  .

<< **Applicando le formule di Simpson calcolare il seno ed il coseno degli angoli  $3\beta$  e  $4\beta$**  >>

$$\sin 3\beta = 2\cos\beta \sin 2\beta - \sin\beta = 4\sin\beta \cos^2\beta - \sin\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta .$$

$$\sin 4\beta = 2\cos\beta \sin 3\beta - \sin 2\beta = 2\cos\beta (3\sin\beta - 4\sin^3\beta) - 2\sin\beta \cos\beta =$$

$$= \cos\beta (6\sin\beta - 8\sin^3\beta - 2\sin\beta) = \cos\beta (4\sin\beta - 8\sin^3\beta)$$

$$\cos 3\beta = 2\cos\beta \cos 2\beta - \cos\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$$

$$\cos 4\beta = 2\cos\beta \cos 3\beta - \cos 2\beta = 8\cos^4\beta - 8\cos^2\beta + 1$$