Unità Didattica N° 19

Risoluzione di altre equazioni goniometriche

01) Equazione lineare in seno e coseno

02) Inequazione lineare in seno e coseno

03) Equazioni omogenee in seno e coseno

04) Inequazioni omogenee in seno e coseno

05) Equazioni simmetriche rispetto a sin x e cos x

06) Sistemi di equazioni goniometriche

Equazione lineare in seno e coseno

E' un'equazione riconducibile alla seguente forma canonica:

[1] $\mathbf{a\sin x + b\cos x + c = 0}$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Se risulta $\mathbf{c = 0}$ l'equazione [1] diventa: **[2]** $\mathbf{a\sin x + b\cos x = 0}$

e si risolve dividendo ambo i membri per $\mathbf{\cos x}$, sicuramente diverso da zero in quanto non possiamo avere contemporaneamente $\cos x = 0$ e $\sin x = 0$.

$$a \cdot tg\, x + b = 0 \quad , \quad tg\, x = -\frac{b}{a} \quad , \quad \mathbf{x = arctg\left(-\frac{b}{a}\right)}$$

$$\mathbf{\sin x - \cos x = 0} \qquad tg\, x - 1 = 0 \qquad tg\, x = 1 \qquad x = (4k + 1)\frac{\pi}{4}$$

Per risolvere l'equazione [1] quando i tre coefficienti **a, b, c** sono diversi da zero ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) possiamo seguire diversi procedimenti.

Primo procedimento

Si applicano le formule parametriche che, nel nostro caso, diventano:

$$\mathbf{\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}} \qquad \mathbf{\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}}$$

avendo posto: $tg\frac{x}{2} = y$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ cioè: $\frac{x}{2} \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $\mathbf{x \neq (2k + 1)\pi}$

L'equazione [1] diventa: $$\frac{2ay}{1 + y^2} + \frac{b(1 - y^2)}{1 + y^2} = 0$$

$$\mathbf{(c - b)y^2 + 2ay + b + c = 0} \qquad \mathbf{[4]}$$

Si tratta di una equazione di secondo grado in **y** (cioè in $tg\frac{x}{2}$) che ammette **radici reali** se:

$$\frac{\Delta}{4} = a^2 - (c - b)(b + c) = a^2 + b^2 - c^2 \geq 0 \text{ cioè se: } \qquad \mathbf{a^2 + b^2 \geq c^2}$$

Quindi condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione lineare in seno e coseno ammetta soluzioni reali è che si abbia: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq c^2}$ **[5]**

In tal caso abbiamo: $tg\frac{x}{2} = y_1 \quad x = 2 \cdot \operatorname{arctg} y_1 \qquad tg\frac{x}{2} = y_2 \quad x = 2 \cdot \operatorname{arctg} y_2$

OSSERVAZIONE

Le soluzioni dell'equazione [1] coincidono con le soluzioni dell'equazione [4] più le eventuali soluzioni **$x = (2k+1)\pi$**.

Infatti, l'equazione [4] è equivalente all'equazione [1] soltanto se $\boxed{c - b \neq 0}$.

Se invece risulta $\boxed{c - b = 0}$, l'equazione [4] è suvvalente all'equazione [1] . Infatti , sotto tali ipotesi , una delle due radici dell'equazione [4] diventa infinita per cui possiamo scrivere :

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = \infty} \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \mathbf{x = (2k+1)\pi}$$

L'altra radice si ricava dall'equazione : $tg\frac{x}{2} = -\frac{b+c}{2a}$ $\boxed{x = 2\cdot \text{arctg}\left(-\frac{b+c}{2a}\right)}$

$3\sin x - 4\cos x - 4 = 0$ $6y - 4(1-y^2) - 4(1+y^2) = 0$

$3y - 4 = 0$, $y = \frac{4}{3}$, $x = 2\cdot\text{arctg}\frac{4}{3}$ **$x = (2k+1)\pi$** sono radici dell'equazione proposta

$3\sin x - 2\cos x = 3$ $y^2 - 6y + 5 = 0$ $y_1 = 1$, $y_2 = 5$

$$\boxed{tg\frac{x}{2} = 1} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = (4k+1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad \boxed{tg\frac{x}{2} = 5} \Rightarrow x = 2\cdot\text{arctg}5$$

Questa volta **$x = (2k+1)\pi$** non sono soluzioni dell'equazione proposta.

Secondo procedimento

Basta associare all'equazione lineare [1] l'identità goniometrica **$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$**, per cui risolvere l'equazione [1] significa risolvere il sistema:

[6] $\begin{cases} a\sin x + b\cos x + c = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$ $\cos x = -\frac{a\cdot\sin x + c}{b}$ **[7]** $\sin^2 x + \frac{(a\cdot\sin x + 1)^2}{b^2} = 1$

$(a^2+b^2)\cdot\sin^2 x + 2ac\cdot\sin x + c^2 - b^2 = 0$ $\frac{\Delta}{4} = b^2(a^2+b^2-c^2) \geq 0$ se $a^2 + b^2 \geq c^2$

Se è $\Delta > 0$ ricaviamo:

$\begin{cases} \sin x = p_1 \\ \cos x = q_1 \end{cases}$ **$x = \alpha + 2k\pi$** dove α è quell'angolo proprio il cui seno è p_1 ed il cui coseno è q_1,

oppure è quell'angolo α la cui tangente è $\frac{p_1}{q_1}$ $\left(tg\, x = \frac{p_1}{q_1}\right)$

$\begin{cases} \sin x = p_2 \\ \cos x = q_2 \end{cases}$ **x = β + 2kπ** dove β è quell'angolo proprio il cui seno è p_2 ed il cui coseno è q_2,

oppure è quell'angolo β la cui tangente è $\frac{p_2}{q_2}$ $\left(tg\, x = \frac{p_2}{q_2} \right)$

$3\sin x - 2\cos x - 3 = 0$ $\begin{cases} 3\sin x - 2\cos x - 3 = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$ $\cos x = \frac{3\sin x - 3}{2}$

$13 \cdot \sin^2 x - 18 \cdot \sin x + 5 = 0$ $\sin x = 1$ $\sin x = \frac{5}{13}$

$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$

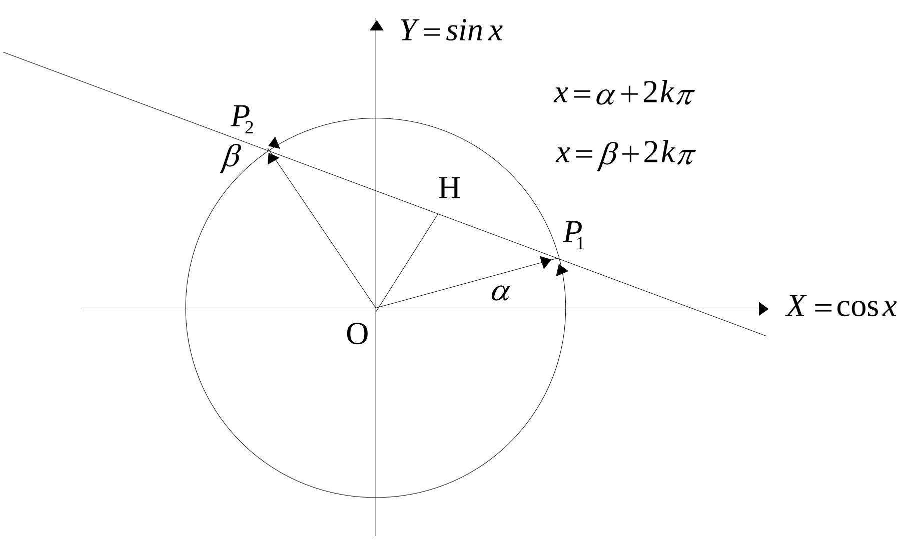
$\begin{cases} \sin x = \frac{5}{13} \\ \cos x = -\frac{12}{13} \end{cases}$ $tg\, x = -\frac{5}{12}$ $x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$

Se è $\Delta = 0$ allora risulta: $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q_2 = q$. L'equazione [1] è **equivalente** al sistema:

$\begin{cases} \sin x = p \\ \cos x = q \end{cases}$ **x = ϑ + 2kπ** dove ϑ è il **più piccolo angolo positivo** (oppure è l'**angolo proprio**) il cui seno è **p** ed il cui coseno è **q**.

Il sistema [6] è suscettibile della seguente interpretazione cartesiana. Ponendo $\cos x = X$, $\sin x = Y$ otteniamo :

$\begin{cases} aY + bX + c = 0 & \text{equazione di una retta } r \\ X^2 + Y^2 = 1 & \text{equazione di una circonferenza } \sigma \text{ di centro O e raggio unitario (circonferenza goniometrica)} \end{cases}$



Il sistema [6] ammette soluzioni se : $\overline{OH} = d(O,r) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$ cioè se : $a^2 + b^2 \geq c^2$

In tal caso la retta **r** incontra la circonferenza goniometrica σ in due punti (eventualmente coincidenti se $\overline{OH} = 1$) P_1 e P_2 a cui corrispondono gli angoli $A\hat{O}P_1 = \alpha$, $A\hat{O}P_2 = \beta$.

Terzo procedimento: metodo dell'angolo ausiliario

Scriviamo l'equazione lineare in seno e coseno nella seguente maniera

$$\mathbf{a \sin x + b \cos x + c = 0} \qquad [7]$$

e dividiamo ambo i membri per **a**: $\sin x + \dfrac{b}{a} \cdot \cos x = \dfrac{c}{a}$

Introduciamo l'angolo ausiliario ϑ mediante la relazione:

[8] $$\mathbf{\frac{b}{a} = tg\,\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}} \qquad 0° < \vartheta < 180°$$

osservando che deve essere:

$$\boxed{\sin\vartheta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \qquad \boxed{\cos\vartheta = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$0° < \vartheta < 90°$ se è $\dfrac{b}{a} > 0$ $\qquad$ $90° < \vartheta < 180°$ se è $\dfrac{b}{a} < 0$

Tenendo conto della [8] la [7] diventa :

$$\sin x + \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \qquad \sin x \cdot \cos\vartheta + \cos x \cdot \sin\vartheta = \frac{c}{a} \cdot \cos\vartheta$$

$$\sin(x + \vartheta) = \frac{c}{a} \cdot \cos\vartheta = \frac{c}{a} \cdot \frac{\pm a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{cioè :} \quad \mathbf{\sin(x + \vartheta) = \frac{c}{a} \cdot \cos\vartheta = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \qquad \mathbf{[10]}$$

La [10] è una equazione goniometrica elementare le cui radici possono essere facilmente ricavate.

Intanto è opportuno osservare che: $-1 \leq \sin(x + \vartheta) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{\pm c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$

Questo sistema di inequazioni è verificato se $a^2 + b^2 \geq c^2$ che esprime la condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione [10] e quindi l'equazione [7] ammetta radici reali.

Se δ è l'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ il cui seno vale $\frac{c}{a}\cdot\cos\vartheta$ allora le **radici proprie** dell'equazione [10], cioè dell'equazione [7], sono:

$$\begin{cases} x_1 + \vartheta = \delta \\ x_2 + \vartheta = \pi - \delta \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad \begin{cases} x_1 = \delta - \vartheta \\ x_2 = \pi - (\delta + \vartheta) \end{cases}$$

Se vogliamo tutte le soluzioni dell'equazione [10] dobbiamo scrivere:

[11] $\begin{cases} \mathbf{x_1 = \delta - \vartheta + 2k\pi} \\ \mathbf{x_2 = \pi - (\delta + \vartheta) + 2k\pi} \end{cases}$ oppure $\mathbf{x = -\vartheta + (-1)^k \cdot \delta + k\pi}$ **[12]**

$\mathbf{\cos x + \sqrt{3}\cdot\sin x - 1 = 0}$ $\quad \sin x + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \sin x + \frac{\sin 30°}{\cos 30°}\cdot\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin x\cdot\cos 30° + \sin 30°\cdot\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 30°$ $\quad \mathbf{\sin(x + 30°) = \frac{1}{2}}$ $\quad (\ \delta = 30°\ )$ $\quad k \in Z$

$\mathbf{x = -30° + (-1)^k \cdot 30° + k180°}$ oppure $\begin{cases} \mathbf{x = -30° + 30° + k360° = k360°} \\ \mathbf{x = 180° - (30° + 30°) + k360° = 120° + k360°} \end{cases}$

$\mathbf{\cos x + \sqrt{3}\cdot\sin x - 1 = 0}$ $\quad \cos x + tg\,60°\cdot\sin x = 1$ $\quad \cos x\cdot\cos 60° + \sin x\cdot\sin 60° = \cos 60°$

$\cos(x - 60°) = \cos 60°$, $x - 60° = \pm 60° + k360°$ $\quad x = 60° \pm 60° + k360°$

$$\begin{cases} x = k360° \\ x = 120° + k360° \end{cases} \qquad k \in Z$$

CASO PARTICOLARE

Supponiamo che sia: $\boxed{a = b = 1}$ L'equazione [7] diventa: $\cos x + \sin x = c$

$\cos x + tg\,45°\cdot\sin x = c$, $\cos x\cdot\cos 45° + \sin 45°\cdot\sin x = c\cdot\cos 45°$, $\mathbf{\cos(x - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}c}$ **[13]**

$\boxed{\sin x + \cos - 1 = 0}$ $\quad \cos(x - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x - 45° = \pm 45° + k360°$

$$\begin{cases} x = k360° \\ x = 90° + 360° = (4k + 1)90° \end{cases} \qquad k \in Z$$

Inequazione $a\cdot\sin x + b\cdot\cos x + c \gtrless 0$

Tratteremo l'argomento attraverso la risoluzione dell'inequazione:

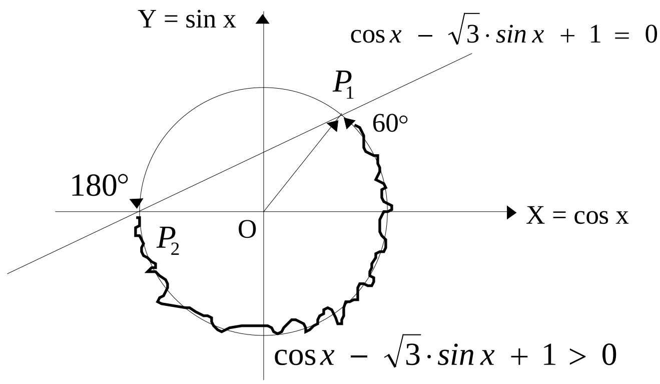
$\mathbf{\cos x - \sqrt{3}\cdot\sin x + 1 > 0}$ **[14]** per $0° \le x < 60° \vee 180° < x \le 360°$

oppure in forma più compatta: $-180° < x < 60°$

Le **radici proprie** dell'equazione associata **$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x + 1 = 0$** sono: $x_1 = 60°$, $x_2 = 180°$.

Ponendo $\cos x = X$, $\sin x = Y$ l'inequazione [14] si tramuta nell'inequazione condizionata

$$\begin{cases} X - \sqrt{3} \cdot Y + 1 > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad \textbf{[15]}$$



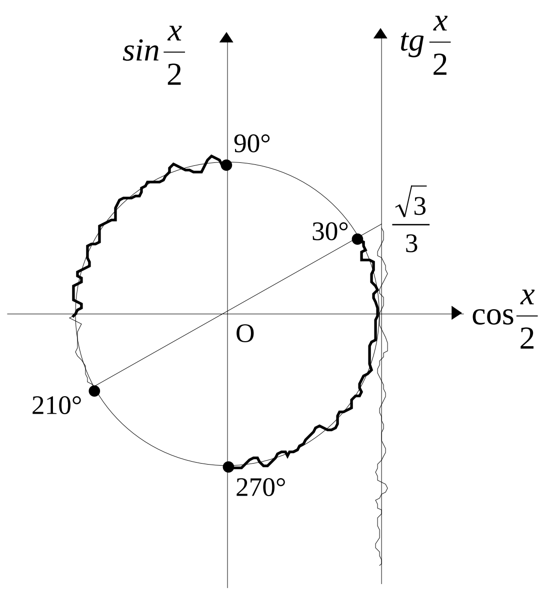
La retta di equazione $X - \sqrt{3} \cdot Y + 1 = 0$ incontra la circonferenza goniometrica di equazione $X^2 + Y^2 = 1$ nei punti $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $P_2(-1, 0)$ e divide il piano cartesiano XOY in due semipiani di cui quello che contiene l'origine **O** è costituito dai punti $P(X, Y) \equiv P(\cos x, \sin x)$ le cui coordinate verificano la [15] . Pertanto gli angoli **x** che risolvono l'inequazione [14] corrispondono ai punti della circonferenza goniometrica che appartengono al suddetto semipiano.

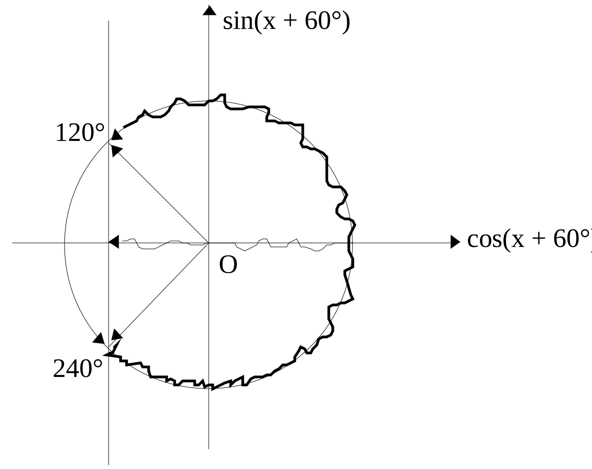
Altro procedimento $\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x + 1 > 0$

Tenendo presente che $0 \le x \le 360° \Rightarrow 0° \le \frac{x}{2} \le 180°$, applicando le formule parametriche l'inequazione [14] si tramuta nell'inequazione equivalente:

$-\sqrt{3} \cdot tg\frac{x}{2} + 1 > 0$ per $tg\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ cioè per : $0° \le \frac{x}{2} < 30° \vee 90° < \frac{x}{2} \le 180°$ cioè per :

$$0° \le x < 60° \vee 180° < x \le 360°$$





Altro procedimento

$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x + 1 > 0$ $\quad \cos x \cdot \cos 60° - \sin 60° \cdot \sin x + \cos 60° > 0 \quad \cos(x + 60°) > -\frac{1}{2}$

per $\quad 60° \leq x + 60° < 120° \vee 240° < x + 60° \leq 420°$

cioè per: $\quad 0° \leq x < 60° \vee 180° < x \leq 360°$ $\quad$ oppure :

$-120° < x + 60° < 120°$ cioè $-180° < x < 60° \quad \Leftrightarrow \quad 0° \leq x < 60° \vee 180° < x \leq 360°$

Oppure, ponendo $x + 60° = t$ otteniamo :

$$\begin{cases} \cos t > -\frac{1}{2} \\ 60° < t < 420° \end{cases} \quad \text{per} \quad 60° \leq t < 120° \vee 240° < t \leq 420°$$

$60° \leq x + 60° < 120° \vee 240° < x + 60° \leq 420°$ cioè $0° \leq x < 60° \vee 180° < x \leq 360°$

$$0° \leq x \leq 360° \quad \Leftrightarrow \quad 60° \leq x + 60° \leq 420°$$

Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno

Sono equazioni che possono essere ricondotte alla seguente forma :

$$\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0} \qquad \textbf{[1]}$$

Se è $\boxed{a = 0}$ la [1] diventa: $\quad$ **[2]** $\quad \mathbf{b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$

e l'equazione che si ottiene si risolve facilmente.

$\cos x(b \cdot \sin x + c \cdot \sin x) = 0 \qquad \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}}$

$b \cdot \sin x + c \cdot \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\, x = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = arctg\left(-\frac{c}{a}\right)}$

Se è $\boxed{a \neq 0}$ basta dividere ambo i membri dell'equazione [1] per $\cos^2 x$ sicuramente diverso da zero . $\mathbf{a \cdot tg^2 x + b \cdot tg\, x + c = 0}$ $\quad tg\, x = p_1 \Rightarrow x = \text{arctg}\, p_1 \;;\; tg\, x = p_2 \Rightarrow x = \text{arctg}\, p_2$

L'equazione $\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d}$ **[3]** può essere trasformata in una equazione omogenea in seno e coseno . Infatti possiamo scrivere :

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + c \cdot \cos^2 x = d(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\mathbf{(a - d)\sin^2 x + b \cdot \sin x \cos x + (c - d)\cos^2 x = 0} \qquad \textbf{[4]}$$

Indichiamo tre metodi per risolvere l'equazione [4] equivalente all'equazione [3].

PRIMO METODO

Se è $\boxed{a \neq d}$ basta dividere ambo i membri della [4] per $\cos^2 x$, ottenendo:

$$\mathbf{(a - d)tg^2 x + b \cdot tg\, x + c - d = 0} \qquad \textbf{[5]}$$

equazione di secondo grado in $tg\, x$ facilmente risolubile.

Se è $\boxed{a = d}$ la [4] diventa : $\mathbf{b \cdot \sin x \cos x + (c - d)\cos^2 x = 0}$ **[6]**

$\cos x = 0 \Rightarrow \mathbf{x = (2k+1)\frac{\pi}{2}} \quad b \cdot \sin x + (c - d) \cdot \cos x = 0, \; tg\, x = \frac{d - c}{b}, \; x = \text{arctg}\frac{d - c}{b}$

SECONDO METODO

Tenendo presente le formule di bisezione e quelle di duplicazione possiamo scrivere :

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

La [3] diventa : $\mathbf{(c - a) \cdot \cos 2x + b \cdot \sin 2x + a + c + 2d = 0}$ **[7]**

Si tratta di una equazione lineare in $\sin 2x$ e $\cos 2x$ che sappiamo risolvere.

TERZO METODO

Basta esprimere $\sin x$ e $\cos x$ in funzione di $tg\, x$, cioè basta applicare le seguenti formule:

$\sin x = \frac{tg\, x}{\pm\sqrt{1 + tg^2 x}} \qquad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2 x}} \qquad$ valide per $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

e prese, qualunque sia il valore di x, entrambe col segno **+** o col segno **-** , in quanto i segni di $\sin x$ e $\cos x$ dipendono esclusivamente dal segno di $tg\, x$. Abbiamo :

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{tg\, x}{1 + tg^2 x} \quad , \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x} \quad , \cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$$

La [3] diventa : $\mathbf{(a - d)\cdot tg^2 x + b\cdot tg\, x + c - d = 0}$ **[8]**

Se è $\boxed{a \neq d}$ l'equazione [8] è equivalente all'equazione [3] .

Se è $\boxed{a=d}$ l'equazione [8] è suvvalente all'equazione [3]. In quest'ultimo caso l'equazione [3], oltre a quelle dell'equazione [8] ammette anche le seguenti soluzioni: $\mathbf{x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}}$

CASI PARTICOLARI

$\boxed{d = c = 0}$: $a\cdot \sin^2 x + b\cdot \sin x \cos x = 0 \quad \sin x\cdot(a\cdot \sin x + b\cdot \cos x) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi} \quad a\cdot \sin x + b\cdot \cos x = 0 \Rightarrow tg\, x = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)}$

$\boxed{d = a = 0} \quad b\cdot \sin x \cos x + c\cdot \cos^2 x = 0 \quad \cos x\cdot(b\cdot \sin x + c\cdot \cos x) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}} \quad b\cdot \sin x + c\cdot \cos x = 0 \Rightarrow tg\, x = -\frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c}{b}\right)}$

$\boxed{d = b = 0} \quad a\cdot \sin^2 x + c\cdot \cos^2 x = 0 \;,\; a\cdot tg^2 x + c = 0 \;,\; tg\, x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \;,\; \boxed{x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)}$

$$\boxed{\sin^2 x - (3 + \sqrt{3})\cdot \sin x \cos x + (2 + \sqrt{3})\cdot \cos^2 x = 0}$$

$$tg^2 x - (3 + \sqrt{3})\cdot tg\, x + 2 + \sqrt{3} = 0 \;, \quad tg\, x = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3})}}{2}$$

$$tg\, x = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{9 + 3 + 6\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}}{2}$$

$tg\, x = 1 \Rightarrow \quad \mathbf{x = \frac{\pi}{4} + k\pi = (4k + 1)\frac{\pi}{4}}$

$tg\, x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{x = 75° + k180° = (12k + 5)15°}$

ALTRA RISOLUZIONE

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{(3 + \sqrt{3})}{2}\cdot \sin 2x + (2 + \sqrt{3})\cdot\frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

$(1+\sqrt{3})\cdot\cos 2x-(3+\sqrt{3})\cdot sin 2x+3+\sqrt{3}=0$, $\cos 2x-\sqrt{3}\cdot sin 2x=-\sqrt{3}$

$\cos 2x\cdot\cos 60°-sin 2x\cdot sin 60°=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\boxed{\cos(2x+60°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$2x+60°=\pm 150°+h360°$ $\boxed{x=45°+h180°}$ $\boxed{x=-105°+h180°}$ formula formalmente diversa ma sostanzialmente uguale a $\boxed{x=75°+k180°=(12k+5)15°}$.

$4\cdot\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x-2\sqrt{3}\cdot\cos^2 x=3$

$sin^2 x+2\cdot sin x\cos x-(2\sqrt{3}+3)\cos^2 x=0$, $tg^2 x+2\cdot tg x-2\sqrt{3}-3=0$

$tg x=-1\pm\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=-1\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}=-1\pm\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=-1\pm(1+\sqrt{3})$

$tg x=-(2+\sqrt{3})\Rightarrow x=105°+k180°$

$tg x=\sqrt{3}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi=(3k+1)\dfrac{\pi}{3}$

$a\cdot\sin^4 x+b\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x+c\cdot\cos^4 x=0$

Si tratta di una equazione omogenea di quarto grado in seno e coseno. Si risolve dividendo ambo i membri per $\cos^4 x$, sicuramente diverso da zero . Si ottiene la seguente equazione biquadratica in $tg x$ che si risolve facilmente: $\boxed{a\cdot tc^4 x+b\cdot tg^2 x+c=0}$

L ' equazione del tipo: **$a\cdot\sin^4 x+b\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x+c\cdot\cos^4 x=d$**

diventano omogenee di quarto grado in seno e coseno se osserviamo che:

$$\boxed{d=d\cdot(\cos^2 x+sin^2 x)^2}$$

$$a\cdot sin^4 x+b\cdot sin^2 x\cdot\cos^2 x+c\cdot\cos^4 x=d(\cos^4 x+2\cdot sin^2 x\cdot\cos^2 x+sin^4 x)$$

$$(a-d)\cdot sin^4 x+(b-2d)\cdot sin^2 x\cdot\cos^2 x+(c-d)\cdot\cos^4 x=0$$

$$(a-d)\cdot tg^4 x+(b-2d)\cdot tg^2 x+c-d=0$$

Inequazione goniometrica $a\cdot sin^2 x+b\cdot sin x\cos x+c\cdot\cos^2 x+d\gtrless 0$

$$a\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{b}{2}\cdot sin 2x+c\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+d\gtrless 0$$

$$a-a\cdot\cos 2x+b\cdot sin 2x+c+c\cdot\cos 2x+2d\gtrless 0$$

$$\boxed{b\cdot sin 2x+(c-a)\cdot\cos 2x+c+a+2d\gtrless 0}$$

Si tratta di una inequazione lineare in seno e coseno che sappiamo risolvere .

ALTRO PROCEDIMENTO

$$(a + d)\cdot sin^2 x + b\cdot sin x\cdot \cos x + (c + d)\cdot \cos^2 x \gtrless \;= 0$$

Divido ambo i membri per $\cos^2 x$ sicuramente diverso da zero. Otteniamo:

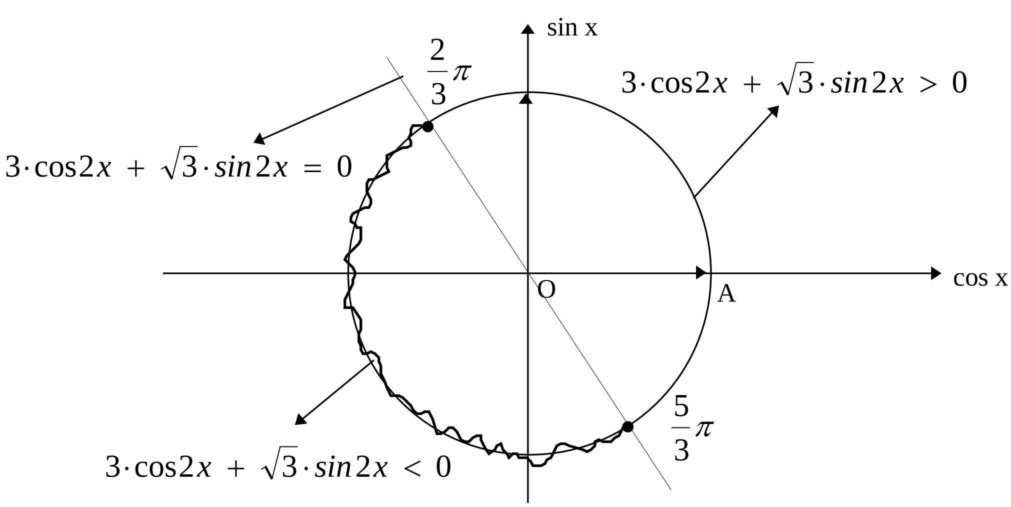
$$(a + d)\cdot tg^2 x + b\cdot tg\, x + c + d \gtrless \;= 0$$

Si tratta di una inequazione di secondo grado in $tg\, x$ che sappiamo risolvere.

$\mathbf{4\cdot \sin^2 x - 1 > 2\cdot \cos x(\cos x + \sqrt{3}\cdot \sin x)}$ per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi \vee \frac{4}{3}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

$3\cdot \cos 2x + \sqrt{3}\cdot sin 2x < 0$ per $\frac{2}{3}\pi < 2x < \frac{5}{3}\pi \vee \frac{8}{3}\pi < 2x < \frac{11}{3}\pi$ cioè per :

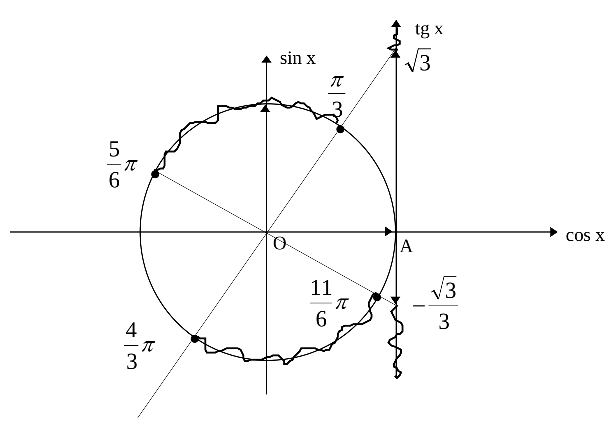
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi \vee \frac{4}{3}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$



La precedente inequazione assume anche la seguente forma:

$\boxed{\mathbf{3\cdot \sin^2 x - 2\sqrt{3}\cdot \sin x \cos x - 3\cdot \cos^2 x > 0}}$ $3\cdot tg^2 x - 2\sqrt{3}\cdot tg\, x - 3 > 0$

per $tg\, x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \sqrt{3}$ cioè per : $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi \vee \frac{4}{3}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$



Le equazioni simmetriche rispetto a $\sin x$ e $\cos x$

Sono quelle equazioni che non mutano quando si scambia $\sin x$ con $\cos x$ e viceversa .

Si risolvono ponendo : $\boxed{x = 45° + t}$

$\sin x = \sin(45° + t) = \sin 45°\cdot\cos t + \cos 45°\cdot\sin t$ $\quad \boxed{\sin x = \dfrac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}}$

$\cos x = \cos(45° + t) = \cos 45°\cdot\cos t - \sin 45°\cdot\sin t$ $\quad \boxed{\cos x = \dfrac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}}$

$$\boxed{\sin x\cdot\cos x = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{2} = \frac{2\cdot\cos^2 t - 1}{2}}$$

$$\mathbf{2\cdot\sin x + 2\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos x = 2}$$

$$\frac{2\sin t + 2\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{2\cos t - 2\sin t}{\sqrt{2}} + \frac{2\cdot\cos^2 t - 1}{2} = 2$$

$4\cos t + 4\cos t + 2\sqrt{2}\cdot\cos^2 t - \sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0$, $\quad 2\sqrt{2}\cdot\cos^2 t + 8\cos t - 5\sqrt{2} = 0$

$2\cdot\cos^2 t + 4\sqrt{2}\cdot\cos t - 5 = 0$ $\quad \boxed{\cos t = -\dfrac{5}{2}\sqrt{2}}$ questa equazione non ammette radici reali

$\boxed{\cos t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ $\Rightarrow$ $t = \pm\, 45° + k\,360°$ $\quad \boxed{x = k\,360°}$ $\quad \boxed{x = 90° + k\,360° = (4k + 1)90°}$

Sistemi di equazioni goniometriche

Per sistema di equazioni goniometriche intendiamo l'insieme di due o più equazioni goniometriche di cui vogliamo trovare le eventuali soluzioni comuni. Talvolta una delle due equazioni componenti il sistema può essere algebrica . In questo paragrafo considereremo soltanto sistemi formati da due equazioni goniometriche o da una equazione algebrica e da una equazione goniometrica. Non possiamo dare criteri generali atti a risolvere tali sistemi, ma bisognerà, caso per caso, rifarsi a tutti quei teoremi di algebra e di goniometria necessari per la risoluzione del particolare sistema considerato. Spesso, particolari artifici, ci permetteranno di tramutare il sistema considerato in un altro di più facile risoluzione. I seguenti esempi ci daranno delle utili indicazioni per la risoluzione di quei sistemi di equazioni goniometriche che possono essere considerati fra i più comuni.

$$\begin{cases} \mathbf{\sin x + \sin y = \sqrt{2}} \\ \mathbf{\sin^2 x + \sin^2 y = 1} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ (\sin x + \sin y)^2 - 2\sin x\sin y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ 2 - 2\sin x\sin y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ Si tratta di un sistema simmetrico in $\sin x$ e $\sin y$.

$t^2 - \sqrt{2}\cdot t + \dfrac{1}{2} = 0$, $2t^2 - 2\sqrt{2}\cdot t + 1 = 0$, $(\sqrt{2}\cdot t - 1)^2 = 0$, $\sqrt{2}\cdot t - 1 = 0$

$t_1 = t_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\quad x = y = (-1)^k\cdot 45° + k180° \qquad k \in Z$

Soluzioni particolari: $\begin{cases} k = 0 \\ x = y = 45° \end{cases}$ $\quad\begin{cases} k = 1 \\ x = y = 225° \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathbf{\sin(2x - y) = \dfrac{1}{2}} \\ \mathbf{tg(3x + y) = \sqrt{3}} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = (-1)^k\cdot 30° + k180° \\ 3x + y = 60° + h180° \end{cases}$$

$$5x \neq = (-1)^k\cdot 30° + 60° + (h+k)180°$$

$5x = (-1)^k 30° + 60° + (h+k)180°$ $\qquad x = (-1)^k 6° + 12° + (h+k)36°$

$y = -3x + 60° + h180° = -(-1)^k 18° - 36° - 3(h+k)36° + 60° + h180° =$

$= -(-1)^k 18° + 24° - h108° - k108° + h180° = -(-1)^k 18° + 24° - h72° - k108°$

Le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} \mathbf{x = (-1)^k 6° + 12° + (h+k)36°} \\ \mathbf{y = -(-1)^k 18° + 24° - h\cdot 72° - k\cdot 108°} \end{cases}$ con $h , k \in Z$

Soluzioni particolari

$h = k = 0 : x = 18° , y = 6°$ $\qquad h = 0 , k = 1 : x = 42° , y = 78°$ $\qquad h = 1 , k = 0 : x = 54° , y = -6°$

$\begin{cases} \mathbf{x + y = 45°} \\ \mathbf{tg\,x + tg\,y = 1} \end{cases}$ $\quad\begin{cases} tg(x + y) = tg45° \\ tg\,x + tg\,y = 1 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \dfrac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x\cdot tg\,y} = 1 \\ tg\,x + tg\,y = 1 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 1 = 1 - tg\,x\cdot tg\,y \\ tg\,x + tg\,y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} tg\,x\cdot tg\,y = 0 \\ tg\,x + tg\,y = 1 \end{cases}$ $\quad t^2 - t = 0 \quad t_1 = 0 \quad , t_2 = 1$

$\begin{cases} tg\,x = 0 \\ tg\,y = 1 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x = k180° \\ y = 45° + k180° \end{cases}$ $\qquad\begin{cases} tg\,x = 1 \\ tg\,y = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} \mathbf{x = 45° + h180°} \\ \mathbf{y = h180°} \end{cases}$

Altra Risoluzione

$\begin{cases} y = 45° - x \\ tg\,x + tg\,y = 1 \end{cases}$ $tg\,x + tg(45° - x) = 1$ $tg\,x + \dfrac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x} = 1$ $tg\,x + tg^2 x + 1 - tg\,x = 1$

$tg^2 x = 0$, $tg\,x = 0$ $\begin{cases} x = k180° \\ y = 45° - k180° \end{cases}$ $x = 45° - y \Rightarrow tg\,y = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} y = k180° \\ x = 45° - k180° \end{cases}$