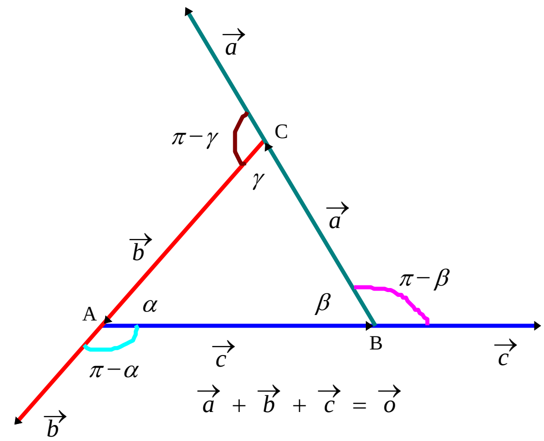
Unità Didattica N° 20
La trigonometria

Lati ed angoli di un triangolo

Lo scopo essenziale della trigonometria è quello di trovare le relazioni che intercorrono fra i lati e gli angoli di un triangolo qualsiasi.

Sia ABC un triangolo qualsiasi. E' consuetudine indicare con **a, b, c** le misure (rispetto) ad una prefissata unità) dei lati BC, CA, AB e con α, β, γ le misure (in gradi o in radianti) degli angoli interni $B\hat{A}C$, $C\hat{B}A$, $A\hat{C}B$.



La geometria euclidea ci fornisce le seguenti relazioni:

$\alpha+\beta+\gamma=\pi \quad a<b+c \quad b<a+c \quad c<a+b$

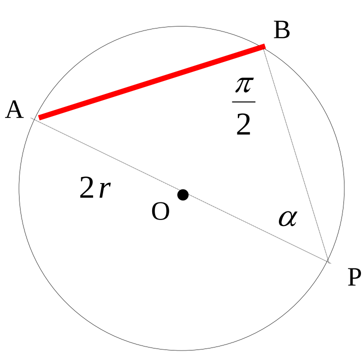
$a>b \Leftrightarrow \alpha>b$

Si orienti il triangolo ABC in modo che , percorrendone il perimetro , si ruoti in senso antiorario , cioè si ponga: $C-B=\vec{a}$ $\quad A-C=\vec{b}$ $\quad B-A=\vec{c}$

Orientato così il triangolo risulta sempre:

$(\vec{a},\vec{b})=\pi-\gamma$ $\quad (\vec{b},\vec{c})=\pi-\alpha$ $\quad (\vec{c},\vec{a})=\pi-\beta$ $\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$

Teorema della corda



Una corda di una circonferenza è uguale al prodotto del diametro della circonferenza per il seno di uno degli infiniti angoli alla circonferenza che insistono su quella corda.

Considero la corda AB della circonferenza di centro **O** e raggio **r** .

Traccio il diametro AP e congiungo **P** con **B** . Ottengo il triangolo ABP rettangolo in **B**.

Ricordando che in un triangolo rettangolo qualsiasi ogni cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, possiamo scrivere: $\overline{AB}=2r\cdot\sin\alpha$ $\quad \overline{AB}=2r\cdot\sin\alpha$

dove α è un qualsiasi angolo alla circonferenza (acuto oppure ottuso) che insiste sulla corda AB.

Data una circonferenza di centro O e raggio r ed una sua corda AB di lunghezza $r\sqrt{3}$, determinare una corda AM appartenente al segmento circolare maggiore, in modo che sia:

$$\overline{AM}^2-\overline{BM}^2=3r^2$$

$\overline{AB} = r\sqrt{3} \Rightarrow AB$ lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro **O** e raggio r

$3r^2 \geq 0 \Rightarrow \overline{AM} \geq \overline{BM}$ ed il punto **M** potrà occupare sull'arco maggiore la posizione in corrispondenza della quale si ha $\overline{AM} \geq \overline{BM}$. Quindi i limiti del problema sono: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

Se pongo $B\hat{A}M = x$ ottengo: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, $A\hat{B}M = \frac{\pi}{3}$, $A\hat{B}M = \frac{2}{3}\pi - x$

Applicando il teorema della corda otteniamo:

$$\overline{BM} = 2r \cdot \sin x \qquad \overline{AM} = 2r \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = r(\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x)$$

Sostituendo nella relazione fondamentale del problema otteniamo :

$$r^2(\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin x)^2 - 4r^2 \sin^2 x = 3r^2 \quad 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \cos x = 3$$

$$3\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 3 \qquad \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x = 1 \qquad \cos 2x + tg\frac{\pi}{6}\sin 2x = 1$$

$$\cos 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} \qquad \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \qquad 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M \equiv B \quad , \quad \overline{MB} = 0 \quad \overline{AM} = \overline{AB} = r\sqrt{3}$$

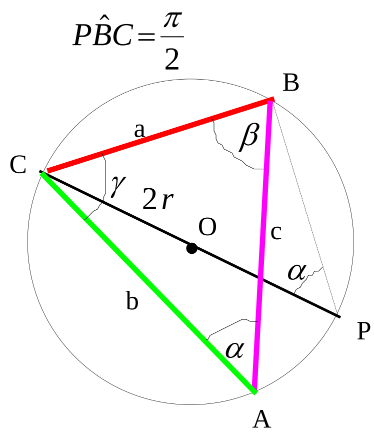
Altra risoluzione dell'equazione risolvente

$$3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x \quad , 6\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 0$$

$$2\sin x(3\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0 \quad , \sin x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Teorema dei seni



In un triangolo qualsiasi si mantiene costante il rapporto tra ciascun lato ed il seno dell'angolo opposto.

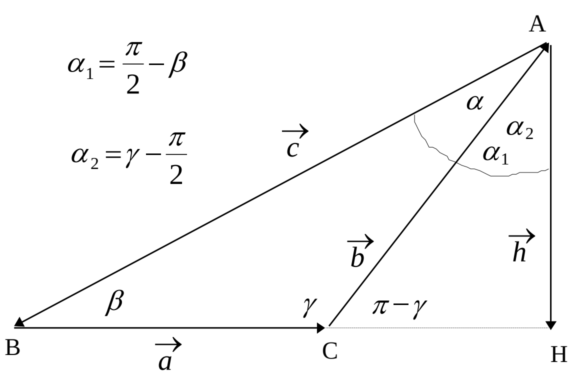
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

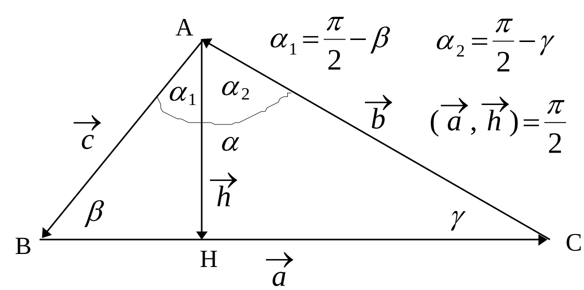
Si può dimostrare che tale rapporto è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo. Infatti se $2R$ è il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC abbiamo:

$$\overline{AC} = \overline{AD}\cdot\sin\beta , \qquad b = 2R\cdot\sin\beta , \quad \frac{b}{\sin\beta} = 2R \qquad a = 2R\cdot\sin\alpha \qquad c = 2R\cdot\sin\gamma$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Dimostrazione vettoriale:





$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \quad\Rightarrow\quad \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \quad\Rightarrow\quad \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\times\vec{h} = -\vec{c}\times\vec{h} \quad\Rightarrow$$

$$\vec{a}\times\vec{h} + \vec{a}\times\vec{h} = -\vec{c}\times\vec{h} \;\Rightarrow\; a\cdot h\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{h}\right) + b\cdot h\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{h}\right) = -c\cdot h\cdot\cos\left(\vec{c},\vec{h}\right)$$

$$0 + b\cdot\cos(\pi - \alpha_2) = -c\cdot\cos\alpha_1 \qquad b\cdot\cos\alpha_1 = c\cdot\cos\alpha_1$$

1° caso: triangolo acutangolo

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \beta \;,\; \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma \;, \qquad b\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = c\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$b\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\beta \quad \text{cioè:} \qquad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

2° caso: triangolo ottusangolo (ad esempio $\gamma > \frac{\pi}{2}$)

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \beta \ , \ \alpha_2 = \gamma - \frac{\pi}{2} \ , \ b\cdot\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = c\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad \text{cioè: } b\cdot sin\gamma = c\cdot sin\beta$$

In maniera del tutto analoga si dimostra che: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ per cui risultano valide le seguenti uguaglianze che esprimono il **teorema dei seni**: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

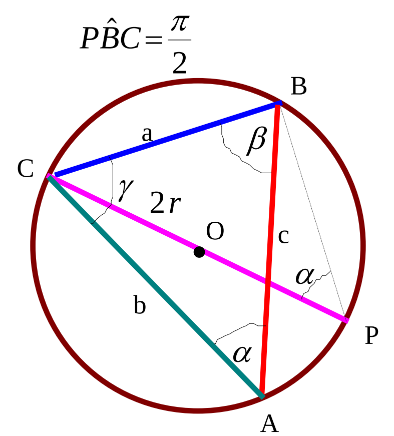
In un triangolo qualsiasi si mantiene costante il rapporto tra ciascun lato ed il seno dell'angolo opposto.

Si può dimostrare che tale rapporto è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Infatti se $2R$ è il diametro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC abbiamo:

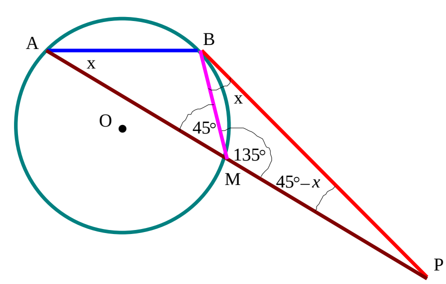
$$\overline{AC} = \overline{AD}\cdot sin\beta \quad , \quad b = 2R\cdot sin\beta \quad , \quad \frac{b}{sin\beta} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



Problema

In una data circonferenza di centro O, la corda AB è il lato del quadrato inscritto. Condotta dal punto B la semiretta tangente alla circonferenza che giace , rispetto alla retta AB, nel semipiano che contiene il centro O, determinare sulla semiretta un punto P tale che sia:



$$2\cdot\overline{BM} + 4\sqrt{2}\cdot\overline{MP} = (3 + \sqrt{3})\cdot\overline{PB}$$

dove M è l'ulteriore intersezione del segmento AP con la circonferenza.

Pongo $B\hat{A}P = x$. AB è il lato del quadrato inscritto nella circonferenza . Questo ci consente di affermare che : $A\hat{M}B = 45°$ e $B\hat{M}P = 135°$. Risulta anche : $B\hat{A}P = M\hat{B}P$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BM .

Applico il teorema dei seni al triangolo BMP :

$$\frac{\overline{BM}}{sin(45° - x)} = \frac{\overline{PB}}{sin135°} \Rightarrow \overline{BM} = \overline{PB}\cdot\sqrt{2}\cdot sin(45° - x)$$

$$\frac{\overline{MP}}{sin\,x} = \frac{\overline{PB}}{sin135°} \Rightarrow \overline{MP} = \overline{PB}\cdot\sqrt{2}\cdot sin\,x$$

Sostituendo nella relazione fondamentale del problema otteniamo :

$$2\cdot\overline{PB}\cdot\sqrt{2}\cdot sin(45° - x) + 4\sqrt{2}\cdot\overline{PB}\cdot\sqrt{2}\cdot sin\,x = (3 + \sqrt{3})\overline{PB}$$

$$2\sqrt{2}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{sin\,x}{\sqrt{2}}\right) + 8sin\,x = 3 + \sqrt{3} \quad , \; 2\cos x - 2sin\,x + 8sin\,x = 3 + \sqrt{3}$$

$$2\cos x + 6\sin x = 3 + \sqrt{3} \qquad 0° \leq x < 45°$$

$$\begin{cases} 2\cos x + 6sin\,x = 3 + \sqrt{3} \\ \cos^2 x + sin^2 x = 1 \end{cases} \quad \cos x = \frac{-6\sin x + 3 + \sqrt{3}}{2} \quad \left(\frac{-6sin\,x + 3 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + sin^2 x = 1$$

$$20sin^2 x - 6(1 + \sqrt{3})sin\,x + 3\sqrt{3} + 4 = 0$$

$$\begin{cases} sin\,x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad x = \frac{\pi}{6} \quad x = 30° \qquad \begin{cases} sin\,x = \dfrac{3\sqrt{3} + 4}{10} \approx 0{,}9 \\ \cos x = \dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{10} \approx -0{,}39 \end{cases}$$

$$tg\,x = -\frac{25 + 16\sqrt{3}}{13\sqrt{3}} = -\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39} \approx -2{,}34$$

Le radici di questa equazione non sono accettabili .

Teorema delle proiezioni

In un triangolo qualsiasi la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti delle misure degli altri due lati per il coseno dell'angolo che essi formano col primo lato.

$a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$ $\qquad b = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$ $\qquad c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$

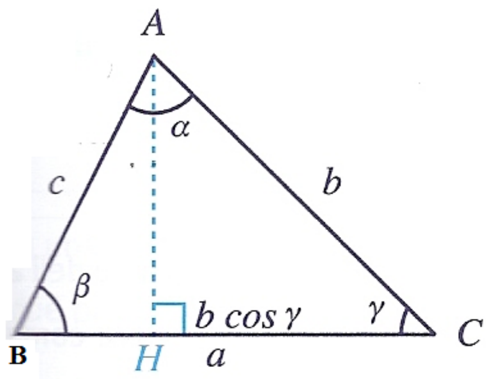
Dimostrazione

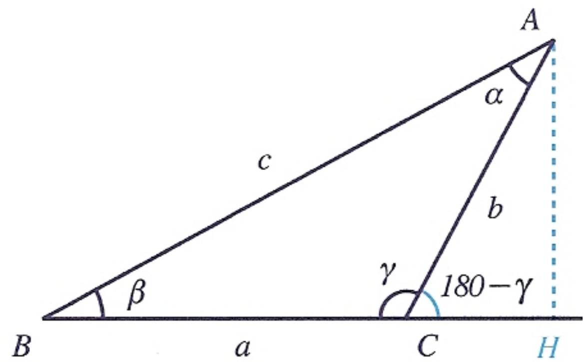
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} = -\vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{a} = -\vec{b}\times\vec{a} - \vec{c}\times\vec{a} \Rightarrow$$

$$a^2 = -a\cdot b\cdot\cos\left(\vec{a}\,,\vec{b}\right) - a\cdot c\cdot\cos\left(\vec{a}\,,\vec{c}\right) \Rightarrow a = -b\cdot\cos(\pi - \gamma) - c\cdot\cos(\pi - \beta) \Rightarrow$$

$$a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$$

Alla stessa maniera si dimostrano le altre due formule.

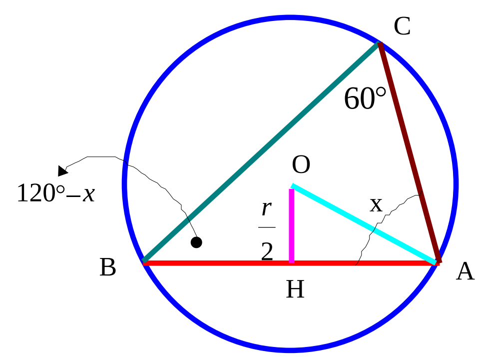




γ = angolo acuto $\quad a=\overline{BH}+\overline{HC}=c\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\gamma$

γ = angolo ottuso $\quad a=\overline{BH}-\overline{HC}=c\cdot\cos\beta+b\cdot\cos(180°-\gamma)=c\cdot\cos\beta+b\cdot\cos\gamma$

E' data una circonferenza di raggio r ed una corda AB distante $\frac{r}{2}$ dal centro O. Si conduca, nel maggiore dei segmenti circolari determinati da AB, la corda AC che forma con AB l'angolo x. Determinare x in modo che sia: $AC + BC = AB\cdot\sqrt{3}$.



$OH=\frac{r}{2} \Rightarrow AB=r\sqrt{3}$ **lato del triangolo equilatero** inscritto nella circonferenza $\Rightarrow A\hat{C}B=60°$

$A\hat{B}C = 120° - x \quad \frac{BC}{\sin x}=\frac{AB}{\sin 60°}$ Teorema dei seni $\quad BC=2r\cdot\sin x$

Applico il teorema delle proiezioni al triangolo ABC:

$$AC=AB\cdot\cos x+BC\cdot\cos 60°=r\sqrt{3}\cdot\cos x+r\cdot\sin x$$

Sostituendo nella relazione $AC + BC = AB\cdot\sqrt{3}$ otteniamo:

$r(\sqrt{3}\cdot\cos x + \sin x) + 2r\cdot\sin x = 3r$ e quindi: $\sqrt{3}\cdot\cos x+3\cdot\sin x-3=0 \quad 0° < x < 120°$

$\sin x + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos x = 1,\ \sin x\cdot\cos 30° + \cos x\cdot\sin 30° = \cos 30°,\ \sin(x+30°)=\sin 60°$

$x+30°=60° \Rightarrow x=30° \qquad x+30°=120° \Rightarrow x=90°$

Applicando le formule parametriche otteniamo:

$$\frac{\sqrt{3}\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{6\cdot tg\frac{x}{2}}{12tg^2\frac{x}{2}}-3=0 \qquad (3+\sqrt{3})\cdot tg^2\frac{x}{2}-6\cdot tg\frac{x}{2}+(3-\sqrt{3})=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{3+\sqrt{3}}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\ ,\ tg\frac{x}{2}=1\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}=45°\ \Rightarrow\ x=90°$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}=15°\ \Rightarrow\ x=30°$$

Teorema di Carnot o del coseno

In un triangolo qualsiasi il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati meno il doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo da essi compreso.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ $\quad$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$ $\quad$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$

Dimostrazione

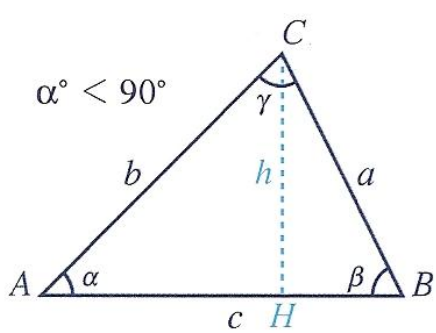
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\ \Rightarrow\ \vec{a}=-\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo :

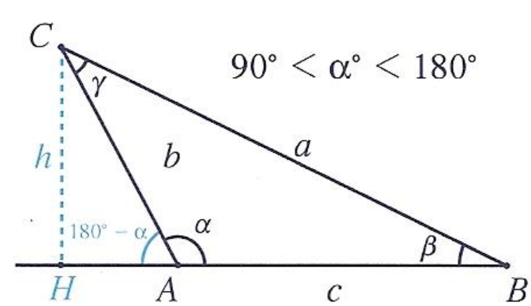
$$\vec{a}^{\,2}=\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2\ \Rightarrow\ a^2=b^2+c^2+2\,\vec{b}\times\vec{c}\ \Rightarrow\ a^2=b^2+c^2+2bc\cdot\cos(\pi-\alpha)\ \Rightarrow$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$

In maniera del tutto analoga si dimostrano le altre due formule. Il teorema di Carnot esprime in forma trigonometrica il **teorema di Pitagora generalizzato**.

Dimostrazione classica





α = angolo acuto $\quad \overline{CH}=b\cdot\sin\alpha \quad \overline{BH}=\overline{AB}-\overline{AH}=c-b\cdot\cos\alpha$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + (c - b\cdot\cos\alpha)^2 = b^2\cdot\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cdot\cos^2\alpha - 2bc\cdot\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

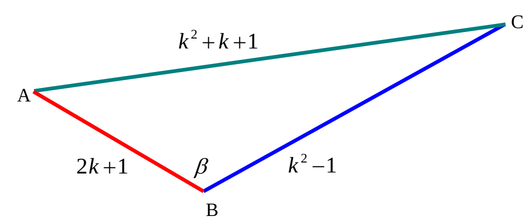
α = angolo ottuso

$$\overline{CH} = b\cdot\sin(180° - \alpha) = b\cdot\sin\alpha \qquad \overline{BH} = \overline{AB} - \overline{AH} = c - b\cdot\cos(180° - \alpha) = c - b\cdot\cos\alpha$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + (c - b\cdot\cos\alpha)^2 = b^2\cdot\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cdot\cos^2\alpha - 2bc\cdot\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

I lati di un triangolo ABC misurano rispettivamente $k^2 + k + 1$, $2k + 1$, $k^2 - 1$ con $k \in R^*$. Verificare che il triangolo ha un angolo di $120°$.



Se poniamo: $\overline{BC} = k^2 - 1$ $\overline{AB} = 2k+1$, $\overline{AC} = k^2+k+1$ allora deve essere: $\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$

Infatti: $\overline{BC} > 0 \Rightarrow (k+1)(k-1)$ cioè: $k > 1$

$$\overline{AC} - \overline{AB} = k^2 + k + 1 - 2k - 1 = k^2 - k = k(k-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} > \overline{AB}$$

$$\overline{AC} - \overline{BC} = k^2 + k + 1 - k^2 + 1 = k + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} > \overline{BC}$$

$$\overline{BC} - \overline{AB} = k^2 - 1 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 2 > 0 \text{ per } \left(k < 1 - \sqrt{3}\right) \quad k > 1 + \sqrt{3}$$

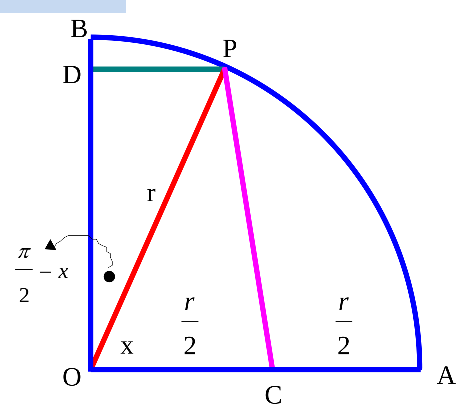
$$\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB} \text{ per } k > 1 + \sqrt{3} \qquad \overline{AC} > \overline{AB} > \overline{BC} \text{ per } 1 < k < 1 + \sqrt{3}$$

Il lato maggiore è AC. Applichiamo il teorema di Carnot al lato AC del triangolo ABC :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}} = \frac{(2k+1)^2 + (k^2-1)^2 - (k^2+k+1)^2}{2(2k+1)(k^2-1)} =$$

$$\frac{-(2k^3 + k^2 - 2k - 1)}{2(2k^3 + k^2 - 2k - 1)} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A\hat{B}C = \beta = 120°$$

Il settore circolare $O\widehat{A}B$ è la quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Determinare l'ampiezza dell'angolo x che un raggio OP Interno ad esso deve formare con OA affinché, detti C il punto medio di OA e D la proiezione di P su OB, sia: $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \dfrac{4 - \sqrt{3}}{2}\overline{AO}^2$



$P\hat{O}C = x \Rightarrow P\hat{O}D = \dfrac{\pi}{2} - x$ Applico al triangolo OPC il teorema di Carnot ottenendo :

$$\overline{PC}^2 = \frac{1}{4}r^2 + r^2 - r^2 \cdot \cos x = r^2\left(\frac{5}{4} - \cos x\right)$$

ODP triangolo rettangolo in **D** $\Rightarrow$ $\overline{DP} = r \cdot \cos x$

Sostituendo nella relazione fondamentale del problema otteniamo :

$$r^2\left(\frac{5}{4} - \cos x\right) + r^2\cos^2 x = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}r^2 \qquad \cos^2 x - \cos x + \frac{5}{4} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$$

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 + 2\sqrt{3} = 0 \qquad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \approx 0{,}13 \Rightarrow x = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

Teorema delle tangenti o di Nepero

Esso afferma quanto segue :

<<**La tangente della semidifferenza di due angoli sta alla tangente della loro semisomma come la differenza dei lati opposti sta alla loro somma** >>

[1] $$\frac{a - b}{a + b} = \frac{tg\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{tg\dfrac{\alpha + \beta}{2}} \qquad \frac{b - c}{b + c} = \frac{tg\dfrac{\beta - \gamma}{2}}{tg\dfrac{\beta + \gamma}{2}} \qquad \frac{c - a}{c + a} = \frac{tg\dfrac{\gamma - \alpha}{2}}{tg\dfrac{\gamma + \alpha}{2}}$$

E poiché risulta $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ le precedenti formule possono essere scritte anche nella seguente maniera:

$$tg\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b}\cot g\frac{\gamma}{2} \qquad tg\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c}\cot g\frac{\alpha}{2} \qquad tg\frac{\gamma - \alpha}{2} = \frac{c - a}{c + a}\cot g\frac{\beta}{2}$$

A parole: << **la tangente della semidifferenza di due angoli è uguale al rapporto tra la differenza e la somma dei lati opposti moltiplicato per la cotangente della metà del terzo angolo**>>

OSSERVAZIONE

I quattro teoremi dimostrati (**seni**, **proiezioni**, **Carnot**, **Nepero**) non sono fra loro indipendenti ma sono equivalenti, cioè da uno qualsiasi di essi si possono dedurre gli altri tre.

Formule di Briggs

Le formule di **Briggs** ci consentono di ricavare gli angoli α , β , γ di un triangolo mediante espressioni monomie quando del triangolo conosciamo le misure dei tre lati.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad [1] \qquad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad [2] \qquad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad [3]$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad [4] \qquad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad [5] \qquad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \quad [6]$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad [7] \qquad tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad [8] \qquad tg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \quad [9]$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{cb}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad [10] \qquad \sin\beta=\frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad [11]$$

$$\sin\gamma=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad [12]$$

Dimostriamo la formula [1]. Se indichiamo con $2p$ il perimetro del triangolo ABC otteniamo :

$$2p = a + b + c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2(p-a) = b+c-a \\ 2(p-b) = a+c-b \\ 2(p-c) = a+b-c \end{cases}$$

Tenendo presente il **teorema di Carnot** possiamo scrivere :

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad , \quad \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} =$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$ e quindi è dimostrata la formula **[1]** .

$0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ Siamo nel primo quadrante e per questo motivo le formule di bisezione presentano davanti al radicale il segno più .

Dimostriamo la formula **[4]** .

$$\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}=\frac{2p\cdot 2(p-a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}$$

Ma $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ e quindi , la formula **[4]** è dimostrata .

Le formule **[7] , [8] , [9]** si ricavano dividendo membro a membro la [1] e la **[4]** , la **[2]** e la **[5]** , la **[3]** e la **[6]** .

Le formule **[10] , [11]** e **[12]** si dimostrano tenendo presente che :

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \qquad \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Formule di Delambre

Sono le seguenti:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{a+c}{b} = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad \frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad \frac{a-c}{b} = \frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \qquad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Le formule di Delambre si dimostrano partendo dal teorema dei seni:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{a+b}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{a+b}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$