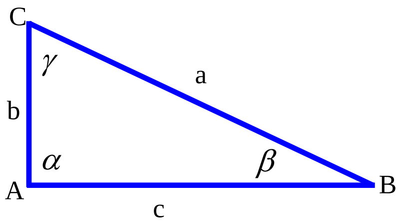
Unità Didattica N° 21
La risoluzione dei triangoli

Unità didattica N° 21 La risoluzione dei triangoli

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Se di un triangolo conosciamo tre elementi (di cui almeno uno sia lato) possiamo ricavare gli altri tre . In questo consiste la risoluzione di un triangolo.



Nel caso di un triangolo rettangolo sappiamo che :

$\alpha = 90°$ $\beta + \gamma = 90°$

Si possono presentare 4 casi tipici :

1) Conosciamo l'ipotenusa ed un cateto (ad esempio b), dobbiamo calcolare l'altro cateto (c) e gli angoli acuti (β e γ).

dati	incognite	calcolo di β	calcolo di γ	calcolo di c
a b	c β γ	$\sin\beta = \frac{b}{a}$	$\gamma = 90° - \beta$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ **oppure** $c = a \cdot \cos\beta$

Risolvere il triangolo rettangolo ABC **sapendo che:** $a = 8$ $b = 4$

$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 30°$ $\gamma = 90° - \beta = 90° - 30° = 60°$

$$c = a \cdot \cos\beta = 8 \cdot \cos 30° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

2) conosciamo i due cateti b, c, dobbiamo calcolare l'ipotenusa (a) e gli angoli acuti (β e γ)

dati		incognite
b c		a β γ
calcolo di		
β	γ	a
$tg\,\beta = \frac{b}{c}$	$\gamma = 90° - \beta$	$a = \sqrt{c^2 + b^2}$ $a = \frac{b}{\sin\beta}$ $a = \frac{c}{\sin\gamma}$

Risolvere il triangolo rettangolo ABC **sapendo che:** $b = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $c = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$

$$tg\,\beta = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3\sqrt{2}\ .\ \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)} = \frac{\left(3 + \sqrt{3}\right)^2}{6} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

$\beta = 75°$ $\gamma = 90° - 75° = 15°$

$$a = \sqrt{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$ oppure

$$a = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}} = \frac{4\left(3-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = 2\left(3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

3) Conosciamo l'ipotenusa (a) ed un angolo acuto (ad esempio β), dobbiamo calcolare i due cateti (b e c) e l'altro angolo acuto (γ).

dati		**incognite**
a β		b c γ
calcolo di		
γ	b	c
$\gamma = 90° - \beta$	$b = a \cdot \sin\beta$	$c = a\cdot\cos\beta$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Risolvere il triangolo rettangolo ABC **sapendo che:** $b = \sqrt{5}-1$, $\beta = 18°$

$\gamma = 90° - 18° = 72°$

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = 4$$

$$c = b\cdot tg\,\gamma = \left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(5+1-\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)} = \sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)} = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$$ $c = \sqrt{10+2\sqrt{5}}$

4) Conosciamo un cateto (b) ed un angolo acuto (β), dobbiamo calcolare l'ipotenusa (a), l'altro cateto (c) e l'altro angolo acuto (γ)

dati		**incognite**
b β		a c γ
calcolo di		
γ	a	c
$\gamma = 90° - \beta$	$a = \dfrac{b}{\sin\beta}$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ **oppure** $c = b\cdot tg\,\gamma$ oppure $c = b\cdot \text{cotg}\,\beta$

Risolvere il triangolo rettangolo ABC **sapendo che:** $b = 18$ $\beta = 30$

$\gamma = 90° - \beta = 90° - 30° = 60°$

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{18}{\sin 30°} = \frac{18}{\frac{1}{2}} = 36$$

$c = b\cdot tg\,\gamma = 18\cdot tg\,60° = 18\sqrt{3}$

Risolvere il triangolo rettangolo ABC **sapendo che** $b-c=2\sqrt{3}$, $a=2\sqrt{6}$.

$$\begin{array}{rcl} b & = & a\cdot\sin\beta \\ c & = & a\cdot\cos\beta \\ \hline b-c & = & a(\sin\beta-\cos\beta) \end{array}$$

Elevo ambo i membri al quadrato imponendo che sia $\sin\beta>\cos\beta$

$\mathrm{tg}\beta>1$, $45°<\beta<90°$, $(b-c)^2=a^2\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta-\sin 2\beta\right)$, $\frac{(b-c)^2}{a^2}=1-\sin 2\beta$

$\sin 2\beta=\frac{a^2-(b-c)^2}{a^2}=\frac{24-12}{24}=\frac{1}{2}$, $2\beta=150°$, $\beta=75°$ $\gamma=15°$

$b=a\sin\beta=2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}$ $c=a\cos\beta=2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2}=3+\sqrt{3}$

Altra risoluzione $b-c=a(\sin\beta-\cos\beta)\Rightarrow 2\sqrt{3}=2\sqrt{6}(\sin\beta-\cos\beta)\Rightarrow$

$$\sqrt{2}=2\sin\beta-2\cos\beta\Rightarrow \sin\beta-\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

si tratta di una equazione lineare in seno e coseno che può essere risolta utilizzando il metodo dell'angolo ausiliario, oppure risolvendo il seguente sistema: $\begin{cases}\sin\beta-\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin^2\beta+\cos^2\beta=1\end{cases}$

Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Anche per un triangolo qualsiasi i casi tipici di risoluzione sono quattro .

1) Conosciamo due lati (ad esempio a) e l'angolo (γ) fra essi compreso; dobbiamo calcolare il terzo lato (c) e gli altri due angoli (α **,** β **).**

dati	**incognite**
a b γ	**c** α β
calcolo di	
α β	**c**
se è $a>b$ possiamo scrivere: $tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\mathrm{cotg}\frac{\gamma}{2}$ e calcolare $\frac{\alpha-\beta}{2}$ Poiché risulta: $\frac{\alpha+\beta}{2}=90°-\frac{\gamma}{2}$ possiamo calcolare α e β.	$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ $\ln c=\ln a+co\log\sin\alpha+\ln\sin\gamma$ $c=\cdots\cdots$

Risolvere il triangolo ABC **sapendo che** $a=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$, $b=2\sqrt{6}$, $\gamma=30°$

$$tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}+2\sqrt{6}}\operatorname{cotg}15^\circ=\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}+4\sqrt{6}}(2-\sqrt{3})=$$

$$=\frac{3(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)}{3}=\sqrt{3}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=60^\circ\ ,\ \alpha-\beta=120^\circ\ ,\ \frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}=90^\circ-15^\circ=75^\circ\ ,\ \alpha+\beta=150^\circ$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=150^\circ\\ \alpha-\beta=120^\circ\\ \hline 2\alpha\quad \#=270^\circ\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\alpha=135^\circ\\ \beta=135^\circ-120^\circ=15^\circ\end{cases}$$

$$c=\frac{2\sqrt{2}(3+\sqrt{2})\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2(3+\sqrt{3})$$

2) Conosciamo un lato (a) e due angoli (β, γ); dobbiamo calcolare il terzo angolo (α) e gli altri due lati (b, c).

dati		**incognite**
a β γ		α **b** **c**
calcolo di		
α	**b**	**c**
$\alpha=180^\circ-(\beta+\gamma)$	$b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$ $\ln b=\ln a+\ln\sin\beta+\operatorname{colog}\sin\alpha$ $b=\cdots\cdots$	$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$ $\ln c=\ln a+\ln\sin\gamma+\operatorname{colog}\sin\alpha$

Risolvere il triangolo ABC sapendo che : $a=10\sqrt{3}\ ,\ \beta=75^\circ\ ,\ \gamma=60^\circ$

$a=10\sqrt{3}$ $\qquad\beta=75^\circ$ $\qquad\gamma=60^\circ$ $\qquad\boxed{\alpha=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ}$

$$b=\frac{10\sqrt{3}\cdot\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=15+5\sqrt{3}$$

$$c=\frac{10\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=15\sqrt{2}$$

3) Conosciamo i tre lati, dobbiamo calcolare i tre angoli

dati			incognite		
a	b	c	α	β	γ

calcolo di

α	β	γ
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ oppure $tg\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$	$\sin\beta = \dfrac{b\cdot\sin\alpha}{a}$ oppure $tg\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$	$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ oppure $tg\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

Risolvere il triangolo ABC sapendo che: $a = \sqrt{6} - \sqrt{2} \quad b = \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad c = 2\sqrt{3}$

$$\cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 + 12 - \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{8\sqrt{3}+12}{4\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} \qquad \alpha = 15°$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\sin 15°}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} \qquad \beta = 105°$$

$\gamma = 180° - (105° + 15°) = 60°$

4) Conosciamo due lati (a , b) e l'angolo opposto ad uno di essi (α), dobbiamo calcolare il terzo lato (c) e gli altri due angoli (β , γ)

dati			incognite		
a	b	α	β	γ	c

calcolo di

β	γ	c
$\sin\beta = \dfrac{b\cdot\sin\alpha}{a}$ [§]	$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$	$c = \dfrac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$

[§] $0 < \sin\beta \le 1 \Rightarrow 0 < b\cdot\sin\alpha \le a$ Il problema è possibile nei seguenti casi:

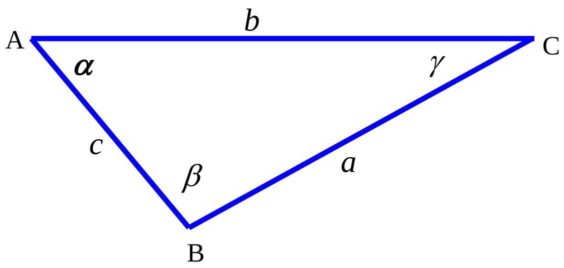
- $\begin{cases} b\cdot\sin\alpha = a \\ \alpha < 90° \end{cases}$ **una soluzione** ($\beta = 90°$)
- $\begin{cases} b\cdot\sin\alpha < a \\ a > b \end{cases}$ **una soluzione**
- $\begin{cases} b\cdot\sin\alpha < a \\ a = b \;;\; \alpha < 90° \end{cases}$ **una soluzione**
- $\begin{cases} b\cdot\sin\alpha < a \\ a < b \end{cases}$ **due soluzioni**

Poiché deve essere $0 < b \cdot \sin\alpha \leq a$ possiamo fare le seguenti considerazioni :

1°) $b \cdot \sin\alpha = a \;\Rightarrow\; \sin\beta = 1 \;\Rightarrow\; \beta = 90° \;\Rightarrow\; \alpha + \gamma = 90°$ cioè il problema è **possibile** solo quando risulta $\alpha < 90°$

2°) $0 < b \cdot \sin\alpha \leq a \;\Rightarrow\; 0 < \sin\beta < 1$ e quindi esistono due angoli β_1 $(< 90°)$ e $\beta_2 = 180 - \beta_1$ $(> 90°)$ che possono risolvere il problema . Per stabilire se entrambi questi due angoli risolvono il problema bisogna precisare se è $a \gtreqless b$.

- $a > b \;\Rightarrow\; \alpha > \beta$. Risolve il problema soltanto il valore β_1 in quanto un triangolo può avere al massimo un solo angolo ottuso.
- $a = b \;\Rightarrow\; \alpha = \beta$ Il problema è possibile se $\alpha < 90°$, impossibile se $\alpha > 90°$
- $a < b \;\Rightarrow\; \alpha < \beta$. In questo caso entrambi i valori risolvono il problema.



Risolvere il triangolo ABC sapendo che :

$a = 12 \qquad b = 12\sqrt{2} \qquad \alpha = 30°$

$\sin\beta = \dfrac{12\sqrt{2} \cdot \sin 30°}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \beta_1 = 45° \quad$ $\beta_2 = 135°$ $\quad \sin\beta = \dfrac{12\sqrt{2} \cdot \sin 30°}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

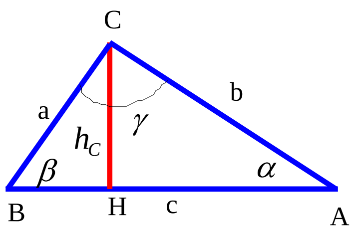
$\gamma_1 = 180° - (30° + 45°) = 105° \qquad \gamma_2 = 180° - (30° + 135°) = 15°$

$$c_1 = \frac{12 \cdot \sin 105°}{\sin 30°} = \frac{12\sqrt{2}\,\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{4}}{\dfrac{1}{2}} = 6\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$c_2 = \frac{12 \cdot \sin 15°}{\sin 30°} = \frac{12\sqrt{2}\,\dfrac{(\sqrt{3}-1)}{4}}{\dfrac{1}{2}} = 6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

Area del triangolo

01) L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso. $\quad S(ABC) = \dfrac{1}{2} a c \sin\beta = \dfrac{1}{2} a b \sin\gamma = \dfrac{1}{2} b c \sin\alpha \quad$ **[1]**



$$S(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} c h_c = \frac{1}{2} c a \sin\beta$$

02) Area di un triangolo in funzione di un lato e degli angoli adiacenti

Applicando il teorema dei seni al triangolo ABC abbiamo : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$

Sostituendo nella [1] otteniamo : $S(ABC) = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$ **[2]** Per analogia abbiamo :

$$S(ABC) = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \textbf{[3]}$$

Sapendo che $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ e che angoli supplementari hanno lo stesso seno , possiamo scrivere le tre precedenti formule nella seguente maniera :

$$S(ABC) = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \textbf{[4]}$$

3) Area di un triangolo in funzione del semiperimetro e degli angoli

Applicando le formule di Briggs abbiamo :

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2} = \frac{S(ABC)}{p^2} \quad \text{e quindi :}$$

$$S(ABC) = p^2\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2} \qquad \textbf{[5]}$$

relazione che ci consente di calcolare l'area di un triangolo quando conosciamo il suo semiperimetro ed i suoi angoli interni .

4) Area del triangolo in funzione dei tre lati: formula di Erone

$$S(ABC) = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma = \frac{1}{2}ab\cdot\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad S(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \textbf{[6]}$$

che rappresenta la ben nota **formula di Erone** che ci permette di calcolare l'area di un triangolo quando conosciamo le misure dei suoi lati .

5) Area del triangolo in funzione degli angoli e del raggio R della circonferenza circoscritta

$$b = 2R\sin\beta \ , \ c = 2R\sin\gamma \ , \quad S(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma\cdot\sin\alpha$$

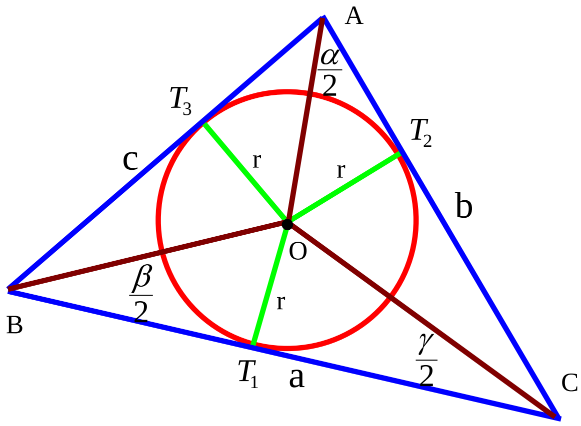
$$S(ABC) = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \qquad \textbf{[7]}$$

6) Area del triangolo in funzione dei lati e del raggio della circonferenza circoscritta

$$S(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \ , \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R} \qquad S = \frac{abc}{4R} \quad \textbf{[8]} \qquad R = \frac{abc}{4S} \quad \textbf{[9]}$$

Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

$$S(ABC) = S(OBC) + S(OCA) + S(OAB) = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = r\,p$$



$$S = r\,p \qquad [10]$$

$$p = \frac{R}{r} \qquad [11]$$

$$r = \frac{S}{p} \qquad [12]$$

Risulta pure : $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}}$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad [13]$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)^2\cdot(p-b)(p-c)}{p\cdot(p-a)}} = (p-a)\cdot\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}} \qquad r = (p-a)\cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

Procedendo alla stessa maniera ricaviamo : $r = (p-b)\cdot tg\frac{\beta}{2} = (p-c)\cdot tg\frac{\gamma}{2}$ **[14]**

$$BT_1 = OT_1\cdot\cot g\frac{\beta}{2} = r\cdot\cot g\frac{\beta}{2} \qquad TC_1 = OT_1\cdot\cot g\frac{\gamma}{2} = r\cdot\cot g\frac{\gamma}{2}$$

$$a = BT_1 + T_1C = r\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right) = r\left(\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right) =$$

$$= r\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}} = r\cdot\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \beta + \gamma = \pi - \alpha \Rightarrow \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$a = r\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}} = r\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$ Formule analoghe si trovano per gli altri due lati

$a = r\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$	$r = \dfrac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot a$
$b = r\cdot\dfrac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$	$r = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot b$
$c = r\cdot\dfrac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$	$r = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot c$

Mediane di un triangolo

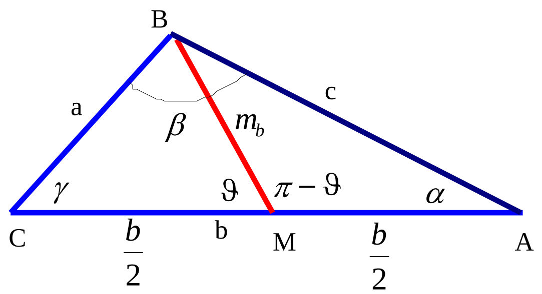
Applichiamo il teorema di Carnot ai triangoli ABM e BMC :

$$\begin{cases} c^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + m_b^2 - 2\cdot\dfrac{b}{2}\cdot m_b\cdot\cos(\pi-\vartheta) = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + m_b^2 + b\cdot m_b\cdot\cos\vartheta \\ a^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + m_b^2 - b\cdot m_b\cdot\cos\vartheta \end{cases}$$

Sommando membro a membro otteniamo: $a^2 + c^2 = 2\cdot\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + 2\cdot m_b^2 = \dfrac{b^2}{2} + 2\cdot m_b^2$ cioè :

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}$$

Procedendo alla stessa maniera otteniamo :



$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}$$

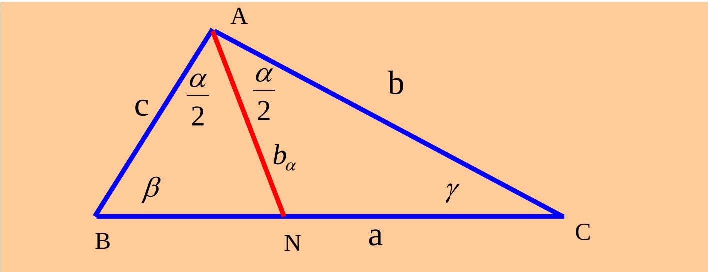
Bisettrici di un triangolo

$$S(ABC) = S(ABN) + S(ANC) = \frac{1}{2}cb_\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bb_\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c}{2}\cdot b_\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{b+c}{2}\cdot b_\alpha\cdot\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$b_\alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc\,p(p-a)}$$

In maniera analoga otteniamo:



$$b_\beta = \frac{2}{a+c}\sqrt{a\,c\,p(p-b)}$$

$$b_\gamma = \frac{2}{a+b}\sqrt{a\,b\,p(p-c)}$$

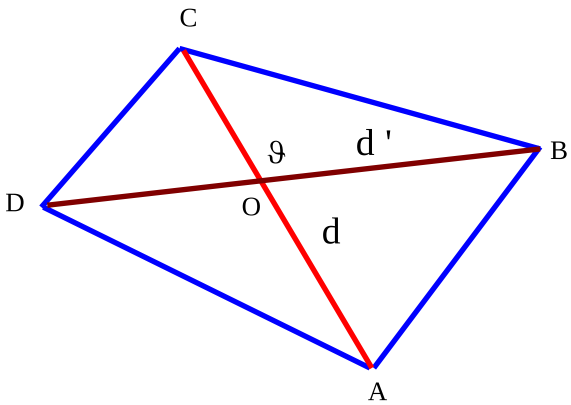
Altro procedimento per calcolare le bisettrici degli angoli interni di un triangolo.

$$S(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad \wedge \quad S(ABC) = \frac{b+c}{2}\cdot b_\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b+c}{2}\cdot b_\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\frac{b+c}{2}\cdot b_\alpha \cancel{\sin\frac{\alpha}{2}} = bc\cdot \cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b+c}{2}\cdot b_\alpha = bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b_\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

In maniera analoga otteniamo: $b_\beta = \frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$ $\qquad$ $b_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$

Area di un quadrilatero qualsiasi



L'area di un quadrilatero qualsiasi è uguale al semiprodotto delle misure delle due diagonali per il seno dell'angolo da esse formato.

$$S = \frac{1}{2}d\cdot d'\cdot\sin\vartheta$$

Poniamo : $AC = d$, $BD = d'$ $\quad S(ABCD) = S(DOA) + S(DOC) + S(COB) + S(AOB) =$

$$= \frac{AO\cdot DO\cdot\sin\vartheta}{2} + \frac{DO\cdot CO\cdot\sin(\pi-\vartheta)}{2} + \frac{OB\cdot OC\cdot\sin\vartheta}{2} + \frac{AO\cdot OB\cdot\sin(\pi-\vartheta)}{2} =$$

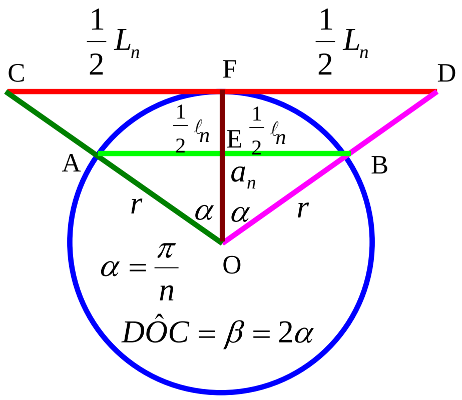
$$= \frac{\sin\vartheta[OB(OC+AO)+DO(AO+CO)]}{2} = \frac{\sin\vartheta(OC+AO)(OB+DO)}{2} = \frac{1}{2}d\cdot d'\cdot\sin\vartheta$$

Perimetri ed aree dei poligoni regolari

Indichiamo con ℓ_n, p_n ed s_n rispettivamente il lato, l'apotema, il perimetro e l'area di un **poligono regolare di n lati** inscritto in una circonferenza σ di raggio r, e con L_n, P_n, S_n rispettivamente il lato, il perimetro e l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a σ.

$A\hat{O}B = \dfrac{2\pi}{n} \Rightarrow A\hat{O}E = A\hat{O}F = \dfrac{\pi}{n}$	$a_n = r \cdot \cos\dfrac{\pi}{n}$
$L_n = 2r \cdot tg\dfrac{\pi}{n}$	$p_n = 2nr \cdot \sin\dfrac{\pi}{n}$

$s_n = \dfrac{1}{2} p_n a_n = nr^2 \sin\dfrac{\pi}{n} \cdot \cos\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{1}{2} nr^2 \sin\dfrac{2\pi}{n}$	$P_n = 2nr\, tg\dfrac{\pi}{n}$	$S_n = \dfrac{1}{2} P_n r = nr^2\, tg\dfrac{\pi}{n}$



Essendo inoltre: $a_n = \dfrac{1}{2}\ell_n \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{\mathrm{n}}$

abbiamo: $S_n = \dfrac{1}{4} n \ell_n^2 \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{\mathrm{n}}$

Agli n lati del poligono regolare (inscritto e circoscritto alla circonferenza di raggio r) corrispondono n angoli al centro fra loro uguali. Ciascuno di questi angoli al centro è l'ennesima parte dell'angolo giro che misura 2π radianti. $C\hat{O}D = \beta = \dfrac{2\pi}{n}$ $\quad \alpha = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi}{n}$

$$EB = \frac{\ell_n}{2} = r \cdot \sin\alpha \cdot = r \cdot \sin\frac{\pi}{n} \qquad AB = \ell_n = 2r \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

$$FD = \frac{1}{2}L_n = r \cdot tg\,\alpha = r \cdot tg\frac{\pi}{n} \qquad CD = 2FD = 2r \cdot tg\frac{\pi}{n} \qquad FO = r$$

$$s_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$$

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} CD \cdot OF = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r\, tg\frac{\pi}{n} \cdot (r) = n \cdot r^2 \cdot tg\frac{\pi}{n}$$

N.B. L'area di un poligono regolare è uguale a: $\dfrac{\text{perimetro} \times \text{apotema}}{2}$

Risoluzione di un triangolo qualsiasi

1° Caso: **Risolvere un triangolo conoscendo 2 angoli ed il perimetro**

Conosciamo 2 angoli ed il perimetro $2p$; dobbiamo calcolare i 3 lati e l'altro angolo.

$$\begin{cases}\alpha = 75° & \beta = 45° \\ 2p = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\sqrt{6}+\sqrt{2} & b=2\sqrt{2} \\ c=2\sqrt{3} & \gamma=60°\end{cases}$$

Prima risoluzione $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$

$$tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad tg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}=\frac{p-a}{p} \qquad p-a=p\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}$$

$a = p - p\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2} = p\left(1-tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}\right)$ Questa formula ci consente di calcolare a

Valgono anche le seguenti formule: $b = p\left(1-tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}\right)$ $\quad c = p\left(1-tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\right)$

Calcolato a, possiamo calcolare b, c utilizzando il teorema dei seni

Seconda risoluzione

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{2p}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$$

$$a=\frac{2p\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \qquad b=\frac{2p\cdot\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \qquad c=\frac{2p\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \qquad [H]$$

Queste formule possono essere rese monomie, cioè calcolabili coi logaritmi. Infatti:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $[\rho]$ formula di prostaferesi $\quad \sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ $[\sigma]$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2} \qquad \frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2} \qquad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$$

La $[\rho]$ e la $[\sigma]$ diventano: $\begin{cases}\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\gamma=2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\end{cases}$ Sommo membro a membro:

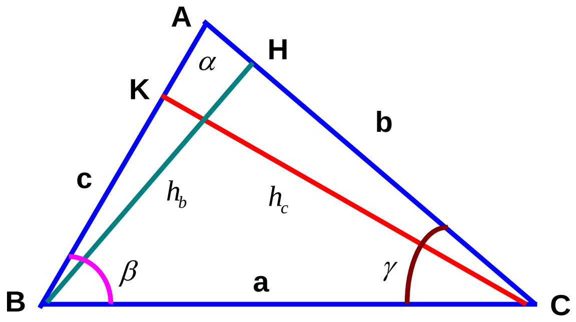
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{4}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta-\alpha-\beta}{4}$$

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$ Le $[H]$ diventano:

$$a=\frac{p\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad b=\frac{p\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}} \qquad c=\frac{p\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$$

Il problema è sempre possibile ed ammette una soluzione se $\alpha+\beta<180°$

2° Caso: **Risolvere un triangolo noti un lato a e le altezze h_b ed h_c relative agli altri due lati**



Conosciamo il lato a e le altezze h_b ed h_c ; dobbiamo calcolare gli altri 2 lati a, b e gli angoli α, β, γ .

Elementi noti $\{a, h_b, h_c$

Elementi da calcolare $\{b, c, \alpha, \beta, \gamma$

$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\frac{h_c}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{h_b}{a} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\frac{h_b}{a} \qquad \alpha = \pi - (\beta + \gamma)$

Poi si applica il teorema dei seni

3° Caso: **Risolvere un triangolo noti i lati a , b e l'area S .**

Elementi noti $\{a, b, S$ Elementi da calcolare $\{c, \alpha, \beta, \gamma$

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\frac{2S}{ab}$

- due soluzioni se risulta $\sin\gamma = \frac{2S}{ab} < 1$ γ_1 angolo acuto $\gamma_2 = \pi - \gamma_1$ angolo ottuso
- una soluzione se risulta $\sin\gamma = \frac{2S}{ab} = 1$ $\gamma = \frac{\pi}{2}$
- nessuna soluzione se risulta $\sin\gamma = \frac{2S}{ab} > 1$

$\alpha \quad \beta$	**c**
se è $a > b$ possiamo scrivere: $tg\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\text{cotg}\frac{\gamma}{2}$ e calcolare $\frac{\alpha-\beta}{2}$ Poiché risulta: $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$ possiamo calcolare α e β .	$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ $\ln c = \ln a + co\log\sin\alpha + \ln\sin\gamma$ $c = \cdots\cdots$

4° Caso: **Risolvere un triangolo dati due angoli α, β e l'area S.**

Elementi noti $\{\alpha,\beta,S$ Elementi da calcolare $\{a,b,c,\gamma$ $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$

$S=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{\frac{2S\cdot\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$ Poi si applica il teorema dei seni

5° Caso: **Risolvere un triangolo dati due angoli α, β e la somma (differenza)dei lati opposti.**

Elementi noti $\{\alpha,\beta,a+b(a-b)$ Elementi da calcolare $\{a,b,c,\gamma$ $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$

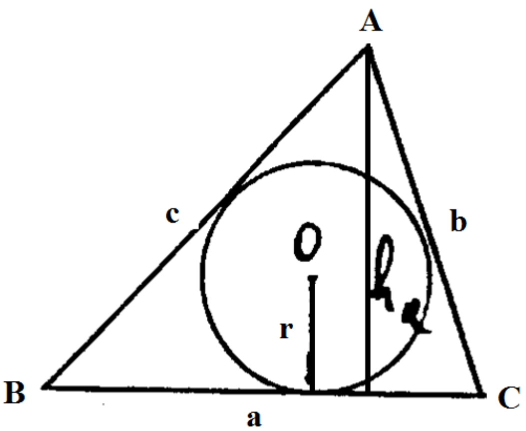
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad \frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a+b}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{a+b}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad\Rightarrow$$

$c=\frac{(a+b)\sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ Si prosegue applicando il teorema dei seni

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a-b}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{a-b}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad\Rightarrow$$

$c=\frac{(a-b)\sin\gamma}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$ Si prosegue applicando il teorema dei seni

6° Caso: **Risolvere un triangolo noti il perimetro $2p$, l'altezza h_a ed il raggio r della circonferenza inscritta.**



Elementi noti $\{2p,h_a,r$

Elementi da calcolare $\{a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$

$r=\frac{S}{p} \quad\Rightarrow\quad S=r\cdot p=\frac{1}{2}a h_a \qquad a=\frac{2rp}{h_a} \qquad a+b+c=2p \quad\Rightarrow\quad b+c=2p-a$

Pongo: $p-b=x \quad p-c=y$ Ottengo: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad\Rightarrow$

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow (p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p(p-a)} \Rightarrow \boxed{x \cdot y = \frac{S^2}{p(p-a)}}$$

$$(p-b)+(p-c) = 2p-(b+c) = 2p-2p+a = a \Rightarrow \boxed{x+y=a} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x\cdot y = \dfrac{S^2}{p(p-a)} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema simmetrico che sappiamo risolvere $\begin{cases} x= \\ y= \end{cases} \Rightarrow \boxed{x+y=a}$

Possiamo calcolare α, oppure β, oppure γ con le formule di Briggs. Per α abbiamo:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{x\cdot y}{p(p-x-y)}} \qquad tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} = \sqrt{\frac{(p-x-y)\cdot y}{p\cdot x}}$$

Calcolati α e β ci calcoliamo $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$ Il teorema dei seni ci fa calcolare b e c.

7° Caso: Risolvere un triangolo noti un angolo (β), un lato (a), la differenza o la somma degli altri due lati.

Elementi noti $\{a, \beta, b-c=d\ (b+c=s)$ Elementi da calcolare $\{a, b, \alpha, \beta$

$$tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \wedge tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \Rightarrow tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2} = \frac{p-a}{p} = \frac{a+b+c-2a}{a+b+c}$$

$$tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2} = \frac{s-a}{s+a} \Rightarrow tg\frac{\gamma}{2} = \frac{s-a}{s+a}\cdot cotg\frac{\beta}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = \Rightarrow \gamma = \quad \alpha = \pi-(\beta+\gamma)$$

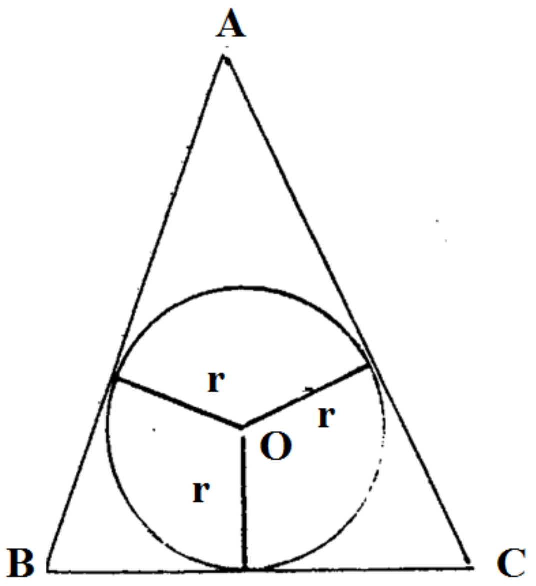
Si prosegue applicando i teorema dei seni. Se conosciamo $b-c=d$ abbiamo:

$$\frac{tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{(p-a)}(p-b)}{\cancel{p}(p-c)}\cdot\frac{\cancel{p}(p-b)}{\cancel{(p-a)}(p-c)}} = \frac{p-b}{p-c} = \frac{a+b+c-2b}{a+b+c-2c} = \frac{a-(b-c)}{a+(b-c)} = \frac{a-d}{a+d}$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{a-d}{a+d}\cdot tg\frac{\beta}{2} \Rightarrow \gamma = \quad \alpha = \pi-(\beta+\gamma)$$

Si prosegue applicando i teorema dei seni.

8° Caso: **Risolvere un triangolo noti due angoli (α,β) ed i raggio r (R) della circonferenza inscritta (circoscritta)**



Elementi noti $\{\alpha,\beta,r(R)$

Elementi da calcolare $\{a,b,c,\gamma$

Risulta: $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$

Abbiamo dimostrato che risulta: $r=(p-a)\cdot tg\frac{\alpha}{2}=(p-b)\cdot tg\frac{\beta}{2}=(p-c)\cdot tg\frac{\gamma}{2}$

Da queste formule mi ricavo: $p-a,\ p-b,\ p-c$ $\begin{cases} a=(p-b)+(p-c) \\ b=(p-a)+(p-c) \\ c=(p-a)+(p-b) \end{cases}$

Altra risoluzione. Basta applicare le seguenti già dimostrate formule:

$$a=r\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\qquad b=r\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}\qquad c=r\cdot\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$$

Calcolato a, si può proseguire applicando il teorema dei seni.

Se invece conosciamo R abbiamo: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$

$$a=2R\sin\alpha\quad b=2R\sin\beta\qquad c=2R\sin\gamma$$

9° Caso: **Risolvere un triangolo noti un lato (c), l'angolo opposto (γ),la somma $a+b$ o la differenza $a-b$ degli altri due lati.**

Elementi noti $\{c,\gamma,a-b=d\ (a+b=s)$ Elementi da calcolare $\{a,b,\alpha,\beta$

Basta applicare una delle formule di Delambre

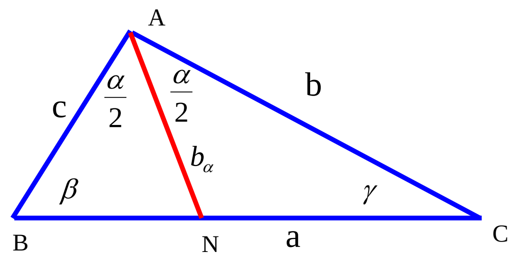
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a+b}{c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2}=\sigma \quad \begin{cases}\frac{\alpha-\beta}{2}=\sigma\\ \alpha+\beta=\pi-\gamma\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=\\ \beta=\end{cases}$$

a,b si calcolano applicando il teorema dei seni.

Si potrebbe applicare anche la seguente formula di Delambre $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{c}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2}=\sigma \quad \begin{cases}\frac{\alpha-\beta}{2}=\sigma\\ \alpha+\beta=\pi-\gamma\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=\\ \beta=\end{cases}$$

10° Caso: Risolvere un triangolo noti un angolo (α), la bisettrice b_α di questo angolo e la somma $b+c=2s$ dei lati b,c che lo comprendono.



Elementi noti $\{b_\alpha,\alpha,b+c=2s$ Elementi da calcolare $\{a,b,c,\beta,\gamma$

$$S(ABC)=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$S(ABC)=S(ABD)+S(ADC)=\frac{1}{2}c\cdot b_\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}b\cdot b_\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}b_\alpha\sin\frac{\alpha}{2}(b+c)=s\cdot b_\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$bc\,\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=s\cdot b_\alpha\,\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad bc=\frac{s\cdot b_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \begin{cases}bc=\frac{s\cdot b_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\\ b+c=2s\end{cases} \qquad x^2-2sx+\frac{s\cdot b_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}=0$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot x^2-2s\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot x+s\cdot b_\alpha=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=s^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-s\cdot b_\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\geq 0 \quad \text{se} \quad b_\alpha\leq s\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$b=x_1 \quad c=x_2$ oppure $b=x_2 \quad c=x_1$

Adesso conosciamo b,c,α si prosegue applicano le seguenti formule:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases}\beta-\gamma=\\ \beta+\gamma=\pi-\alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\beta=\\ \gamma=\end{cases}$$

11° Caso: Risolvere un triangolo noti un'altezza (h_a), il raggio R della circonferenza circoscritta, il raggio r della circonferenza inscritta.

Elementi noti $\{h_a, R, r$ Elementi da calcolare $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$

$S(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{abc}{4R}$ $\quad bc = 2h_a R \quad S = p \cdot r \Rightarrow \frac{1}{2} a \cdot h_a = pr \Rightarrow a \cdot h_a = 2pr = (a+b+c)r$

$a \cdot h_a = ar + (b+c)r \quad (b+c)r = a(h_a - r) \quad b+c = a\left(\frac{h_a}{r} - 1\right)$ purché sia: $h_a > r$

Applico il teorema di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha = (b+c)^2 - 2bc - 2bc\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = (b+c)^2 - 2bc\left(1 + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \quad a^2 = a^2\left(\frac{h_a}{r} - 1\right)^2 - 4bc \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \quad a^2 = a^2\left(\frac{h_a}{r} - 1\right)^2 - 8h_a R \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2(h_a - 2r)}{8r^2 R}$ purché sia: $h_a > 2r$ che ingloba la limitazione precedente $h_a > r$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow a^2 = 4R^2 \sin^2\alpha = 16R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} = 16R^2\left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cancel{a^2} = 16R^2\left[1 - \frac{a^2(h_a - 2r)}{8r^2 R}\right] \cdot \frac{\cancel{a^2}(h_a - 2r)}{8r^2 R} \quad 1 = \frac{8r^2 R - a^2(h_a - 2r)}{4r^4}(h_a - 2r)$$

$$4r^4 = 8r^2 R(h_a - 2r) - a^2(h_a - 2r)^2 \quad a^2(h_a - 2r)^2 = 8r^2 R(h_a - 2r) - 4r^4$$

$$a^2(h_a - 2r)^2 = 4r^2(2Rh_a - 4Rr - r^2) \quad a = \frac{2r}{h_a - 2r}\sqrt{2Rh_a - r(4R + r)} \quad \text{con } 2Rh_a - r(4R + r) > 0$$

$h_a > \frac{r(4R + r)}{2R} \quad h_a > 2r + \frac{r^2}{2R}$ e questa assorbe la precedente limitazione $h_a > 2r$

$$b + c = a\left(\frac{h_a}{r} - 1\right) = \frac{2\cancel{r}}{h_a - 2r}\sqrt{2Rh_a - r(4R + r)} \cdot \left(\frac{h_a - r}{\cancel{r}}\right) = \frac{2(h_a - r)}{h_a - 2r}\sqrt{2Rh_a - r(4R + r)}$$

Pongo: $b + c = S \quad b \cdot c = P$ ottengo: $\begin{cases} S = \frac{2(h_a - r)}{h_a - 2r}\sqrt{2Rh_a - r(4R + r)} \\ P = 2h_a R \end{cases} \quad y^2 - Sy + P = 0$

$b = y_1 \wedge c = y_2$ oppure $c = y_1 \wedge b = y_2$ Adesso conosciamo i tre lati a, b, c

Noti i tre lati, ci posiamo facilmente calcolare i tre angoli.

12° Caso: Risolvere un triangolo note le tre mediane m_a, m_b, m_c

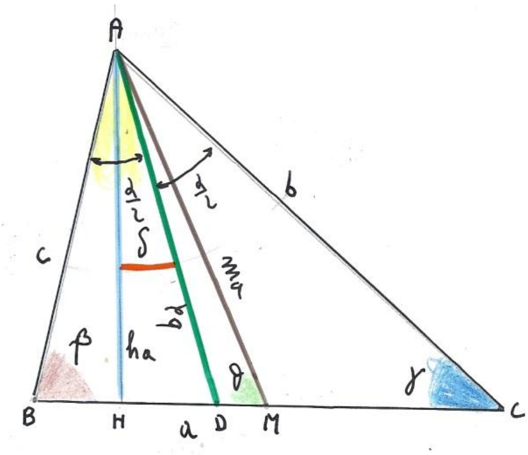
Elementi noti $\{m_a, m_b, m_c$ Elementi da calcolare $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2 \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{1}{2}a^2 \\ a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{1}{2}a^2 \end{cases} \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) \\ b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2 \end{cases} \qquad a^2 + 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{4}{3}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) \qquad a^2 = \frac{4}{9}\left(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2\right)$$

$$b^2 = \frac{4}{9}\left(2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2\right) \qquad c^2 = \frac{4}{9}\left(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2\right) \qquad \sin\alpha = \frac{a}{2R} \qquad \sin\beta = \frac{b}{2R} \qquad \sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

12° Caso: Risolvere un triangolo date l'altezza, la bisettrice e la mediana uscenti da uno stesso vertice



Elementi noti $\{h_a, b_a, m_a$

Elementi da calcolare $\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi - (\beta + \gamma) \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

$$\delta = H\hat{A}D = B\hat{A}D - B\hat{A}H = \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cancel{\frac{\pi}{2}} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - \cancel{\frac{\pi}{2}} + \beta = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} \qquad \boxed{\delta = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}}$$

Ponendo: $A\hat{M}B = \vartheta$ otteniamo nel triangolo rettangolo AHM : $h_a = m_a \cdot \sin\vartheta$

$\sin\vartheta = \frac{h_a}{m_a}$ $\boxed{\vartheta = \arcsin\frac{h_a}{m_a}}$ Il triangolo rettangolo AHD ci consente di scrivere:

$h_a = b_a \cdot \cos\delta$ $\cos\delta = \frac{h_a}{b_a}$ $\boxed{\delta = \arccos\frac{h_a}{b_a}}$

Applico il teorema dei seni al triangolo ABM : $\frac{\frac{a}{2}}{\sin B\hat{A}M}=\frac{m_a}{\sin\beta}$ $\frac{a}{2\sin\left[\pi-(\beta+\vartheta)\right]}=\frac{m_a}{\sin\beta}$

$$\boxed{\frac{a}{2m_a}=\frac{\sin(\beta+\vartheta)}{\sin\beta}} \quad [1]$$

Applico il teorema dei seni al triangolo ABC : $\frac{\frac{a}{2}}{\sin C\hat{A}M}=\frac{m_a}{\sin\gamma}$ $\frac{a}{2\sin(\vartheta-\gamma)}=\frac{m_a}{\sin\gamma}$

$\boxed{\frac{a}{2m_a}=\frac{\sin(\vartheta-\gamma)}{\sin\gamma}}$ $[2]$ $\frac{a}{2m_a}=\frac{a}{2m_a}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin(\beta+\vartheta)}{\sin\beta}=\frac{\sin(\vartheta-\gamma)}{\sin\gamma}$ Si scambiano i medi:

$\sin(\beta+\vartheta):\sin(\vartheta-\gamma)=\sin\beta:\sin\gamma$ applico la proprietà del componendo e dello scomponendo:

$\frac{\sin(\beta+\vartheta)+\sin(\vartheta-\gamma)}{\sin(\beta+\vartheta)-\sin(\vartheta-\gamma)}=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\beta-\sin\gamma}$ Applico le formule di prostaferesi:

$$\frac{\cancel{2}\sin\frac{2\vartheta+\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cancel{2}\cos\frac{2\vartheta+\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\cancel{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cancel{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Noi sappiamo che: $\delta=\frac{\beta-\gamma}{2}$ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ $\Rightarrow$ $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ e quindi possiamo scrivere:

$\frac{\sin(\vartheta+\delta)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos(\vartheta+\delta)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\delta}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\delta}$ $\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\delta\cdot\operatorname{tg}(\vartheta+\delta)$ $\frac{\alpha}{2}=$ $\alpha=$

$\begin{cases}\beta+\gamma=\pi-\alpha\\ \beta-\gamma=2\delta\end{cases}$ $\begin{cases}\beta=\\ \gamma=\end{cases}$ Il lato a si ricava dalla oppure dalla

$a=2m_a\cdot\frac{\sin(\beta+\vartheta)}{\sin\beta}$ $[1]$ $a=2m_a\cdot\frac{\sin(\vartheta-\gamma)}{\sin\gamma}$ $[2]$ $b=\frac{h_a}{\sin\gamma}$ $c=\frac{h_a}{\sin\beta}$

b,c si possono ricavare anche col teorema dei seni