

Unità Didattica N° 22A: Successioni

- 01)** Progressioni aritmetiche
- 02)** Progressioni geometriche
- 03)** Successioni numeriche e loro proprietà
- 04)** Successione convergente
- 05)** Successione divergente positivamente
- 06)** Successione divergente negativamente
- 07)** Teoremi ed operazioni sui limiti delle successioni
 - a)** Teorema dell'unicità del limite
 - b)** Teorema della permanenza del segno
 - c)** Criterio generale di convergenza di Cauchy
 - d)** Teorema della somma
 - e)** Teorema della differenza
 - f)** teorema del prodotto
 - g)** Teorema del quoziente
- 08)** Alcuni teoremi necessari per l'eliminazione delle forme indeterminate
- 09)** Alcuni limiti notevoli
- 10)** Calcolo di limiti di successioni
- 11)** Esercizi

PROGRESSIONI ARITMETICHE

1) Proprietà generali

a) Dicesi **progressione aritmetica** (o per **differenza**) e si indica col simbolo $A(d)$ un insieme ordinato di numeri (almeno tre) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ tali che la **differenza** tra uno qualunque di essi (escluso il primo) ed il suo precedente sia costante, cioè tale che, qualunque sia l'indice n , si abbia:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad [1]$$

con d quantità costante detta **ragione** o **differenza**.

b) I numeri $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ si chiamano **termini** o **elementi** della progressione aritmetica che può essere limitata o illimitata in uno o in tutti e due i sensi.

Per indicare una **progressione aritmetica** si usa il simbolo $\div$ e si scrive :

$$\div \dots a_{-n}, a_{-n+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ESEMPI

$\div 2, 4, 6, 8, 10$ **progressione aritmetica. limitata nei due sensi di ragione 2**

$\div \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ **progressione aritmetica. illimitata nei due sensi di ragione 1**

c) Se i termini di una p.a. sono numeri reali e se $d > 0$ la progressione si dice **crescente**, se $d < 0$ la progressione si dice **decrescente**.

Progressione aritmetica limitata nei due sensi: $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \quad [2]$

Progressione aritmetica illimitata in un senso: $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \dots \quad [3]$

Progressione aritmetica illimitata in entrambi i sensi: $\div \dots a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \quad [4]$

2) Proprietà delle progressioni aritmetiche

a) In ogni **p.a.** limitata il termine **n-esimo** è uguale al primo termine più $(n-1)$ volte la ragione. In simboli abbiamo:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad [5]$$

Dimostrazione

$$\begin{array}{rcl}
 a_2 - a_1 & = & d \\
 a_3 - a_2 & = & d \\
 a_4 - a_3 & = & d \\
 \dots\dots\dots & & \\
 a_n - a_{n-1} & = & d \\
 \hline
 a_n - a_1 & = & (n-1)d
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Sommando membro} \\
 \text{a membro} \\
 \text{otteniamo}
 \end{array}$$

b) Relazioni tra due termini qualsiasi

Se a_r ed a_s sono due termini qualsiasi di una $A(d)$ ed è $r < s$ allora risulta :

$$a_s = a_r + (s-r)d \quad [6]$$

Tenendo presente la [5] possiamo scrivere:

$$\begin{array}{rcl}
 a_s & = & a_1 + (s-1)d \quad \text{sottraendo membro} \\
 a_r & = & a_1 + (r-1)d \quad \text{a membro otteniamo} \\
 \hline
 a_s - a_r & = & sd - rd = (s-r)d \Rightarrow a_s = a_r + (s-r)d
 \end{array}$$

c) In una progressione aritmetica $A(d)$ limitata la somma di due termini equidistanti dagli estremi (**termini coniugati**) è uguale alla somma degli estremi: $a_n + a_1 = a_{k+1} + a_{n-k} \quad [7]$

Se a_{k+1} è un termine preceduto da k elementi e a_{n-k} è un termine seguito da n elementi, per la [5]

abbiamo : $a_{k+1} = a_1 + kd$ cioè : $a_{k+1} - a_1 = kd \quad [\alpha]$, mentre per la [6] abbiamo:

$$a_n = a_{n-k} + kd \quad \text{cioè : } a_n - a_{n-k} = kd \quad [\beta]$$

Confrontando la $[\alpha]$ con la $[\beta]$ otteniamo: $a_n + a_1 = a_{k+1} + a_{n-k} \quad \text{c.v.d.}$

• Due termini di una progressione aritmetica si dicono **coniugati** quando la somma dei loro indici dà $n + 1$.

d) Somma dei termini di una progressione aritmetica limitata $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad [8]$

Dimostrazione

$$\begin{array}{rcl}
 S_n & = & a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad \text{Sommo membro} \quad a \\
 S_n & = & a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \quad \text{membro} \\
 \hline
 2S_n & = & (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)
 \end{array}$$

Tenendo presente la [7] abbiamo: $2S_n = n(a_1 + a_n)$, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

e) Somma dei primi n numeri interi

$$\div 1, 2, 3, \dots, n-1, n \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_n = n \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad [9]$$

f) Somma dei primi n numeri pari

$$\div 2, 4, 6, 8, \dots, 2n \quad , \quad A(2) \quad , \quad a_1 = 2 \quad , \quad a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$$

$$S_n = \frac{n(2 + 2n)}{2} = \frac{2n(1 + n)}{2} \quad S_n = n(1+n)$$

g) Inserzione di medi aritmetici

Inserire m **medi aritmetici** $x_1, x_2, \dots, x_m$ tra due numeri dati a, b significa costruire la progressione aritmetica $a, x_1, x_2, \dots, x_m, b$. Per la [5] abbiamo:

$$b = a + (m + 2 - 1)d \quad d = \frac{b-a}{m+1}$$

h) Osservazione

1) Se in un problema i termini incogniti sono in numero dispari allora conviene indicare con x il termine centrale e con d la ragione. Per $n = 5$ abbiamo: $x-2d, x-d, x, x+d, x+2d$

2) Se i termini della progressione aritmetica sono pari ($n = 2m$) allora conviene indicare con $x - d$ il termine ennesimo e con $2d$ la ragione. Per $n = 6, m = 3$ abbiamo:

$$x-5d, x-3d, x-d, x+d, x+3d, x+5d$$

Esercizi risolti sulle progressioni aritmetiche

- **Trovare la somma dei primi 40 multipli del 3** $a_1 = 3, d = 3, n = 40$;

$$S_{40} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{40(6 + 39 \cdot 3)}{2} = 2460$$

- **Trovare la somma dei primi 20 numeri multipli del 3 che superano il numero 60.**

$$a_1 = 63, d = 3, n = 20, S_{20} = \frac{20(126 + 19 \cdot 3)}{2} = 1830$$

● Si sa che il 2° ed il 7° termine di una progressione aritmetica danno per somma 92 e che il 4° con l'11° fanno 71. Calcolare questi quattro termini.

$$a_2 = a_1 + d, a_7 = a_1 + 6d, a_4 = a_1 + 3d, a_{11} = a_1 + 10d$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = 92 \\ 2a_1 + 13d = 71 \end{cases} \quad d = -3,5, a_1 = 58,25, a_2 = 54,75, a_7 = 37,25, a_{11} = 23,25$$

● La somma dei 4 termini di mezzo di una progressione aritmetica di 12 termini è 74; il prodotto degli estremi è 70. Qual è la progressione?

Sia $x, x + d, x + 2d, \dots, x + 11d$ la p.a. richiesta.

I 4 termini di mezzo sono: $x + 4d, x + 5d, x + 6d, x + 7d$

Abbiamo: $4x + 22d = 74$ cioè: $2x + 11d = 37$.

Il prodotto degli estremi è: $x(x + 11d) = 70$ Eliminando la d otteniamo: $x^2 - 37x + 70 = 0$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 280}}{2} = \frac{37 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{37 \pm 33}{2}, x = 2, \quad = 35$$

$$x = 2 \Rightarrow 11d = 3, d = 3, \div 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35$$

$$= 35 \Rightarrow d = -3, \div 35, 32, 29, 26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2$$

● In una progressione aritmetica di 11 termini, la somma dei termini è 176; la differenza degli estremi è 30. Qual è la progressione?

$$a_{11} - a_1 = 30, S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 176 \Rightarrow a_{11} + a_1 = 32 \quad \begin{cases} a_{11} - a_1 = 30 \\ a_{11} + a_1 = 32 \end{cases} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{11} = 31 \end{cases}$$

$$d = 3, \div 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31$$

● La somma di 3 numeri in progressione aritmetica è 33, il loro prodotto è uguale a 1287. Quali sono i tre numeri?

Siano $x - d, x, x + d$ i 3 numeri richiesti. $x - d + x + x + d = 33 \Rightarrow x = 11$

$$x(x - d)(x + d) = 1287 \Rightarrow d^2 = 4, d = \pm 2, \div 9, 11, 13, \div 13, 11, 9$$

● Trovare tre numeri in progressione aritmetica conoscendo la loro somma s , e la somma b^2 dei loro quadrati.

Siano $x - d, x, x + d$ i 3 numeri richiesti. $(x - d) + x + (x + d) = s \Rightarrow x = \frac{s}{3}$

$$(x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = b^2 \Rightarrow 3x^2 + 2d^2 - b^2 = 0, d^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{3x^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}$$

$$d = \pm \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}} \text{ I tre numeri richiesti sono: } \frac{s}{3} - \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3} + \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{s^2}{6}},$$

- **Trovare 4 numeri in progressione aritmetica sapendo che la loro somma vale 22 e che la somma dei loro quadrati vale 166.**

Siano $x - 3d$, $x - d$, $x + d$, $x + 3d$ i 4 numeri richiesti ($2d$ è la ragione).

$$(x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 22 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

$$(x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 166, 2x^2 + 10d^2 + 83 = 0 \quad \text{cioè:}$$

$$d^2 = \frac{9}{4}, d = \pm \frac{3}{2} \quad \text{I numeri richiesti sono: } \frac{11}{2} - \frac{9}{2} = 1, \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = 4, \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 7, \frac{11}{2} + \frac{9}{2} = 10$$

- **La ragione di una progressione aritmetica di 4 termini è 4; il prodotto dei quattro termini è 585. Qual è la progressione aritmetica?**

Siano x , $x + 4$, $x + 8$, $x + 12$ i 4 numeri cercati. Abbiamo:

$$x(x + 4)(x + 8)(x + 12) = 585 \quad \text{cioè: } x^4 + 24x^3 + 176x^2 + 484x - 585 = 0$$

$$(x - 1)(x + 13)(x^2 + 12x + 45) = 0, x = 1 \Rightarrow 1, 5, 9, 13$$

$$x = -13 \Rightarrow -13, -9, -5, -1$$

Possiamo rappresentare 4 numeri in progressione aritmetica di ragione 4 mediante i binomi:

$$x - 6, x - 2, x + 2, x + 6$$

$$\text{Il prodotto dei 4 binomi dà: } (x - 2)(x + 2)(x - 6)(x + 6) - 585 = 0 \quad (x^2 - 4)(x^2 - 36) - 585 = 0$$

$$x^4 - 40x^2 - 441 = 0 \quad x^2 = 49 \quad x = \pm 7 \quad x^2 = -9 \quad \text{questa equazione non ammette radici reali.}$$

Calcolare la somma dei primi n numeri dispari

La progressione aritmetica: $\div 1; 3; 5; 7; \dots; 2n - 1$;

ha per ragione 2; il primo termine è 1 e l' n -esimo è: $a_n = a_1 + (n - 1)d = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

$$S_n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2.$$

Progressioni geometriche

1) Proprietà generali

Un insieme ordinato di numeri $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ dicesi **progressione geometrica** se

$$\forall n \in N \quad \text{si ha:} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad [1]$$

con q quantità costante diversa da 1 detta **ragione** o **quoziente**.

Una progressione geometrica di ragione q si indica col simbolo $G(q)$ e si scrive:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \quad G(q) \text{ limitata nei due sensi}$$

$$\dots, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad G(q) \text{ illimitata nei due sensi}$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad G(q) \text{ illimitata in un senso}$$

Se gli elementi di una $G(q)$ sono reali e la ragione è positiva, la progressione si dice **crescente**

se risulta $q > 1$, **decrescente** se risulta $q < 1$.

Se invece è $q < 0$ la progressione geometrica dicesi **alternata**.

2) Proprietà delle progressioni geometriche

$$\bullet \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad [1]$$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{array} \right\} \text{Moltiplicando membro a membro i termini delle } n - 1 \text{ righe otteniamo:}$$

$$\cancel{a_2} \cancel{a_3} \dots \cancel{a_{n-1}} \cdot a_n = a_1 \cancel{a_2} \cancel{a_3} \dots \cancel{a_{n-1}} \cdot q^k \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\bullet \quad a_{n+k} = a_n \cdot q^k \quad [2]$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{n+1} = q \cdot a_n \\ a_{n+2} = q \cdot a_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n+k} = q \cdot a_{n+k-1} \end{array} \right\} \text{Moltiplicando membro a membro i termini delle } k \text{ righe otteniamo:}$$

$$\cancel{a_{n+1}} \cdot \cancel{a_{n+2}} \dots \cancel{a_{n+k}} = a_n \cdot \cancel{a_{n+1}} \dots \cancel{a_{n+k-1}} \cdot q^k \Rightarrow a_{n+k} = a_n \cdot q^k$$

• Relazione tra due termini qualsiasi

$$a_s = a_k \cdot q^{s-k} \quad [3]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_s = a_1 \cdot q^{s-1} \\ a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \end{array} \right. \text{Dividendo membro a membro otteniamo:}$$

$$\frac{a_s}{a_k} = \frac{q^{s-1}}{q^{k-1}} = q^{s-k} \Rightarrow a_s = a_k \cdot q^{s-k}$$

• Prodotto di due termini coniugati

Due termini di una progressione geometrica di n termini si dicono **coniugati** o **simmetrici** quando la somma dei loro indici è $n + 1$.

$$\mathbf{a_1 \cdot a_n = a_{n-k} \cdot a_{k+1} \quad [4]}$$

Dímostrazione : $\begin{cases} a_{k+1} = a_1 \cdot q^k \\ a_n = a_{n-k} \cdot q^k \end{cases}$ Dividendo membro a membro otteniamo :

$$\frac{a_{k+1}}{a_n} = \frac{a_1}{a_{n-k}} \Rightarrow \mathbf{a_1 \cdot a_n = a_{n-k} \cdot a_{k+1}}$$

OSSERVAZIONE

Se la progressione geometrica è limitata ed ha un numero dispari di termini, quello centrale a_c è **coniugato di se stesso**, per cui la [4] diventa: $a_c^2 = a_1 a_n \quad \mathbf{a_c = \sqrt{a_1 a_n} \quad [5]}$

• Prodotto di n termini consecutivi

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \mathbf{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \quad [6]}$$

Dímostrazione $\begin{cases} P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \\ P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \end{cases}$ Moltiplico membro a membro

$$P_n^2 = \underset{1}{(a_1 \cdot a_n)} \cdot \underset{2}{(a_2 \cdot a_{n-1})} \cdots \underset{n-1}{(a_{n-1} \cdot a_2)} \cdot \underset{n}{(a_n \cdot a_1)}$$

Per la [4] abbiamo: $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \mathbf{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$

• Somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1 \quad \text{se } q > 1 \quad [7]$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1 \quad \text{se } q < 1 \quad [8]$$

Dímostrazione

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n, \quad q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q + (a_1 - a_1) \quad , \quad q \cdot S_n = S_n + q \cdot a_n - a_1$$

$$(q - 1)S_n = q a_n - a_1, \quad \mathbf{S_n = \frac{q a_n - a_1}{q - 1} = \frac{q a_1 q^{n-1} - a_1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1}$$

Se risulta $q < 1$ scriviamo: $S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1$

Altra Dimostrazione

$$\begin{array}{rcl} q \cdot S_n & = & a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q & \text{Sottraggo} \\ S_n & = & a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n & \text{membro a} \\ \hline & & & \text{membro} \end{array}$$

$$qS_n - S_n = -a_1 + qa_n = a_1 q^n - a_1 \dots$$

• Somma dei termini di una progressione geometrica illimitata

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \quad [9] \quad \text{se } |q| < 1 \quad \text{cioè se: } -1 < q < 1$$

$$\text{Dimostrazione: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \frac{a_1}{1 - q}$$

• Inserzione di medi geometrici

Inserire **m medi geometrici** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ fra due numeri dati **a, b**, entrambi diversi da zero, significa costruire la progressione geometrica: $a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, b$

$$\text{Dalla [1] ricaviamo: } b = a \cdot q^{m+1} \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \quad [10]$$

che ci permette di ricavare gli elementi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$

3) Frazione generatrice di un numero periodico

$$\begin{aligned} \bullet \quad 0, \bar{8} = 0,888888\dots &= \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10000} + \dots = \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{8}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] \\ &= \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2, \bar{3} = 2,333333\dots &= 2 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots = \\ &= 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] = 2 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \frac{23 - 2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 2,3\overline{15} &= 2,315151515\dots = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + \dots = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} \left[1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots \right] = \\
 &= \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2} \right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}} \right] = \frac{23}{10} + \frac{15}{10^3} \left[\frac{1}{\frac{99}{100}} \right] = \frac{23}{10} + \frac{15}{990} = \frac{2292}{990} = \frac{2315 - 23}{990}
 \end{aligned}$$

<<Un numero decimale periodico non può avere come periodo il numero 9 o un gruppo di cifre tutte uguali al 9>>

$$\begin{aligned}
 \text{Esempio: } 2,\overline{9} &= 2,99999\dots = 2 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 2 + 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) = \\
 &= 2 + 9 \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = 2 + 9 \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} \right) = 2 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

Successioni numeriche

Definizione N°1

Dicesi **successione di numeri reali** o **successione numerica** una funzione f di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$ [oppure di $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$ in $\mathbf{R}$]. In simboli matematici abbiamo: $f : N \rightarrow R : n \in N \rightarrow f(n) = a_n \in R$

<<Una successione numerica è una funzione f che ad ogni $n \in N$ associa una immagine $f(n) = a_n \in R$ >>

Una successione è una funzione il cui dominio è l'insieme $\mathbf{N}$ ed il cui codominio è un sottoinsieme di $\mathbf{R}$. Si dice anche che una successione è una funzione definita in $\mathbf{N}$ ed a valori in $\mathbf{R}$. Gli elementi del codominio della successione, che sono le immagini della funzione f , si dicono i **termini della successione**.

Per le successioni, la **variabile indipendente** viene indicata col simbolo $n \in N$, e l'immagine $f(n)$ col simbolo a_n [o con x_n o con y_n].

$$\begin{array}{lcl}
 N & \xrightarrow{f} & R \\
 1 & \longrightarrow & f(1) = a_1 \\
 2 & \longrightarrow & f(2) = a_2 \\
 3 & \longrightarrow & f(3) = a_3 \\
 \dots & & \dots \\
 n & \longrightarrow & f(n) = a_n
 \end{array}$$

Una successione si indica con uno dei seguenti simboli: $\{a_n\}$, (a_n) , $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

Dare una successione significa assegnare una legge f di natura qualsivoglia in base alla quale ad ogni numero naturale n corrisponda un solo numero reale a_n :

$$f : n \longrightarrow a_n \qquad n \xrightarrow{f} a_n$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sono i termini o gli elementi della successione $\{a_n\}$, a_n dicesi **termine generale** della successione.

Due o più termini di una stessa successione, pur occupando posti diversi, possono essere uguali.

Una successione può essere individuata mediante il **termine generale** o per **ricorrenza**.

Nel primo caso il termine a_n è individuato da una formula (ad esempio $a_n = \frac{n+1}{n}$), nel secondo caso si assegna il valore del primo termine a_1 e si indica la legge che fa passare da un termine al successivo.

Una successione presenta un solo **punto di accumulazione** che è $+\infty$ (o $-\infty$). Una successione non presenta punti di accumulazione al finito. Una successione si dice **limitata superiormente, inferiormente, limitata** se tale è il suo codominio.

$$\sup a_n = \text{estremo superiore di } a_n \quad , \quad \inf a_n = \text{estremo inferiore di } a_n$$

Se la successione non è limitata superiormente (inferiormente) si scrive:

$$\sup a_n = +\infty \quad (\inf a_n = -\infty)$$

e si dice che la successione è **illimitata superiormente (inferiormente)**.

- Esempi di successioni il cui termine generale a_n è espresso mediante una formula matematica

$$a_n = \frac{1}{n} , 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \qquad a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} , 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$$

$$a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} , 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \qquad a_n = 2^n , 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$a_n = -2n , -2, -4, -8, -16, -32, \dots \qquad a_n = \frac{1}{2^n - 1} , 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} , 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots \qquad a_n = \frac{n+3}{2} , 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{n} , -1, \frac{3}{2}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, -\frac{9}{5}, \dots$$

• Esempi di successioni definite per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{4 - a_n}{3 - a_n} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$$n = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{4 - a_0}{3 - a_0} = \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot (1) + 1}{(1) + 1}$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{4 - a_1}{3 - a_1} = \frac{4 - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot (2) + 1}{(2) + 1}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{4 - a_2}{3 - a_2} = \frac{4 - \frac{5}{3}}{3 - \frac{5}{3}} = \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot (3) + 1}{(3) + 1}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = \frac{4 - a_3}{3 - a_3} = \frac{4 - \frac{7}{4}}{3 - \frac{7}{4}} = \frac{9}{5} = \frac{2 \cdot (4) + 1}{(4) + 1}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_5 = \frac{4 - a_4}{3 - a_4} = \frac{4 - \frac{9}{5}}{3 - \frac{9}{5}} = \frac{11}{6} = \frac{2 \cdot (5) + 1}{(5) + 1}$$

e quindi per la regolarità di formazione dei termini della successione risulta : $a_n = \frac{2n + 1}{n + 1}$

il grafico di una successione è costituito da punti.

Successioni monotone

I valori a_n dipendono dall'operatore f che trasforma gli elementi di $\mathbf{N}$ in ben determinati elementi di $\mathbf{R}$ che costituiscono il **codominio** di f . Per ricordare ciò scriviamo : $a_n = f(n)$ con $n \in N$

Solo in casi particolari l' **ordinamento naturale** di N (ossia la relazione d'ordine espressa dal simbolo $\leq$) è trasferito da f a tutti i corrispondenti elementi del codominio di f .

In questo caso la successione $\{a_n\}$ è **strettamente crescente** (**decrescente**) se:

$$a_n < a_{n+1} \quad [a_n > a_{n+1}] \quad \forall n \in N$$

è **semplicemente crescente** [**decrescente**] se:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad [a_{n+1} \leq a_n] \quad \forall n \in N$$

Una successione si dice **monotona** quando è crescente, oppure strettamente crescente, oppure decrescente, oppure strettamente decrescente.

A volte si parla di **successione strettamente monotona** se essa è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Una successione che ammette limite finito o infinito si dice **regolare**.

Una successione che non ammette limite si dice (**oscillante** o) **indeterminata**. Una successione monotona è sempre **regolare**. Una successione si dice **limitata** quando sono finiti sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore del codominio di f .

Limite di una successione

Definizione N°2 (successione convergente)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ ha per limite il numero ℓ (o che converge ad ℓ o che tende ℓ) e si

scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ quando , fissato un numero ε positivo ed arbitrario , è possibile

determinare in corrispondenza un indice $n_1 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_1$ si abbia :

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{cioè:} \quad \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

La precedente definizione in termini simbolici diventa :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 = n(\varepsilon) : |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > n_1$$

Per verificare che la successione $\{a_n\}$ **converge** al numero ℓ si procede come segue:

1) si sceglie in maniera arbitraria il numero positivo ε **2)** si risolve l'inequazione $|a_n - \ell| < \varepsilon$

3) se questa inequazione ammette come soluzione $n > n_1$ il limite è verificato; in caso contrario la successione non converge al numero ℓ .

<< Usando la definizione verificare che risulta: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ >>

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = n(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e quindi anche per}$$

$n > n_1$ dove n_1 è il primo numero intero maggiore di $n(\varepsilon)$.

Conclusione

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \quad \forall n > n_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

<<Verificare che la successione di termine generale $a_n = \frac{n}{n+1}$ converge al numero ℓ , cioè

verificare che risulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ >>

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow$$

$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = n(\varepsilon)$ ed anche $n > n_1$ dove n_1 è il primo numero intero maggiore di $n(\varepsilon)$ con $\varepsilon < 1$ cosa lecita in quanto, data l'arbitrarietà di ε , lo posso scegliere piccolo a piacere.

$$\text{Conclusione } \forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \forall n > n_1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Definizione N°3: (successione divergente positivamente)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $+\infty$ (o diverge a $+\infty$) e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

quando, scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere), è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n_1 = n(K)$ tale che per ogni numero naturale $n > n_1$ si abbia : $a_n > K$.

Tradotta in simboli , la precedente definizione diventa :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k > 0, \exists n_1 = n(K) : a_n > K \quad \forall n > n_1$$

Definizione N°4: (successione divergente negativamente)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $-\infty$ (o diverge a $-\infty$) e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

quando , scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere), è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n_1 = n(K)$ tale che per ogni numero naturale $n > n_1$ si abbia : $a_n < -K$.

Tradotta in simboli , la precedente definizione diventa :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k > 0, \exists n_1 = n(K) : a_n < -K \quad \forall n > n_1$$

Definizione N°5: (successione divergente)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a ∞ (o diverge a ∞) e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$

quando , scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere) , è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n_1 = n(K)$ tale che per ogni numero naturale $n > n_1$ si abbia : $|a_n| > K$.

Tradotta in simboli , la precedente definizione diventa :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k > 0, \exists n_1 = n(K) : |a_n| > K \quad \forall n > n_1$$

Definizione N°6: (successione che diverge oscillando)

Si dice che la successione $\{a_n\}$, in cui sia i termini positivi che quelli negativi siano in numero infinito, **diverge oscillando** ad ∞ , se per ogni $K > 0$ grande a piacere è possibile determinare in corrispondenza un indice $n_1 = n(K)$ tale che si abbia : $|a_n| > K \quad \forall n > n_1$

La successione di termine generale $a_n = \ln(1 + n)$ diverge positivamente , la successione di termine generale $a_n = (-1)^n \cdot \ln(1 + n)$ diverge oscillando in quanto i suoi termini sono alternativamente positivi e negativi , mentre $|a_n|$ finisce col diventare grande a piacere .

Definizione N°7: (di successione indeterminata)

Una successione che non sia né convergente né divergente si dice **indeterminata**

Osservazione

Sono **successioni regolari** le successioni convergenti e quelle divergenti. Non sono successioni regolari le successioni indeterminate e le successioni che **divergono oscillando**.

Teoremi ed operazioni sui limiti delle successioni

Teorema N°1: Ogni successione convergente è limitata

Teorema N°2 (dell'**unicità del limite**)

<< Se una successione $\{a_n\}$ tende ad un limite ℓ (finito o infinito) esso è unico >>

Dimostrazione

Dimostriamo questo teorema per assurdo, ammettendo che sia contemporaneamente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \qquad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell_1 \neq \ell$$

Senza ledere la generalità del problema possiamo supporre $\ell_1 > \ell$. Allora è possibile fissare il numero positivo ed arbitrario ε in modo che risulti: $\varepsilon < \frac{\ell_1 - \ell}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \quad [1]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell_1 \Rightarrow \ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon \quad \forall n > n_2 = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \quad [2]$$

Le [1] e [2] valgono contemporaneamente per $n > n(\varepsilon)$ dove $n(\varepsilon)$ è il maggiore dei due numeri positivi n_1 ed n_2 . Quindi per $n > n(\varepsilon)$ possiamo scrivere:

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \qquad \ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon$$

Da queste due disuguaglianze deduciamo che: $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ e quindi possiamo scrivere: $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow \ell_1 - \ell < 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon > \frac{\ell_1 - \ell}{2}$

Questa disuguaglianza contrasta con l'ipotesi formulata all'inizio della dimostrazione. L'assurdo si toglie ammettendo che il limite della successione, quando esiste, è unico.

Teorema N°3 (della permanenza del segno)

<<Se una successione $\{a_n\}$ tende al limite ℓ positivo (negativo), i suoi termini sono definitivamente positivi (negativi), cioè esiste un numero $p \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ ($a_n < 0$) $\forall n > p$ >>

Con parole diverse possiamo dire che se una successione $\{a_n\}$ tende ad un limite ℓ non nullo, allora da un certo indice in poi tutti i termini della successione hanno lo stesso segno di ℓ .

DIMOSTRAZIONE

Sia $\ell > 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_1$. Poichè ε è un numero positivo ed arbitrario, lo possiamo scegliere minore di $\frac{\ell}{2}$, cioè a partire da un indice $\forall n > n_1$ abbiamo: $0 < \varepsilon < \frac{\ell}{2}$. Questo significa che sono positivi i numeri $\ell - \varepsilon$ ed $\ell + \varepsilon$ e quindi anche a_n .

Se invece è $\ell < 0$ allora risultano negativi i numeri $\ell - \varepsilon$ ed $\ell + \varepsilon$ se scegliamo $0 < \varepsilon < \frac{|\ell|}{2}$ e quindi a partire da un indice $\forall n > n_1$ risulta negativo anche a_n .

Teorema N°4 (INVERSO DEL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO)

Sia data la successione $\{a_n\}$ tale che sia $a_n > 0$ [$a_n < 0$], almeno da un certo indice in poi.

Allora, se esiste il $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ si ha: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0$ [$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 0$]

Teorema N°5: (del confronto fra limiti, detto anche teorema dei carabinieri)

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ tre successioni tali che: $a_n \leq b_n \leq c_n$

(almeno da un certo indice in poi). Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ convergono al limite ℓ , anche

la successione $\{b_n\}$ converge al limite ℓ , cioè:

$$[a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \ell] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \ell \Rightarrow \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_3$$

Detto n_1 il più grande dei due numeri naturali n_2 e n_3 abbiamo:

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_1$$

$$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n > n_1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$$

Criterio generale di convergenza (di Cauchy)

C.N.S. perché la successione $\{a_n\}$ sia convergente è che, fissato un numero ε positivo ed arbitrario, si possa determinare in corrispondenza un numero positivo $n(\varepsilon)$ tale che, per due indici r ed s entrambi maggiori di $n(\varepsilon)$, si abbia: $|a_r - a_s| < \varepsilon$

Tradotta in simboli, la precedente definizione diventa:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) > 0 : |a_r - a_s| < \varepsilon \quad \forall r > s > n(\varepsilon) \wedge r, s \in \mathbb{N}$$

Oppure, in maniera del tutto equivalente, possiamo dire che **C.N.S.** perchè la successione $\{a_n\}$ sia convergente è che, fissato un numero ε positivo ed arbitrario, è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n(\varepsilon)$ tale, per ogni $n > n(\varepsilon)$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$ si abbia.

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

oppure, in forma del tutto equivalente si abbia: $|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+p-1} + a_{n+p}| < \varepsilon$

Ogni successione che verifica questo criterio generale di convergenza dicesi **successione di Cauchy**.

E' bene notare come nella condizione di Cauchy non compaia il valore del limite della successione.

Teorema N°6: Una successione $\{a_n\}$ è **convergente** se e solo se è di Cauchy

Teorema N°7 (della **somma**): Se due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno per limiti rispettivamente i numeri ℓ_1 , ℓ_2 la successione $\{a_n + b_n\}$ ha per limite il numero $\ell_1 + \ell_2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$$

DIMOSTRAZIONE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell_1 \Rightarrow |a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell_2 \Rightarrow |b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_3$$

Ricordando che $|\ell_1 + \ell_2| \leq |\ell_1| + |\ell_2|$ e detto n_1 il più grande dei due numeri n_2 ed n_3 abbiamo :

$$|a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2| < \varepsilon \quad \forall n > n_1, \quad |(a_n - \ell_1) + (b_n - \ell_2)| < \varepsilon \quad \forall n > n_1$$

$$|(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon \quad \forall n > n_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$$

Abbiamo, quindi, dimostrato che : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell_2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$

Teorema N°8 (della **differenza**): Se due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno per limiti rispettivamente i numeri ℓ_1 , ℓ_2 la successione $\{a_n - b_n\}$ ha per limite il numero $\ell_1 - \ell_2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \ell_1 - \ell_2$$

Teorema N°9 $k \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} k \cdot a_n = k \cdot \ell$

Una costante moltiplicativa può essere portata fuori dal simbolo di limite.

Teorema N°10 (del **prodotto**): Se due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno per limiti rispettivamente i numeri ℓ_1 , ℓ_2 la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ ha per limite il numero $\ell_1 \cdot \ell_2$, cioè il limite del prodotto di due successioni è uguale al prodotto dei limiti,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = \ell_1 \cdot \ell_2$$

Teorema N°11 Se la successione $\{a_n\}$ è limitata e la successione $\{b_n\}$ ha limite nullo, allora la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ converge a zero.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \leq a_n \leq \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Teorema N°12 (della **successione reciproca**)

Se la successione $\{a_n\}$ tende al limite $\ell \neq 0$, la successione reciproca $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ tende al limite $\frac{1}{\ell}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\ell}$$

Teorema N°13 (del **quoziente**)

Se la successione $\{a_n\}$ ha per limite il numero ℓ_1 e la successione $\{b_n\}$, priva di elementi nulli, converge ad $\ell_2 \neq 0$, la successione $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ converge al numero $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Teorema N°14: Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti per le quali risulti:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta$ allora, se $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = \alpha^\beta$$

Teorema N°15 (sulle **successioni monotone**)

Ogni **successione monotona** ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata è **convergente**, cioè ammette limite finito.

OSSERVAZIONE

- Il teorema della somma delle successioni quando esse sono divergenti può dare luogo alla seguente forma indeterminata $+\infty - \infty$
- Il teorema del prodotto di due successioni può dare luogo alla seguente forma indeterminata $0 \cdot \infty$

- Il teorema del quoziente di due forme indeterminate può dare luogo alle seguenti forme

indeterminate : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

- Dire che un limite si presenta in una delle quattro predette forme indeterminate non significa affermare che il limite non esiste .

Opportune semplificazioni o trasformazioni, appropriati teoremi , o idonei artifici potranno consentire di calcolare il valore finale del limite .

Le regole di Cesaro

Risultano utili per il calcolo di limiti di successioni che si presentano in forma indeterminate le seguenti **regole di Cesaro**.

Teorema N°16 (prima regola di Cesaro)

- Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni numeriche monotone ed infinitesime (cioè due successioni per le quali risulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$)

- se $b_n \neq 0 \quad \forall n \neq 0$

- se esiste finito o infinito il seguente limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

allora esiste anche il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ e si ha : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

Teorema N°17 (seconda regola di Cesaro)

- Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni numeriche
- Se $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Se la successione $\{b_n\}$ è monotona crescente e divergente a $+\infty$ (oppure monotona decrescente e divergente a $-\infty$) . Nessuna ipotesi si formula sulla successione $\{a_n\}$

- se esiste finito o infinito il seguente limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ allora esiste anche il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$

e si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

OSSERVAZIONE

- I due teoremi di Cesaro costituiscono delle condizioni **sufficienti** ma **non necessarie** per

l'esistenza del limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$

Essi sono l'equivalente dei due teoremi di De L'Hospital per le funzioni continue $f(x)$.

- Dalle due regole di Cesaro derivano cinque regole pratiche che alcuni autori chiamano **applicazioni delle regole di Cesaro**.

PRIMA APPLICAZIONE

Se la successione $\{a_n\}$ ha limite ℓ , finito o infinito, anche la successione

$\left\{ \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right\}$ ha lo stesso limite ℓ , cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

SECONDA APPLICAZIONE

Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono **convergenti** ed hanno per limiti rispettivamente i numeri α

e β , allora la successione $\left\{ \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1}{n} \right\}$ risulta convergente ed ha

per limite il numero $\alpha \cdot \beta$, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = \alpha \cdot \beta$$

TERZA APPLICAZIONE

Se la successione $\{a_n\}$ a termini positivi ammette limite ℓ , finito o infinito, anche la successione

$\left\{ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \right\}$ ammette lo stesso limite ℓ , cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

QUARTA APPLICAZIONE

- Se la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi

- se la successione $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ ha limite ℓ , finito o infinito, allora la successione $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ ha lo stesso

limite, cioè:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

QUINTA APPLICAZIONE

- 1)** Se la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi **2)** se risulta: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k < 1$

allora la successione $\{a_n\}$ **converge a zero** (cioè risulta infinitesima) in quanto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

- Se invece risulta: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k > 1$ allora la successione $\{a_n\}$ **diverge positivamente**
- Nulla può dirsi sul carattere della successione $\{a_n\}$ se risulta: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k = 1$

Alcuni limiti notevoli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 & \text{se } b = 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} n}{n} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{a_n} - 1}{a_n} = \ln b \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{se} \quad a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1 \quad \text{con} \quad b \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ se } a_n > 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0}{b_0} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{n^q} = \frac{a_0}{b_0} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{p-q} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } p = q \\ 0 & \text{se } p < q \end{cases}$$

$$P(n) = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_{p-1} n + a_p, \quad Q(n) = b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_{q-1} n + b_q$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_{p-1} n + a_p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_0 \cdot n^p = \infty$$

con $p \in \mathbb{N}$.

Per individuare il segno di ∞ bisogna conoscere il segno di a e la parità o disparità dell'esponente p .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty \quad \text{se } \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \text{se } a > 1 \text{ ed } \alpha > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$$

Le seguenti successioni divergenti sono ordinate in senso crescente di rapidità:

$$\log_a n \ (a > 1) \quad k^n \ (k > 1) \quad n^\alpha \ (0 < \alpha < 1) \quad n \quad n^\beta \ (\beta > 1) \quad n! \quad n^n$$

Definizioni:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \Rightarrow \{a_n\} \text{ successione convergente}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty \Rightarrow \{a_n\} \text{ successione divergente}$$

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \text{ non esiste} \Rightarrow \{a_n\} \text{ successione irregolare}$$

Teorema del confronto fra limiti

Se risulta:

$$(1) \quad a_n \leq b_n \leq c_n \text{ definitivamente a partire da un certo indice } \bar{n} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \ell \text{ allora risulta } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$$

Successioni ricorsive o successioni definite per ricorrenza

Sono successioni definite da una relazione del tipo:
$$\begin{cases} a_{n+1} = f(n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}) \\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_k \in R \text{ dati} \end{cases}$$

Per studiare il carattere di una successione ricorsiva può essere utile la seguente **proposizione**:

Sia $\{a_n\}$ una successione ricorsiva. Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in R^*$ allora risulta

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

Determinare il comportamento della successione ricorsiva:
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \quad \forall n \in N \\ a_0 = b \in R^+ \end{cases}$$

Applichiamo la precedente proposizione. Se la successione $\{a_n\}$ converge deve essere

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in R^*$ e, quindi, per proposizione precedente possiamo scrivere: $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{\ell}{1+\ell} \Rightarrow$

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell} \Rightarrow 1 = \frac{1}{1+\ell} \Rightarrow 1+\ell = 1 \Rightarrow \ell = 0$$

Poiché il primo termine $a_0 = b \in R^+$ è positivo, la nostra successione è a termini positivi; essa è anche strettamente decrescente e deve essere: $0 < a_n \leq b$

Se risultasse $\ell = \pm\infty$ allora avremmo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{1+\ell} = 1$

La successione proposta, strettamente decrescente e limitata, ammette limite; e questo è **zero** oppure 1. Dico che il suo limite è zero in quanto una successione monotona e limitata è convergente, cioè ammette limite finito. [Mentre una successione monotona illimitata diverge]

Concludendo possiamo affermare che risulta: **$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$** e non può essere $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ in quanto, in tal caso, la successione proposta essendo divergente ($\ell = \pm\infty$) non dovrebbe essere limitata.

Determinare il comportamento della successione ricorsiva:
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{4-a_n}{3-a_n} \\ a_n = 1 \end{cases}$$

Abbiamo visto che il suo termine generale è: $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$

Poiché risulta: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$ possiamo affermare che la successione proposta converge al numero due. Ritroviamo lo stesso numero utilizzando la proposizione delle successioni ricorsive.

Se la successione $\{a_n\}$ converge deve essere $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$ e, quindi, anche: $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4-a_n}{3-a_n} = \frac{4-\ell}{3-\ell}$

$$\Rightarrow \ell = \frac{4-\ell}{3-\ell} \Rightarrow 3\ell - \ell^2 = 4 - \ell \Rightarrow \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \Rightarrow (\ell - 2)^2 = 0 \quad \ell = 2.$$

Studiare il carattere delle seguenti successioni:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1}} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n+1}} \quad a_n = \frac{n \cdot \ln^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad e^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{1}{n} \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 1 - \frac{1}{2n} \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{2n} \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad 1 - \cos \frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{2n^2} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Esercizi

Verificare, applicando l'opportuna definizione, le seguenti uguaglianze

16 A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$; B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n^2} = 0$; C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_4 n = +\infty$.

17 A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 n = -\infty$; B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \frac{4n+1}{n} = 2$; C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_3 \frac{9+n}{9n} = 2$.

18 A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n+1}{9n}} = \frac{1}{3}$; B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$; C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n-n^2} = 0$.

43 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

44 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{2n}\right) = \frac{3}{2}$

45 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-2}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

46 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n+1}{2n}\right) = 2$

47 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+\sqrt{2}}{2n}\right) = \frac{1}{2}$

48 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6n+1}{2n}\right) = 3$

49 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-6}{n-4}\right) = 3$

50 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4}$

51 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2-1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}$

52 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2}\right) = 1$

53 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{n+2}{2n}\right) = -1$

54 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{4n+2}{2n-5}\right) = 1$

55 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{6n-5}{2n}\right) = \log_2 3$

56 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{n+\sqrt{2}}{n}\right) = 0$

57 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log_2 n + 2n}{2n}\right) = 1$

58 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8n+2\log_2 n}{2n}\right) = 4$

60 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-4n}\right) = \frac{1}{2}$

61 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2\sqrt{n}-1}{2n^2-4\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$

62 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 \left(\frac{n^2-2n-1}{2n^2+4n}\right) = -1$

Servendosi della definizione di limite di una successione, provare che risulta :

Successioni che convergono

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 1}{3^n + 1} = 3$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} = 0$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3n - 1}{1 + 4n} = \frac{3}{4}$

Successioni che divergono

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n + 2} = +\infty$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$ 6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2 (n + 1) = +\infty$

7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - n) = -\infty$

8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n} = +\infty$

9) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n + 3} = +\infty$

DETERMINARE IL CARATTERE ED IL LIMITE PER LE SEGUENTI SUCCESSIONI

1) $a_n = n - n^2$; 2) $a_n = \frac{\log n - n^2}{n}$; 3) $a_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)^n$;

4) $a_n = a^{\frac{1-\sqrt{n}}{n^2}}$; 5) $a_n = \frac{4^n - 1}{3^n}$; 6) $a_n = \frac{1 + \log n}{1 - 2 \cdot \log n}$;

7) $a_n = \frac{n - 3 \cdot \sin n}{3 \cdot n}$; 8) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 9) $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

10) $a_n = \left(\frac{2n}{n}\right)$; 11) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n-1}$; 12) $a_n = \frac{3^{1-n} - 1}{n^2} - n$;

13) $a_n = \frac{n^{2n} - 1}{n^n}$; 14) $a_n = n - \frac{n\sqrt{n}}{n}$; 15) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log n}$;

16) $a_n = \frac{\log(n!)}{n}$; 17) $a_n = \frac{\log(n!)}{n^2}$; 18) $a_n = \frac{n\sqrt{n!}}{n}$;

19) $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; 20) $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$; 21) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$;

22) $a_n = \frac{n + \frac{1}{n}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$; 23) $a_n = e^{n + \frac{1}{n}} - e^n$; 24) $a_n = n^{100} - 2^n$.

SOLUZIONI

- | | | |
|----------------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| 1] Divergente a $-\infty$; | 2] Divergente a $-\infty$; | 3] Convergente a 1; |
| 4] Convergente a 1; | 5] Divergente a $+\infty$; | 6] Convergente a $-\frac{1}{2}$; |
| 7] Convergente a $\frac{1}{3}$; | 8] Convergente a 0; | 9] Convergente a 0; |
| 10] Divergente a $+\infty$; | 11] Convergente a e^{-6} ; | 12] Divergente a $-\infty$; |
| 13] Divergente a $+\infty$; | 14] Divergente a $-\infty$; | 15] Convergente a 1; |
| 16] Divergente a $+\infty$; | 17] Convergente a 0; | 18] Convergente ad $\frac{1}{e}$; |
| 19] Convergente a 0; | 20] Divergente a $+\infty$; | 21] Convergente a $\frac{1}{4}$; |
| 22] Convergente a 1; | 23] Divergente a $+\infty$; | 24] Divergente a $-\infty$. |

Progressioni aritmetiche : ulteriori applicazioni

Osservazioni circa i problemi riguardanti le progressioni aritmetiche

Le relazioni fondamentali:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$S_n = \frac{n (a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2} [2a_1 + (n - 1) d]$$

che legano tra loro i cinque elementi a_1 , a_n , n , d , s_n , consentono, se sono noti tre di essi, di calcolare i due rimanenti.

Possono cioè essere dati:

- 1) a_1 , a_n , d ;
- 2) a_1 , a_n , n ;
- 3) a_1 , a_n , S_n ;
- 4) a_1 , d , n ;
- 5) a_1 , d , S_n ;
- 6) a_1 , n , S_n ;
- 7) a_n , d , n ;
- 8) a_n , d , S_n ;
- 9) a_n , n , S_n ;
- 10) d , n , S_n .

Il problema è sempre di primo grado, tranne che nel quinto ed ottavo caso, in cui è di secondo grado.

Ad esempio, nel quinto caso, n è dato dalla equazione:

$$dn^2 + (2a_1 - d) n - 2S_n = 0$$

da cui:

$$n = \frac{d - 2a_1 \mp \sqrt{(d - 2a_1)^2 + 8S_nd}}{2d}$$

ed

$$a_n = \frac{1}{2} [-d \mp \sqrt{(d - 2a_1)^2 + 8S_nd}]$$

Affinchè il problema sia risolvibile occorre che almeno uno dei due valori di n risulti intero e positivo.

Nei problemi sulle progressioni aritmetiche, di solito, si indicano con x ed y il primo termine e la ragione, a meno che il problema indichi esplicitamente altri due elementi incogniti, ed allora saranno questi ad essere denotati con x ed y ; si sostituiscono quindi nelle relazioni fondamentali i valori noti: si ottiene in tal modo un sistema di due equazioni con due incognite, la cui risoluzione fornisce gli elementi cercati.

Problemi sulle progressioni aritmetiche risolti

La somma dei 22 termini di una progressione aritmetica di ragione 7 vale 1683. Trovare primo ed ultimo termine della progressione.

I dati del problema sono $d = 7$, $n = 22$, $S_{22} = 1683$: i termini incogniti sono a_1 ed a_{22} che indicheremo rispettivamente con x ed y .

Dalle relazioni fondamentali si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = x + 21 \cdot 7 \\ \frac{(x + y) 22}{2} = 1683 \end{cases}$$

che ci dà: $x = 3$, $y = 150$.

Calcolare il primo termine e la ragione di una progressione aritmetica sapendo che la somma del secondo e del quarto termine è 16 e quella dei quattro termini è 26.

Nei problemi in cui vi sono un numero pari $2n$ di termini incogniti è opportuno introdurre come incognite: $d = 2y$ $a_n = x - y$.

In tale ipotesi i termini della progressione sono:

$$\div \dots; x - 5y; x - 3y; x - y; x + y; x + 3y; x + 5y; \dots$$

Nel caso in esame i termini incogniti sono quattro e, quindi, indicando la ragione con $2y$ ed a_2 con $x - y$, si ha: $a_1 = x - 3y$ $a_2 = x - y$ $a_3 = x + y$ $a_4 = x + 3y$.

In base alle condizioni date dal problema si può scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 16 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + x + 3y = 16 \\ x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ 4x = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ x = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 - \frac{13}{2} \\ x = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{13}{2} - \frac{9}{2} = 2 \quad a_2 = \frac{13}{2} - \frac{3}{2} = 5 \quad a_3 = \frac{13}{2} + \frac{3}{2} = 8 \quad a_4 = \frac{13}{2} + \frac{9}{2} = 11$$

Il primo termine è 2; la ragione è 3; la progressione è: $\div 2; 5; 8; 11$

Calcolare i primi cinque termini di una progressione aritmetica sapendo che la loro somma è 55 e che la differenza tra il doppio del quinto termine ed il triplo del terzo è -3.

Dalle condizioni dettate dal problema è possibile ricavare il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 55 \\ 2a_5 - 3a_1 = -3 \end{cases}$$

Se i termini incogniti di una progressione aritmetica sono in numero dispari $2n - 1$, conviene indicare il termine centrale con x e la ragione con y in modo che si ha la progressione:

$$\div \dots; x - 3y; x - 2y; x - y; x; x + y; x + 2y; x + 3y; \dots$$

Nel caso in esame, posto $a_3 = x$ e $d = y$, si ha:

$$a_1 = x - 2y$$

$$a_2 = x - y$$

$$a_3 = x$$

$$a_4 = x + y$$

$$a_5 = x + 2y.$$

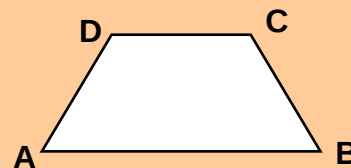
Il sistema scritto precedentemente diventa:

$$\begin{cases} x - 2y + x - y + x + x + y + x + 2y = 55 \\ 2x + 4y - 3x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 55 \\ -x + 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ -11 + 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 2 \end{cases}$$

La progressione aritmetica è la seguente: $\div 7; 9; 11; 13; 15.$

Calcolare le misure dei lati di un trapezio isoscele sapendo che la base minore, il lato obliquo e la base maggiore sono in progressione aritmetica, che il perimetro è 52m e che la somma del lato obliquo e del triplo della base minore è 56m.



$$\div \overline{DC}, \overline{AD}, \overline{AB} \quad 2p = \overline{AB} + \overline{DC} + 2\overline{AD} = 52m \quad 2\overline{AD} + 3\overline{DC} = 56m.$$

Indicando $\overline{AD}$ con x e la ragione della progressione (7) con y , si ha: $\overline{AB} = x + y$ $\overline{AD} = x$ $\overline{DC} = x - y.$

Sostituendo nella (8) e nella (9), si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y + x - y + 2x = 52 \\ 2x + 3(x - y) = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 52 \\ 2x + 3x - 3y = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ 65 - 3y = 56 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 3 \end{cases}$$

e quindi: $AD = BC = 13m;$ $CD = 10m;$ $AB = 16m.$

La somma dei termini di una progressione aritmetica è 161, $a_n=38$ e la ragione è 5. Calcolare a_1 ed n .

I termini incogniti sono a_1 ed n e, quindi, la sola formula $a_n = a_1 + (n-1)d$ o la sola formula

$S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n$ non consentono di calcolarli. Per risolvere il problema occorre mettere a sistema le due formule suddette e sostituire in ciascuna di essa alle lettere i valori noti; si ha:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 38 = a_1 + (n-1)5 \\ 161 = \frac{1}{2}(a_1 + 38)n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 38 = a_1 + 5n - 5 \\ 161 = \frac{1}{2}a_1n + 19n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 43 - 5n \\ 322 = (43 - 5n)n + 38n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 43 - 5n \\ 322 = 43n - 5n^2 + 38n \end{cases} \Rightarrow$$

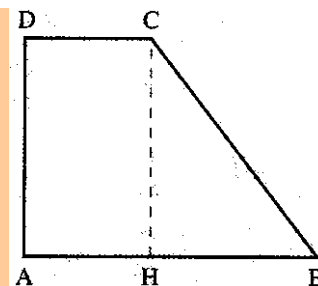
$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 43 - 5n \\ 5n^2 - 81n + 322 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 43 - 5n \\ n = \frac{81 \mp \sqrt{6561 - 6440}}{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 43 - 5n \\ n = \frac{81 \mp \sqrt{121}}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 43 - 5n \\ n = \frac{81 \mp 11}{10} \end{cases}.$$

Si ottengono i seguenti valori per n : $n = 7$ e $n = \frac{46}{5}$, che non è accettabile e, quindi:

$$a_1 = 8 \text{ e } n = 7.$$

L'altezza, il lato obliquo e la base maggiore di un trapezio rettangolo sono in progressione aritmetica e la loro somma è 75m. Calcolare l'area della superficie del trapezio sapendo che la base minore è i tre quarti dell'altezza.



Dati: $\div$ CH, BC, AB. $CH + BC + AB = 75 \text{ m}$; $CD = \frac{3}{4}CH$. Richiesta: S_{ABCD} .

Sia ABCD il trapezio rettangolo, CH la sua altezza. Indicata la ragione della progressione con d , si ha:

$$\overline{CH} = \overline{BC} - d \quad \overline{AB} = \overline{BC} + d.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene l'equazione:

$$\overline{BC} - d + \overline{BC} + \overline{BC} - d = 75 \Rightarrow 3 \overline{BC} = 75 \Rightarrow \overline{BC} = 25.$$

$$BC = 25 \text{ m}.$$

$$\text{Si ha: } \overline{CH} = 25 - d \quad \overline{CD} = \overline{AH} = \frac{3}{4}(25 - d) \quad \overline{AB} = 25 + d$$

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 25 + d - \frac{3}{4}(25 - d) = 25 + d - \frac{75}{4} + \frac{3}{4}d = \frac{25}{4} + \frac{7}{4}d.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BHC, si ha: $\overline{BC}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2$.

Sostituendo le misure dei segmenti espresse in funzione di d ed a $\overline{BC}$ il suo valore, si ha:

$$25^2 = \left(\frac{25}{4} + \frac{7}{4}d \right)^2 + (25 - d)^2 \Rightarrow 625 = \frac{625}{16} + \frac{175}{8}d + \frac{49}{16}d^2 + 625 - 50d + d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49d^2 + 16d^2 + 350d - 800d + 625 = 0 \Rightarrow 65d^2 - 450d + 625 = 0 \Rightarrow 13d^2 - 90d + 125 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{45 \mp \sqrt{2025 - 1625}}{13} = \frac{45 \mp \sqrt{400}}{13} = \frac{45 \mp 20}{13}$$

$$d_1 = \frac{45 - 20}{13} = \frac{25}{13} \quad d_2 = \frac{45 + 20}{13} = \frac{65}{13} = 5.$$

Per $d_1 = \frac{25}{13}$, si ottiene la soluzione:

$$\overline{CH} = \overline{BC} - d = 25 - \frac{25}{13} = \frac{300}{13}; \quad CH = \frac{300}{13}m$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} + d = 25 + \frac{25}{13} = \frac{350}{13}; \quad AB = \frac{350}{13}m$$

$$\overline{CD} = \overline{AH} = \frac{3}{4}(25 - d) = \frac{3}{4}\left(25 - \frac{25}{13}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{300}{13} =$$

$$= \frac{225}{13}; \quad CD = \frac{225}{13}m.$$

L'area della superficie del trapezio è:

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \overline{CH} = \frac{1}{2}\left(\frac{350}{13} + \frac{225}{13}\right) \frac{300}{13} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{575}{13} \cdot \frac{300}{13} = \frac{86250}{169}; \quad S_{ABCD} = \frac{86250}{169} m^2.$$

Per $d_2 = 5$, si ottiene:

$$\overline{CH} = \overline{BC} - d = 25 - 5 = 20; \quad CH = 20m$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} + d = 25 + 5 = 30; \quad AB = 30m$$

$$\overline{CD} = \overline{AH} = \frac{3}{4}(25 - d) = \frac{3}{4}20 = 15; \quad CH = 15m$$

L'area della superficie del trapezio è:

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \overline{CH} = \frac{1}{2}(30 + 15)20 = 450 \quad S_{ABCD} = 450 m^2.$$

Progressioni geometriche: ulteriori applicazioni

Osservazioni circa i problemi riguardanti le progressioni geometriche

Le relazioni fondamentali:

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

che legano tra loro i cinque elementi a_1, a_n, n, q, S_n , consentono, come per le progressioni aritmetiche, *se sono noti tre di essi, di calcolare i due rimanenti*.

Possono cioè essere dati:

- 1) a_1, a_n, q ;
- 2) a_1, a_n, n ;
- 3) a_1, a_n, S_n ;
- 4) a_1, q, n ;
- 5) a_1, q, S_n ;
- 6) a_1, n, S_n ;
- 7) a_n, q, n ;
- 8) a_n, q, S_n ;
- 9) a_n, n, S_n ;
- 10) q, n, S_n .

Nel 4° caso le formule citate ci forniscono le incognite del problema, ossia a_n ed S_n .

Nel 7° caso, si ha dalla prima delle formule citate:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}};$$

il valore di S_n si ricava dalla seconda delle formule citate, calcolato che sia a_1 .

Nel 10° caso si ricava a_1 dalla seconda delle formule citate e quindi la prima di queste fornisce senz'altro a_n .

Nel 2° caso il valore di q si ricava dall'equazione binomia:

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1};$$

noto q , la seconda delle formule citate fornisce S_n .

Nel 6° e 9° caso è facile constatare che la determinazione di q dipende dalla risoluzione di una equazione algebrica di grado $n - 1$; perciò, se questa è dei tipi noti, trovato q , si determina subito a_n ovvero a_1 .

Nel 1° caso, la determinazione di n si ha mediante l'equazione esponenziale:

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}.$$

Occorre, naturalmente, che n sia intero e positivo; noto n , la seconda delle formule citate fornisce, senz'altro, S_n .

Nel 3° caso, si ricava q dalla relazione:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^{n-1} \cdot q}{1 - q} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q},$$

da cui si ottiene:

$$q = \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n}.$$

La determinazione di n si ha poi dalla equazione esponenziale:

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}.$$

Nel 5° caso, la determinazione di n si ha dalla relazione:

$$q^n = 1 + \frac{S_n}{a_1} (q - 1),$$

che deducesi dalla seconda delle formule fondamentali. Risolta che sia quest'equazione esponenziale, si ricava immediatamente a_n .

Nell'8° caso, la determinazione di a_1 si ha dalla formula:

$$a_1 = a_n q - S_n (q - 1)$$

che deducesi dalla formula che dà S_n , tenendo conto che:

$$q^n = q^{n-1} \cdot q = \frac{a_n}{a_1} \cdot q,$$

mentre n si determina coll'equazione esponenziale:

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}.$$

Nei problemi sulle progressioni geometriche, di solito, si indicano con x ed y il primo termine e la ragione, a meno che il problema indichi esplicitamente altri due elementi incogniti ed allora saranno questi ad essere denotati con x ed y .

Problemi sulle progressioni geometriche risolti

Determinare tre numeri in progressione geometrica sapendo che la loro somma è 13 e che la differenza tra terzo e primo è 8.

Posto $a_1 = x$ e $q = y$, i tre termini sono x , xy , xy^2 ; traducendo in equazioni i dati del problema, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x + xy + xy^2 = 13 \\ xy^2 - x = 8 \end{cases} \quad \text{da cui, si ha:} \quad \begin{cases} x(1 + y + y^2) = 13 \\ x(y^2 - 1) = 8. \end{cases}$$

Poi, ricavando x dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ottiene l'equazione nella sola incognita y :

$$5y^2 - 8y - 21 = 0,$$

la quale fornisce per y i valori

$$y_1 = -\frac{7}{5}, \quad y_2 = 3;$$

in corrispondenza si hanno per x i valori $x_1 = \frac{25}{3}, \quad x_2 = 1$

sicché il sistema dato ammette le soluzioni:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{25}{3} \\ y_1 = -\frac{7}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

ed in corrispondenza si hanno le due terne di numeri:

$$\frac{25}{3}, -\frac{35}{3}, \frac{49}{3}; \quad 1, 3, 9.$$

Però se il numero dei termini da trovare è dispari, ed è noto il loro prodotto, conviene assumere come incognite il termine medio e la ragione, dimodochè i vari termini della progressione risultano

$$\dots, \frac{x}{y^2}, \frac{x}{y}, x, xy, xy^2, \dots$$

indicando con x il termine medio e con y la ragione.

Se il numero dei termini da trovare è pari ed è noto il loro prodotto, conviene indicare i termini medi con $\frac{x}{y}$ ed xy , essendo y^2 la ragione; dimodochè i vari termini della progressione risultano espressi da:

$$\dots, \frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3, \dots$$

★ *Trovare cinque numeri in progressione geometrica sapendo che la somma dei termini di posto pari è uguale ad a e quella dei termini di posto dispari è b .*

Trovare 5 numeri in progressione geometrica sapendo che la somma dei termini di posto pari è uguale a 10 e quella dei termini di posto dispari è uguale a 21.

Indicando con x il primo termine e con y la ragione, si ha

$$\begin{cases} xy + xy^3 = a \\ x + xy^2 + xy^4 = b \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x(y + y^3) = a \\ x(1 + y^2 + y^4) = b \end{cases}$$

dividendo la prima per la seconda

$$\frac{y + y^3}{1 + y^2 + y^4} = \frac{a}{b}$$

da cui

$$ay^4 - by^3 + ay^2 - by + a = 0$$

che è una equazione reciproca, quindi (n. 52)

$$ay^2 - by + a - \frac{b}{y} + \frac{a}{y^2} = 0 \quad a\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - b\left(y + \frac{1}{y}\right) + a = 0$$

$$\text{e ponendo } y + \frac{1}{y} = t \text{ si ha } at^2 - bt - a = 0 \quad \text{cioè} \quad t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2a}$$

Conoscendo t si hanno i valori di y ed infine di x .

Caso particolare

$$a = 10, \quad b = 21 \quad t = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 400}}{20} = \frac{21 \pm 29}{20} \quad t_1 = \frac{5}{2} \quad t_2 = -\frac{9}{20}$$

Per $t = \frac{5}{2}$ si ha $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ e quindi $y_1 = 2; \quad x_1 = \frac{10}{2 + 2^3} = 1 \quad y_2 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{10}{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3} = 16.$

Per $t = -\frac{9}{20}$ si ha $y + \frac{1}{y} = -\frac{9}{20}$ le radici dell'equazione non sono reali.

Si hanno quindi le due progressioni $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 \quad \div 16 : 8 : 4 : 2 : 1$

Di una progressione geometrica è noto che $a_1 = 3, q = \frac{1}{3}$ ed $S_n = \frac{121}{27}$. Calcolare a_n ed n .

Si associano in sistema le formule che forniscono a_n ed S_n e si sostituiscono alle lettere i valori noti. Si ottiene in tal modo un sistema in due equazioni e due incognite le cui eventuali soluzioni sono quelle del problema dato; si ha:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_n = 3q^{(n-1)} \\ S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \frac{121}{27} = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 3 \\ \frac{242}{81} = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} a_n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{242}{81} = 3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 - \frac{242}{81} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 - \frac{242}{81} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} a_n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{243} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = 9 \frac{1}{243} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{27} \\ n = 5 \end{cases} \end{aligned}$$