Unità Didattica N° 22B: Le serie

Definizione di serie numerica

- Sia data una successione di numeri reali $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots$ **[1]**

Una scrittura del tipo: $\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...}$ esprimente la somma di infiniti termini non ha significato nel senso ordinario di somma.

Possiamo però dargliene uno calcolando le somme parziali:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ **[2]**

....

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

e considerando la successione che così si ottiene: $\mathbf{S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...}$ **[3]**

La successione $\{S_n\}$ di termine generale S_n prende il nome di serie numerica.

- Una serie numerica può essere indicata con una delle due seguenti scritture:

$$\mathbf{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a_n} \qquad \textbf{[4]}$$

L'espressione $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a_n} = \mathbf{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...}$ $[5]$ detta **serie numerica** di **termine generale** a_n, ha un carattere puramente formale in quanto l'operazione di somma non è definita quando il numero di addendi è infinito. Tali scritture simboliche servono però a significare che si vuole ricavare la successione [3]. I numeri $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ si dicono i termini della serie; a_n è il termine generale. Le espressioni $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, ...$ si chiamano le somme parziali o le ridotte della serie $[5]$.

La [3] è la successione delle somme parziali della serie $[5]$. Lo studio di una serie non è altro che lo studio di una successione i cui termini vengono generati da una particolare legge di formazione.

Poiché una serie è una successione, essa può essere convergente, divergente, oscillante (o indeterminata) a seconda che tale sia la successione $\{S_n\}$ delle sue ridotte.

Se la successione $\{S_n\}$ è regolare ed ha limite **S** (finito o infinito) diremo che la serie [5] è regolare ed ha per somma $$\mathbf{S = \lim_{x \to +\infty} S_n} \qquad \textbf{[6]}$$

- Se la successione delle somme parziali converge al limite **S**, è naturale considerare **S** come la somma degli infiniti addendi $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \ldots.$ nell'ordine in cui si presentano.

La serie [5] diverge positivamente o negativamente se diverge positivamente o negativamente la successione $\{S_n\}$. Si scrive: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a_n} = +\infty \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a_n} = -\infty \qquad \textbf{[7]}$$

Qualora una serie risulti convergente, detto **S** il limite della successione [3]: $S = \lim_{x \to +\infty} S_n$ si dirà che **S** è la somma della serie e si potrà scrivere:

$$\mathbf{S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_n + \ldots.. = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} S_n} \qquad \textbf{[8]}$$

Il carattere di una serie esprime la sua proprietà di essere convergente, divergente, indeterminata.

Si dice che due serie hanno lo regolare quando sono entrambe convergenti, divergenti o indeterminate.

I primi teoremi sulle serie numeriche

Torema N°1: Il carattere di una serie non si altera se moltiplichiamo tutti i suoi termini per uno stesso numero non nullo, o se trascuriamo un numero finito di suoi termini.

Torema N°2: Una serie i cui termini , almeno da un certo indice in poi , siano tutti positivi (o tutti negativi) non può essere indeterminata.

Definizione: Dicesi resto ennesimo (o **resto di ordine n**) della serie [5] la serie che si ottiene da essa sopprimendo i primi n termini $$\mathbf{R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots. + a_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+k}} \qquad \textbf{[9]}$$

Torema N°3: **La serie [5] ed ogni suo resto hanno sempre lo stesso carattere, cioè sono entrambe** convergenti**, o** divergenti**, o** indeterminate. Inoltre R_n rappresenta, in valore assoluto, l'errore che si commette quando la somma della serie viene sostituita dalla somma dei suoi primi **n** termini.

Definizione: Dicesi **resto parziale** di indici **n** e **k** della serie [5] la somma di k termini successivi al termine a_n, cioè: $\mathbf{R_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} = S_{n+k} - S_n}$ **[10]**

Definizione: Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **convergente** ed ha per somma **S** se $\forall\ \varepsilon > 0$ è possibile determinare in corrispondenza un indice $n_1(\varepsilon)$ tale che si abbia: $|S_n - S| < \varepsilon$ $\forall\ n > n_1(\varepsilon)$

Definizione: Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **divergente** se scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere) è possibile determinare in corrispondenza un indice $n_1(K)$ tale che si abbia: $|S_n| > K$ $\forall\ n > n_1(K)$

Torema N°4: (Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie o criterio generale di convergenza di Cauchy)

C.N.S. perché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sia **convergente** è che fissato un arbitrario numero positivo $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza un indice $p \in N$, tale che per ogni $n > p$ e qualunque sia il numero naturale k , si abbia:

$$\mathbf{|R_{n,k}| = |S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon} \qquad \forall n > p \ \wedge \ \forall k \in N$$

Torema N°5: (**condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie**)

Condizione necessaria perché una serie sia convergente è che il suo termine generale a_n tenda a zero quando $n \to +\infty$. Se la serie [5] è **convergente** allora deve essere: $\mathbf{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$

Di conseguenza, se risulta $\mathbf{\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0}$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è sicuramente **divergente**.

Se invece risulta $\mathbf{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$ la serie può essere sia **convergente** che **divergente** .

Serie numerica combinazione lineare di altre serie numeriche

Date due serie numeriche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e scelte due costanti $h, k \in R$, definiamo **serie combinazione lineare delle due serie date** la seguente serie: $\mathbf{\sum_{n=1}^{+\infty} (h \cdot a_n + k \cdot b_n)}$

In particolare, per $\mathbf{h=k=1}$ abbiamo la serie somma $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$, per $\mathbf{h=1 \wedge k=-1}$ abbiamo la serie differenza $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-b_n)$, per $\mathbf{k=0}$ abbiamo la serie prodotto per il numero reale $\mathbf{h}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}h\cdot a_n$.

Se le serie $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ sono convergenti ed hanno per somma rispettivamente S_1, S_2 allora la serie combinazione lineare $\sum_{n=1}^{+\infty}(h\cdot a_n+k\cdot b_n)$è convergente e la sua somma $\mathbf{S}$ vale $h\cdot S_1+k\cdot S_2$. La somma o la differenza di due serie convergenti è una serie convergente. Se una serie converge e l'altra diverge, la somma algebrica delle due serie diverge.

Osservazione

- Una serie può essere intesa come quell'algoritmo (procedimento di calcolo) che permette di ottenere la somma di un numero infinito di termini mediante l'associazione dell'operazione aritmetica di addizione a quella di passaggio al limite.
- Studiare una serie significa stabilirne il carattere ed, eventualmente , calcolarne la somma $\mathbf{S}$.
- La somma $\mathbf{S}$ può essere calcolata solo se riusciamo a trasformare la somma dei primi n termini in una espressione algebrica data da una formula matematica. Per le serie telescopiche e per le serie geometriche è sempre possibile calcolare $\mathbf{S}$.
- Per dire che la serie $\sum a_n$ converge scriviamo $\sum a_n < +\infty$ per dire che la serie $\sum a_n$ diverge scriviamo $\sum a_n = +\infty$.

Serie a termini positivi

Si tratta di serie i cui termini sono tutti positivi , almeno a partire da un certo indice in poi . Infatti , se in una serie i termini risultassero positivi soltanto da un certo indice **p** in poi , potremmo ricondurci agevolmente ad una serie a termini tutti positivi considerando la serie resto R_p che , come sappiamo , ha lo stesso carattere della serie data. Le serie i cui termini sono tutti negativi si trattano alla stessa maniera delle serie a termini positivi. Adesso stabiliamo per queste serie a termini positivi dei criteri che ci consentano di stabilire se una serie è convergente o divergente.

Criteri di convergenza e di divergenza per le serie a termini positivi

- Una serie a termini positivi non può essere oscillante, essa o è convergente o è divergente positivamente.

Per le serie a termini positivi valgono particolari criteri di convergenza **o** di **divergenza** che, però, a differenza del criterio di Cauchy, danno solo condizioni sufficienti ma non necessarie.

- Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è maggiorante della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e questa è minorante della prima se risulta: $\mathbf{a_n \geq b_n \quad \forall n \in N}$

In questo caso la somma dei primi n termini della prima serie non è mai minore ($\geq$) della somma dei primi n termini della seconda serie.

Criterio del confronto (di GAUSS)

Siano date due serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e supponiamo che la prima serie sia maggiorante delle seconda serie. Allora:

1) **se la serie maggiorante è convergente risulta pure convergente la serie minorante**

2) **se la serie minorante diverge (positivamente) anche la serie maggiorante diverge positivamente**

Esempio: La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ è convergente in quanto è minorante della serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ che è convergente in quanto la sua ragione $q = \frac{1}{2}$ è minore di uno.

Secondo criterio del confronto (o criterio del confronto asintotico)

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi per le quali risulta: $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ **[11]**

Se risulta:

1) **k = numero reale finito diverso da zero**, le due serie hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti o entrambe divergenti

2) $k=+\infty$ Ricordando la definizione di successione divergente applicata alla successione avente termine generale $\frac{a_n}{b_n}$, possiamo scrivere: $\frac{a_n}{b_n} > K$ (almeno da un certo indice in poi) ed anche:

$\mathbf{a_n > K \cdot b_n}$ Questo significa che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è maggiorante della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e quindi, per il teorema del confronto, possiamo affermare che:

<< se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge. Nulla possiamo dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, o se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

3) $\mathbf{k=0}$ Ricordando la definizione di successione convergente infinitesima applicata alla successione avente termine generale $\frac{a_n}{b_n}$, possiamo scrivere: $\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$ (almeno da un certo indice in poi) ed anche $a_n < \varepsilon \cdot b_n$. Questo significa che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è maggiorante della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e quindi, per il teorema del confronto, possiamo affermare che:

1) se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

2) se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge

3) Nulla possiamo dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge o se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Criterio dell'ordine di infinitesimo

Dal criterio del confronto asintotico possiamo ricavare il seguente notevole criterio dell'ordine di infinitesimo.

Come serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ scegliamo la seguente serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ poiché di essa conosciamo il carattere al variare dell'esponente $\mathbf{p}$. Calcoliamo il seguente limite:

$$\mathbf{k = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{x\to+\infty} n^p \cdot a_n}$$

Se risulta:

1) **k = numero reale finito diverso da zero**, cioè se $k \in]0, +\infty[$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della **serie armonica generalizzata** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se $\mathbf{p > 1}$, diverge se $p \leq 1$.

2) $\mathbf{k = 0}$ In questo caso la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è maggiorata dalla serie armonica generalizzata e se questa converge ($\mathbf{p > 1}$) converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, Nulla possiamo dire sul carattere della serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se la serie armonica generalizzata diverge .

3) $\mathbf{k = +\infty}$ In questo caso la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ maggiora la serie armonica generalizzata e se questa **diverge** ($p \leq 1$) diverge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Nulla possiamo dire sul carattere della serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **se la serie armonica generalizzata** converge.

CONCLUSIONE

1) $\mathbf{k \neq 0}$, $\mathbf{p > 1}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

2) $\mathbf{k \neq 0}$, $\mathbf{p \leq 1}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

3) $\mathbf{k = 0}$, $\mathbf{p > 1}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

4) $\mathbf{k = +\infty}$, $\mathbf{p \leq 1}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

5) $\mathbf{k = 0}$, $\mathbf{p \leq 1}$ il criterio è inefficace

6) $\mathbf{k = +\infty}$, $\mathbf{p > 1}$ il criterio è inefficace

Questo criterio di solito viene utilizzato quando il termine generico a_n della serie è il rapporto di polinomi in n , o il rapporto tra un polinomio in n e qualche espressione irrazionale in n .

Terzo criterio del confronto

Se esistono due costanti positive α e β per le quali risulta : $\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta \quad \forall n > p \in N$ **[13]**

allora le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.

Criterio del rapporto (o di D'Alambert)

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se è possibile determinare un numero reale $\mathbf{0<k<1}$ ed un indice **p** tali che $\forall \mathbf{n > p \in N}$ risulti: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$ **[14]**

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente, se invece risulta $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ la serie è divergente.

Nella pratica non è sempre facile determinare una limitazione del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Per questo motivo è preferibile considerare il limite di tale rapporto quando $n \to +\infty$.

Si ottengono i seguenti risultati :

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge 2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ il criterio è inefficace. Questo significa che il criterio non è adatto a stabilire la convergenza o la divergenza della serie ed è necessario ricorrere ad un altro criterio.

Questo criterio, di solito , si utilizza con efficacia se nel termine generico a_n della serie c'è qualche fattoriale di n o di una sua espressione, o se c'è qualche potenza ennesima di un numero reale dato, cioè una potenza del tipo a^n (2^n oppure 5^n)

Criterio della radice (o di Cauchy)

Se da un certo indice in poi risulta $0 < \sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge , se invece risulta $0 < \sqrt[n]{a_n} \geq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Nella pratica ,non essendo agevole la determinazione di una limitazione per il termine generale $\sqrt[n]{a_n}$, è più conveniente considerare il limite per $n \to +\infty$ di tale radice. Perveniamo ai seguenti risultati:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1 \text{ la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ >1 \text{ la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \\ =1 \text{ il criterio è inefficace} \end{cases}$$

Enunciato: Data la serie a termini positivi Σa_n se esiste il seguente limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ allora:

01) la serie converge se $0 \le k < 1$ 02) la serie diverge se $k > 1$

03) il criterio è inefficace se $k = 1$

N.B. Poiché sappiamo che se esiste il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ esiste ed ha lo stesso valore il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, mentre non è vero il viceversa. Il criterio della radice è di portata più generale di quello del rapporto.

Criterio del confronto con l'integrale (o criterio di Mac Laurin)

Una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ che si possa pensare sotto la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ con $a_n = f(n)$ funzione continua, positiva, decrescente nell'intervallo $[1,+\infty[$ (o più in generale

nell'intervallo $[x_o,+\infty[$) ha lo stesso comportamento dell'integrale generalizzato di prima specie $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ($\int_{x_o}^{+\infty} f(x)dx$),e quindi si ha convergenza o **divergenza** a seconda che sia finito o infinito il seguente limite: $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)dx$ ($\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{x_o}^b f(x)dx$)

Voglio dimostrare applicando il criterio del confronto con l'integrale che la serie armonica semplice $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente.

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione continua, positiva e strettamente decrescente nell'intervallo $[1;+\infty[$.

La serie $\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ ha lo stesso comportamento dell'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{d\,x}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{d\,x}=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{x}d\,x=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln x\right]=+\infty$$

La serie armonica semplice $\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ diverge positivamente.

Studiamo il comportamento della serie armonica generalizzata $\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}^{\alpha}}$ Tale serie ha lo stesso comportamento dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}d\,x=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{x^{\alpha}}d\,x=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1}{-\alpha+1}\right]$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}d\,x=\begin{cases}+\infty \quad se\ -\alpha+1>0 \text{ cioè se } \boldsymbol{\alpha<1}\\ \dfrac{1}{1-\alpha} \quad se\ -\alpha+1<0 \text{ cioè se } \boldsymbol{\alpha>1}\end{cases}$$

La serie armonica generalizzata $\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}^{\alpha}}$ converge (diverge) se $\boldsymbol{\alpha>1}$ ($\boldsymbol{\alpha<1}$).

Per $\boldsymbol{\alpha=1}$ abbiamo la serie armonica semplice $\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ che sappiamo essere divergente positivamente

Concludendo possiamo affermare che la serie armonica generalizzata $\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}^{\alpha}}$ converge (diverge) se $\boldsymbol{\alpha>1}$ ($\boldsymbol{\alpha\leq1}$).

E' bene osservare come non esista alcuna relazione tra il valore dell'integrale generalizzato e la somma della serie.

Esempio: "Determinare il carattere della seguente serie: $\sum_{\mathbf{n=2}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n\cdot\ln n}}=\sum_{\mathbf{n=2}}^{+\infty}\mathbf{a_n}$ "

Calcolo il seguente integrale generalizzato di prima specie:

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln x}d\,x=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{1}{\ln x}d\ln x=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln|\ln x|\right]_2^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln|\ln x|-\ln\ln 2\right]=+\infty$$

La serie proposta diverge.

Criterio della successione decrescente o criterio di Cauchy

Se $\{a_n\}$ è una successione a termini positivi ($a_n > 0 \ \forall n \in N$), monotona decrescente ($a_{n+1} < a_n$), allora le due serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

N.B. Il termine a_{2^n} si ottiene dal termine a_n mediante la sostituzione di n con 2^n.

Esempio: $a_n = \frac{1}{n^5}$ $\quad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^5} = \frac{1}{2^{5n}} = 2^{-5n}$

"**Determinare il carattere della seguente serie**: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ "

Il carattere della serie proposta coincide con quello della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln 2} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$$

Per studiare il carattere di questa serie uso il criterio del confronto asintotico utilizzando la serie armonica semplice $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ che, come sappiamo, è divergente.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n \cdot \ln 2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

La serie proposta **diverge** in quanto ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che è divergente.

Criterio di Kummer

Assegnata la serie a termini positivi $\sum a_n$, se si può determinare una successione di numeri positivi $\{b_n\}$ ed un numero $k \in R^+$ in modo che da un certo indice n_o ($n > n_o$) risulti: $b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq k$ allora la serie $\sum a_n$ è **convergente**. Se invece si può determinare una successione di numeri positivi $\{b_n\}$ in modo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$ sia divergente e che da un certo indice n_o ($n > n_o$) risulti:

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq k$$

allora la serie $\sum a_n$ è divergente.

Criterio di Raabe

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se è possibile determinare un numero reale $k > 1$ ed un indice $n_o \in N$ tale che $\forall n > n_o$ risulti: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq k > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Se è possibile determinare un indice $n_o \in N$ tale che $\forall n > n_o$ risulti: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Poiché risulta difficoltoso dimostrare le disuguaglianze $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq k > 1$, $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ il criterio di Raabe può essere semplificato nella seguente maniera:

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si calcoli il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell$

(a) Se tale limite ℓ esiste ed è $\ell > 1$ la serie converge

(b) Se tale limite ℓ esiste ed è $\ell < 1$ la serie diverge

(c) Se tale limite ℓ esiste ed è $\ell = 1$, oppure non esiste il criterio è inefficace, cioè non si può trarre nessuna conclusione.

Il criterio di Raabe è un caso particolare del criterio di Kummer, quando come successione di numeri positivi $\{b_n\}$ la successione dei numeri naturali $\{n\} = \{1, 2, 3, \cdots, n-1, n \cdots\}$.

"**Studiare il carattere della serie di Mengoli utilizzando il criterio di Raabe.**"

$$\lim_{n\to+\infty} n \left[\frac{\frac{1}{n\cancel{(n+1)}}}{\frac{1}{\cancel{(n+1)}(n+2)}} - 1 \right] = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} (n+2-n) = \lim_{n\to+\infty} 2 = 2 > 1$$

La serie proposta converge.

Studio dettagliato di alcune serie particolarmente importanti

Serie di Mengoli (1650)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Passando al limite otteniamo: $S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

La serie di Mengoli è convergente ed ha somma $S=1$. La serie di Mengoli è una serie telescopica

Serie di Bernoulli $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3|}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]\cdots+\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$$

La serie di Bernoulli è convergente ed ha per somma $S=1$.

Serie armonica

La serie armonica è chiamata cosi perché i suoi termini sono in progressione armonica (cioè i loro inversi formano una progressione aritmetica).

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\ldots$$

La serie armonica è divergente. Il termine generico a_n tende a zero quando $n\to+\infty$, perché

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, però la serie non è convergente.

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^p}+\frac{1}{n^p}+\ldots \qquad p\in R$$

Se $p\le 1$ la serie armonica generalizzata **diverge positivamente**

se $p>1$ la serie armonica generalizzata **converge** .

Serie di Abel o di Bertrand

Studiare la serie numerica $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$ al variare dei parametri $\alpha, \beta \in R$ (Serie di Abel o di Bertrand) Per tale serie valgono le seguenti considerazioni finali:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha>1; \beta \in R \text{ qualsiasi} \\ \text{oppure } \alpha=1;\beta>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la serie converge} \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha<1; \beta \in R \text{ qualsiasi} \\ \text{oppure } \alpha=1;\beta\le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

Dimostrazione utilizzando il confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

Posto $a_n = \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$ e $b_n = \frac{1}{n^p}$ con $p \in R$, confrontiamo la serie proposta $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$ con la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. A tale scopo consideriamo il rapporto $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^p}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n} = \frac{1}{n^{\alpha-p} \cdot \ln^\beta n}$

Tenendo presente come variano le potenze di n e come variano le potenze di $\ln n$, ricordando che $\ln n < n$ possiamo dedurre quanto segue:

01) $\alpha>1$; $1<p<\alpha$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-p} \cdot \ln^\beta n} = 0$ essendo

$$\alpha - p > 0 \ \wedge \ \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-p} \cdot \ln^\beta n = +\infty$$

$a_n < b_n$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n} < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$ è maggiorata dalla serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ che converge per $p>1$. La serie di Abel $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta n}$ converge.

Se risulta $\alpha>1$; $1<p<\alpha$ possiamo scegliere $p = \frac{1+\alpha}{2}$ e come serie armonica generalizzata mediante la quale effettuare il confronto asintotico la serie: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$

02) $\alpha<1$; $\alpha<p<1$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-p} \cdot \ln^\beta n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-(\alpha-p)}}{\ln^\beta n} = +\infty$ essendo $\alpha - p < 0$

La serie di Abel $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}n}$ diverge in quanto maggiora la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{p}}$ che diverge per avere $p<1$.

03) **$\alpha=1\wedge\beta\in R$ qualsiasi** La serie di Abel diventa $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{\beta}n}$ e si comporta come l'integrale generalizzato $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^{\beta}x}\cdot dx=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x\right]_{2}^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x-\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}2\right]$

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^{\beta}x}\cdot dx=\lim_{x\to+\infty}\int_{2}^{x}\frac{1}{\ln^{\beta}x}d\ln x=\lim_{x\to+\infty}\int_{2}^{x}\ln^{-\beta}x\,d\ln x=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x\right]_{2}^{x}$$

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^{\beta}x}\cdot dx==\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x-\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}2\right]=\begin{cases}+\infty\ se\ 1-\beta\geq0\ \text{cioè se}\ \beta\leq1\\ \frac{1}{\beta-1}\cdot\ln^{(1-\beta)}2\ \ se\ 1-\beta<0\ \text{cioè se}\ \beta>1\end{cases}$$

Tale limite è $+\infty$ se $\beta\leq1$; $-\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}2$ se $\beta>1$.

La serie di Abel $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{\beta}n}$ converge se **$\alpha=1\wedge\beta>1$** diverge se **$\alpha=1\wedge\beta\leq1$**

Individuare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^{\frac{3}{2}}$ pongo $x=\frac{\ln n}{n}$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln n}{n}}-1}{\frac{\ln n}{n}}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1\Rightarrow$

$$e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}\quad\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)^{\frac{3}{2}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(e^{\ln n^{\frac{1}{n}}}-1\right)^{\frac{3}{2}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(e^{\frac{\ln n}{n}}-1\right)^{\frac{3}{2}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{3}{2}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(\ln n)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\cdot(\ln n)^{\frac{-3}{2}}}$$

Si tratta di una serie di Abel Bertrand convergente in quanto risulta $\alpha=\frac{3}{2}>1$

Studiare la serie di Abel o serie Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\cdot\ln^{\beta}n}$ $\alpha,\beta\in R$ avvalendosi del criterio di Raabe $\lim_{n\to+\infty}n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ e dell'integrale insieme.

$$n+1=n\left(1+\frac{1}{n}\right)\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\sim1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad\ln(n+1)\sim\ln n$$

$$\mathbf{L} = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{n}\cdot\left(\frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{a_{n+1}}}-\mathbf{1}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\frac{\dfrac{1}{n^\alpha\cdot\ln^\beta n}}{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha\cdot\ln^\beta(n+1)}}-1\right] = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\frac{(n+1)^\alpha\cdot\ln^\beta(n+1)}{n^\alpha\cdot\ln^\beta n}-1\right]$$

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\frac{(n+1)^\alpha\cdot\ln^\beta(n+1)-n^\alpha\cdot\ln^\beta n}{n^\alpha\cdot\ln^\beta n}\right] = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\frac{\cancel{n^\alpha}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha\cdot\cancel{\ln^\beta n}-\cancel{n^\alpha}\cdot\cancel{\ln^\beta n}}{\cancel{n^\alpha}\cdot\cancel{\ln^\beta n}}\right]$$

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right] = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n}-1\right) = \alpha$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha\cdot\ln^\beta n} = \begin{cases}\text{converge se } \alpha>1\ \forall\beta\in\mathbb{R}\\ \text{diverge se } \alpha<1\ \forall\beta\in\mathbb{R}\\ \text{il criterio è inefficace se } \alpha=1\end{cases}$$

$\alpha=1\wedge\beta\in R$ qualsiasi La serie di Abel diventa $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^\beta n}$ e si comporta come l'integrale generalizzato $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^\beta x}\cdot dx = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x\right]_2^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x-\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}2\right]$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^\beta x}\cdot dx = \lim_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{1}{\ln^\beta x}d\ln x = \lim_{x\to+\infty}\int_2^x\ln^{-\beta}x\,d\ln x = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x\right]_2^x$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^\beta x}\cdot dx = = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}x-\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}2\right] = \begin{cases}+\infty\ \ se\ 1-\beta\geq0 \text{ cioè se } \beta\leq1\\ \dfrac{1}{\beta-1}\cdot\ln^{(1-\beta)}2\ \ se\ 1-\beta<0 \text{ cioè se } \beta>1\end{cases}$$

Tale limite è $+\infty$ se $\beta\leq1$; $-\frac{1}{1-\beta}\cdot\ln^{(1-\beta)}2$ se $\beta>1$.

La serie di Abel $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^\beta n}$ converge se $\boldsymbol{\alpha=1\wedge\beta>1}$ diverge se $\boldsymbol{\alpha=1\wedge\beta\leq1}$

Dimostrazione utilizzando il criterio della successione decrescente o criterio di condensazione o criterio di Cauchy $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{2^n\cdot a_{2^n}}$

La serie di Abel o serie Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha\cdot\ln^\beta n}$ $\alpha,\beta\in R$ ha lo stesso carattere della serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{\left(2^n\right)^{\alpha} \cdot \left(\ln 2^n\right)^{\beta}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{2^{\alpha n} \cdot (n \cdot \ln 2)^{\beta}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n(\alpha-1)} n^{\beta} \cdot \ln^{\beta} 2}$$

Studio il carattere di questa serie utilizzando il criterio della radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n(\alpha-1)} n^{\beta} \cdot \ln^{\beta} 2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n(\alpha-1)}} \cdot \sqrt[n]{n^{\beta}} \cdot \sqrt[n]{\ln^{\beta} 2}} = \frac{1}{2^{\frac{n(\alpha-1)}{n}} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\beta} \cdot \ln^{\frac{\beta}{n}} 2} = \frac{1}{2^{\alpha-1} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\beta} \cdot (\ln 2)^{\frac{\beta}{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \lim_{n\to+\infty} (\ln 2)^{\frac{\beta}{n}} = (\ln 2)^{\frac{\beta}{+\infty}} = (\ln 2)^0 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2^{\alpha-1}} = \begin{cases} <1 \text{ se } \alpha-1>0 \quad \text{cioè se } \alpha>1 \quad \text{la serie di Abel converge } \forall\beta\in R \\ >1 \text{ se } \alpha-1<0 \quad \text{cioè se } \alpha<1 \quad \text{la serie di Abel diverge } \forall\beta\in R \\ =1 \text{ se } \alpha-1=0 \quad \text{cioè se } \alpha=1 \quad \text{il criterio è inefficace} \end{cases}$$

$\alpha=1 \wedge \beta\in R$ qualsiasi La serie di Abel diventa $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n}$ e si comporta come l'integrale generalizzato $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\beta} x} \cdot dx = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\beta} \cdot \ln^{(1-\beta)} x\right]_2^x = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\beta} \cdot \ln^{(1-\beta)} x - \frac{1}{1-\beta} \cdot \ln^{(1-\beta)} 2\right]$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\beta} x} \cdot dx = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{\ln^{\beta} x} d\ln x = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \ln^{-\beta} x \, d\ln x = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\beta} \cdot \ln^{(1-\beta)} x\right]_2^x$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^{\beta} x} \cdot dx = = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\beta} \cdot \ln^{(1-\beta)} x - \frac{1}{1-\beta} \cdot \ln^{(1-\beta)} 2\right] = \begin{cases} +\infty \ se \ 1-\beta\geq 0 \text{ cioè se } \beta\leq 1 \\ \frac{1}{\beta-1} \cdot \ln^{(1-\beta)} 2 \ \ se \ 1-\beta<0 \text{ cioè se } \beta>1 \end{cases}$$

Tale limite è $+\infty$ se $\beta\leq 1$; $-\frac{1}{1-\beta} \cdot \ln^{(1-\beta)} 2$ se $\beta>1$.

La serie di Abel $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{\beta} n}$ converge se **$\alpha=1 \wedge \beta>1$** diverge se **$\alpha=1 \wedge \beta\leq 1$**

Studiare la seguente serie numerica $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$ $[A]$ con $\alpha\in R^+$.

La serie $[A]$ • converge se $\alpha>1$ • diverge se $0<\alpha\leq 1$ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha>1 \\ \text{diverge se } \alpha\leq 1 \end{cases}$

La serie proposta è un caso particolare della serie di Abel e si ottiene per $\beta=-1$.

Adesso studieremo il carattere della serie $[A]$ senza fare riferimento alle conclusioni della serie di Abel.

Premessa: La serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ **converge** se $\alpha>1$, **diverge** se $\alpha\le 1$.

- $\ln n<n \quad\Rightarrow\quad \frac{\ln n}{n^\alpha}<\frac{n}{n^\alpha} \quad\Rightarrow\quad \frac{\ln n}{n^\alpha}<\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ è maggiorata dalla serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ che converge se $\alpha-1>1$ cioè se $\alpha>2$ Quindi per $\boldsymbol{\alpha>2}$ la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ **converge**.

- $\ln n>1 \quad \forall n\ge 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\ln n}{n^\alpha}>\frac{n}{n^\alpha}$. La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ maggiora la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ che diverge se $0<\alpha\le 1$. Quindi per $\boldsymbol{0<\alpha\le 1}$ la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ **diverge**.

- Rimane da studiare il comportamento della serie $\boldsymbol{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}}$ per $\boldsymbol{1<\alpha\le 2}$.

La limitazione $1<\alpha\le 2$ ci consente di scrivere il numero reale positivo α nella seguente maniera:

$\boldsymbol{\alpha=1+2\beta}$ dal quale deduciamo: $\boldsymbol{\beta=\frac{\alpha-1}{2}}$ $\qquad N=n^\beta \;\wedge\; \frac{\ln N}{N}<1 \;\Rightarrow\; \frac{\ln n^\beta}{n^\beta}<1$

$$\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{\beta}{\beta}\cdot\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\ln n^\beta}{n^{1+2\beta}}=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{n^{1+\beta}}\cdot\frac{\ln n^\beta}{n^\beta} \quad\wedge\quad \frac{\ln n^\beta}{n^\beta}<1 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\frac{\ln n}{n^\alpha}<\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{n^{1+\beta}}}$$

La serie armonica generalizzata $\frac{1}{\beta}\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\beta}}$ è sicuramente convergente in quanto l'esponente $1+\beta$ è un numero maggiore di 1. Pertanto la serie $\boldsymbol{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}}$ **converge** in quanto è **minorante** di una **serie armonica generalizzata convergente**.

Esempio numerico: $\boldsymbol{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}}$ $\qquad \alpha=\frac{3}{2} \qquad \beta=\frac{1}{4}$

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\ln n}{n^{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\ln n^{\frac{1}{4}}}{n^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{n^{1+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{\ln n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{4}}}=4\cdot\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\cdot\frac{\ln n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{4}}}<4\cdot\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} \quad \text{essendo} \quad \frac{\ln n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{4}}}<1$$

La serie proposta $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge perché è minorante della serie armonica generalizzata $4\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ che converge in quanto risulta $\alpha=\frac{5}{4}>1$.

Per individuare il carattere della serie proposta possiamo utilizzare il criterio dell'integrale.

$$\int\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot dx=-\int\ln x\cdot d\frac{2}{\sqrt{x}}=-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}+2\int\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}dx=-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}+2\int x^{-\frac{3}{2}}dx=-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}+K$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot dx=\lim_{x\to+\infty}\left[\int_2^x\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot dx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right]_2^{+\infty}=\sqrt{2}\cdot\ln 2+2\sqrt{2}-2\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right]$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot dx=\sqrt{2}\cdot\ln 2+2\sqrt{2}-2\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}\right]-2\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{\sqrt{x}}\right]=\sqrt{2}\cdot\ln 2+2\sqrt{2}$$

La serie proposta converge.

Esempio numerico: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\quad\alpha=\frac{1}{2}\quad\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\quad\wedge\quad\ln n>1\quad\forall n\geq 2\quad\Rightarrow\quad\frac{\ln n}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ diverge in quanto maggiora la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ che diverge essendo $\alpha=\frac{1}{2}<1$.

Esempio numerico: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^7}$ $\quad\alpha=7\quad\beta=3\quad\frac{\ln n}{n^7}=\frac{3}{3}\cdot\frac{\ln n}{n^7}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\ln n^3}{n^3}\cdot\frac{1}{n^4}<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^4}$

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^7}$ converge in quanto maggiorata dalla serie armonica generalizzata $\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ che converge essendo $\alpha=4>1$.

Posso studiare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ applicando prima il il criterio della successione decrescente o criterio di condensazione o criterio di Cauchy $\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\cdot a_{2^n}$ e successivamente il criterio del rapporto.

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}2^n\cdot\frac{\ln 2^n}{2^{n\alpha}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n\cdot\ln 2}{2^{(\alpha-1)n}}=\ln 2\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2^{(\alpha-1)n}}$ [B]

Studio il carattere della serie [B] applicando ilo criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2^{(\alpha-1)\cdot(n+1)}}\cdot\frac{2^{(\alpha-1)n}}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2^{\alpha-1}} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{\alpha-1}}=\frac{1}{2^{\alpha-1}}=L$$

$$\mathbf{L}=\begin{cases}\mathbf{<1\ se\ \alpha>1\ \ (La\,serie\ [B]\ converge)}\\ \mathbf{>1\ se\ \alpha<1\ \ (La\,serie\ [B]\ \ diverge)}\end{cases}$$

Per $\alpha=1$ la serie diventa $\ln 2\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}n$ banalmente divergente in quanto risulta $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$; La serie proposta $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ diventa $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$; essa diverge i n quanto maggiora la serie armonica $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ che è una serie divergente. Posso applicare il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n}{2^{(\alpha-1)n}}}=\frac{\sqrt[n]{n}}{2^{(\alpha-1)}} \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2^{(\alpha-1)}}=\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}$$ Come nel caso precedente

Esempio numerico: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^7}$ Il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^7}$ coincide col carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}2^n\cdot a_{2^n}$ che, nel caso particolare, assume la forma:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}2^n\cdot\frac{\ln 2^n}{2^{7n}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n\cdot\ln 2}{2^{7n}}=\ln 2\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2^{6n}} \qquad [C]$$

Per studiare il carattere della serie [C] applico il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2^{6(n+1)}}\cdot\frac{2^{6n}}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2^6} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^6}=\frac{1}{2^6}<1$$

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^7}$ converge.

Criterio di Raabe

$$n+1=n\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha\sim 1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \ln(n+1)\sim\ln n \quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \lim_{n\to+\infty}n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

$$n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\cdot\left[\frac{\ln n}{n^\alpha}\cdot\frac{(n+1)^\alpha}{\ln(n+1)}-1\right]=n\cdot\left[\frac{(n+1)^\alpha\cdot\cancel{\ln n}-n^\alpha\cdot\cancel{\ln n}}{n^\alpha\cdot\cancel{\ln n}}\right]=n\cdot\left[\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^\alpha}\right]$$

$$n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\cdot\left[\frac{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^\alpha-n^\alpha}{n^\alpha}\right]=n\cdot\left[\frac{\cancel{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-\cancel{n^\alpha}}{\cancel{n^\alpha}}\right]=n\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]=n\cdot\left(\cancel{1}+\frac{\alpha}{n}-\cancel{1}\right)=\alpha$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=\begin{cases}\text{la serie converge se } \alpha>1\\ \text{la serie diverge se } \alpha<1\\ \text{il criterio è inefficace se } \alpha=1\end{cases}$$

Per $\alpha=1$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ che diverge per il criterio dell'integrale

$$\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x \qquad \int_2^x\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln^2 2$$

$$\int_2^\infty\frac{\ln x}{x}\,dx=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{\ln x}{x}\,dx=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)=+\infty$$

Criterio del confronto con l'integrale (o criterio di Mac Laurin)

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ si comporta come l'integrale generalizzato $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}dx$. Se $\alpha\neq1$

$$\mathcal{J}=\int\frac{\ln x}{x^\alpha}dx=\int x^{-\alpha}\cdot\ln x\,dx=\frac{1}{1-\alpha}\int\ln x\,d\,x^{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\cdot\ln x-\frac{1}{1-\alpha}\cdot\int x^{1-\alpha}\,d\ln x$$

$$\mathcal{J}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\cdot\ln x-\frac{1}{1-\alpha}\cdot\int x^{-\alpha}\,dx=\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\cdot\ln x-\frac{1}{(1-\alpha)^2}\cdot x^{1-\alpha}+C=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\ln x+\frac{1}{\alpha-1}\right)+C$$

$$\int_2^x\frac{\ln x}{x^\alpha}dx=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\ln x+\frac{1}{\alpha-1}\right)+2^{1-\alpha}\cdot\left[\frac{(1-\alpha)\cdot\ln 2+1}{(1-\alpha)^2}\right]$$

$$\int_2^\infty\frac{\ln x}{x^\alpha}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_2^x\frac{\ln x}{x^\alpha}dx=\begin{cases}+\infty \text{ se } 1-\alpha>0 \text{ cioè se } \alpha<1 \text{ la serie } \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} \text{ diverge}\\ 2^{1-\alpha}\cdot\left[\frac{(1-\alpha)\cdot\ln 2+1}{(1-\alpha)^2}\right] \text{ se } 1-\alpha<0 \text{ cioè se } \alpha>1 \text{ la serie } \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} \text{ converge}\end{cases}$$

$\alpha=1$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ che diverge in quanto presenta lo stesso comportamento dell'integrale generalizzato $\int_2^\infty\frac{\ln x}{x}dx=+\infty$.

Ne segue che
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=\begin{cases}\text{la serie converge se } \alpha>1\\ \text{la serie diverge positivamente se } \alpha\leq1\end{cases}$$

Serie telescopiche

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **telescopica** quando il suo termine generale a_n può essere scritto come differenza $b_n - b_{n+k}$ di due termini di una medesima successione $\{b_n\}$, calcolati per due valori diversi dell'indice.

Quindi per serie telescopica intendiamo qualsiasi serie che può essere ricondotta alla seguente forma: $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbf{b_n} - \mathbf{b_{n+k}}) \qquad \forall\, k \in N$$

Calcoliamo il valore di S_n.

$$S_n = (b_0 - b_{0+k}) + (b_1 - b_{1+k}) + (b_2 - b_{2+k}) + \cdots + (b_n - b_{n+k}) = (b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{k-1}) - (b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{n+k})$$

La serie telescopica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente (divergente) se è convergente (divergente) la successione $\{b_n\}$

La somma **S** di una serie telescopica convergente vale: $\mathbf{S = b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{k-1}}$

La somma **S** della serie telescopica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è uguale alla somma dei primi k termini della successione $\{b_n\}$.

caso particolare: $\mathbf{k = 3}$ $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbf{b_n} - \mathbf{b_{n+3}})$$

$$S_n = (b_0 - b_3) + (b_1 - b_4) + (b_2 - b_5) + (b_3 - b_6) + (b_4 - b_7) + (b_5 - b_8) + ... +$$
$$+ (b_{n-4} - b_{n-1}) + (b_{n-3} - b_n) + (b_{n-2} - b_{n+1}) + (b_{n-1} - b_{n+2}) + (b_n - b_{n+3}) =$$
$$= (b_0 + b_1 + b_2) - (b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3})$$

Se abbiamo: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+k})$ allora:

$$\mathbf{S_n = (b_1 + b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{k-1}) - (b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{n+k})}$$

Se abbiamo: $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n = \sum_{n=3}^{+\infty} (b_n - b_{n+k})$ allora:

$$\mathbf{S_n = (b_3 + b_4 + b_5 + ... + b_{k+3}) - (b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{n+k})}$$

caso particolare: $\mathbf{k=1}$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$

$$S_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

Esempio numerico: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+2})$

$$b_n = \frac{1}{n},\quad b_{n+2} = \frac{1}{n+2},\quad k = 2,\quad b_1 = \frac{1}{1} = 1,\quad b_2 = \frac{1}{2},\quad b_{n+1} = \frac{1}{n+1},\quad b_{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(b_1 + b_2 - b_{n+1} - b_{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right),\quad S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

oppure: $\quad S = \frac{1}{2}\left(b_1 - b_2 - 2\cdot\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{4}$

Serie geometriche

Si chiama serie geometrica una serie i cui termini formano una **progressione geometrica**, cioè tali che ognuno di essi si possa ottenere moltiplicando il precedente per uno stesso numero non nullo $\mathbf{q}$, detto ragione della serie geometrica.

Detti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{q}$, rispettivamente, il primo termine e la ragione della serie geometrica abbiamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a\cdot q^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^n + \ldots\ldots \qquad a, q \in R - \{0\}$$

La somma parziale ennesima data da:

$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n = a\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (i termini della serie sono $n+1$) $\quad S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\cdot a$

Perveniamo alle seguenti conclusioni:

1) Se $\mathbf{-1 < q < 1}$ la serie geometrica risulta convergente ed ha come somma $\quad S = \frac{a}{1-q}$

Infatti: $\quad \lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$

2) Se $\mathbf{q \geq 1}$ la serie geometrica diverge positivamente se $\mathbf{a > 0}$, negativamente se $\mathbf{a < 0}$. Infatti: se $q > 1$ abbiamo: $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$ e quindi la serie diverge positivamente se $a > 0$, negativamente se $a < 0$.

Se $\mathbf{q=1}$ la serie geometrica assume la forma: $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a + a + a + \cdots + a + \cdots$

In questo caso risulta: $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$

e quindi la serie geometrica è divergente.

3) Se $q \leq -1$ la serie geometrica è indeterminata. Infatti non esiste il seguente limite $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}$ e quindi non esiste neanche: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} a$ e si conclude che la serie geometrica risulta indeterminata.

Qualche raro autore fa, nell'ipotesi $q < -1$, il seguente ragionamento. $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \infty$

Ricordando che q^{n+1} assume valori positivi (negativi) quando n è pari (dispari), e di conseguenza i termini della successione $\{S_n\}$ diventano, in valore assoluto, sempre più grandi ma assumono segni alternativamente positivi e negativi. Si dice, in questo caso, che la serie diverge oscillando. Invece, per $q=-1$ S_n vale 1 per n pari, 0 per n dispari. La serie geometrica, in questo caso, è indeterminata.

- Per $a=1$ la serie geometrica assume la forma: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \times\times\times\times + q^n + \cdots$

Le conclusioni sono identiche a quelle dedotte precedentemente. In caso di convergenza la somma S vale: $\qquad S = \frac{1}{1-q} \qquad a_1 = 1$

- Somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1 \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad \text{se} \quad q > 1 \quad S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1 \quad \text{se} \quad q < 1$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots$ $\quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ $\quad$ I termini da sommare sono n

- Somma dei termini di una progressione geometrica illimitata

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \qquad \text{se} \quad |q| < 1 \quad \text{cioè se:} \quad -1 < q < 1$$

Per una serie geometrica del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} a \cdot q^n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^n + \ldots\ldots$ abbiamo:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1 = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1 \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad a_1 = a \cdot q \qquad S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{aq}{1-q}$$

$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n + \ldots\ldots \qquad a_1 = q \qquad S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{q}{1-q}$$

$a_1 = q \quad -1 < q < 1$

Serie a termini di segno alternato

Se $\{a_n\}$ è una successione a termini positivi, allora la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot a_n + \cdots \qquad [20]$$

è detta serie a termini di segno alternativamente positivo e negativo o serie a segni alterni o serie di segno alterno o serie alternata o serie a termini alternativamente positivi e negativi.

Criterio di Leibniz

Se la successione $\{a_n\}$ a **termini positivi** è **decrescente** $(a_{n+1} < a_n)$ ed infinitesima ($\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$),allora la serie a segni alterni [20] è convergente e sussiste la seguente formula di maggiorazione del resto: $|R_n| \le a_{n+1}$ **[21]**

Serie assolutamente convergenti ed assolutamente divergenti

Consideriamo la serie a termini reali e di segno qualsiasi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad [22]$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$ **[23]**

Si dice serie dei moduli associata alla serie [22]. Tale serie **non può essere indeterminata** in quanto i suoi termini sono non negativi.

Definizione: Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se risulta convergente la serie dei valori assoluti dei suoi termini $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$.

Teorema: Una serie assolutamente convergente è convergente. Il teorema inverso non è valido, in quanto una serie può essere convergente senza essere assolutamente convergente. **convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza semplice**

Definizione: Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **semplicemente convergente** quando risulta convergente ma non è assolutamente convergente. Essa è detta anche **condizionatamente convergente** o **semiconvergente**.

Teorema N°6: Una serie **assolutamente convergente** è **convergente**, ma non è detto che una **serie convergente** sia anche **assolutamente convergente**, in quanto una serie può essere **convergente** senza essere **assolutamente convergente**.

$$\textbf{convergenza semplice} \not\Rightarrow \textbf{convergenza assoluta}$$

Osservazione: I criteri esposti per le serie numeriche a termini positivi sono altrettanti criteri di convergenza assoluta se applicati alla serie dei moduli $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

Teorema N°7: In generale una serie non gode della proprietà commutativa, cioè mutando l'ordine dei termini di una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini di segno qualsivoglia è possibile che muti il suo carattere e , se è convergente , che ne vari la somma **S**.

Definizione: Una serie si dice **assolutamente divergente** se è **divergente** e se si verifica una delle seguenti condizioni:

1) ha tutti i termini di segno costante

2) ha un numero finito di termini positivi o negativi (e, ovviamente, un numero infinito di termini rispettivamente negativi o positivi)

3) ha un numero infinito sia di termini positivi sia di termini negativi, ma delle due serie formate con i soli termini positivi o con i soli termini negativi una risulti divergente e l'altra convergente.

Teorema N°8 Una serie **assolutamente convergente** o **assolutamente divergente** (e quindi in particolare una serie a termini positivi) gode della **proprietà commutativa**.

Definizione: Una serie si dice incondizionatamente convergente se è convergente e se gode della proprietà commutativa.

Per le serie incondizionatamente convergenti è valido il seguente teorema di Dirichlet:
C.N.S. perché una serie risulti incondizionatamente convergente è che risulti assolutamente convergente (questo comporta che la somma della serie non cambia comunque si muti l'ordine dei suoi termini).

Teorema di Riemann-Dini: Una serie con infiniti termini positivi ed infiniti termini negativi, avente il termine generico a_n che tende a 0 per $n \to +\infty$, ma che non sia assolutamente convergente (in particolare una serie semplicemente convergente) è tale che, permutando opportunamente i suoi termini, può dare:

- una serie divergente positivamente o negativamente
- una serie convergente ad una somma prefissata
- una serie indeterminata avente limite massimo r limite minimo, finiti o infiniti, arbitrariamente prestabiliti.

Si vede, quindi, che è ben diverso il comportamento di una serie a seconda che questa sia assolutamente o semplicemente convergente.

Osservazione:

(a) Una serie, la cui serie dei moduli è **convergente**, è **convergente** e viene detta **assolutamente convergente**.

(b) Una serie convergente, la cui serie dei moduli è divergente, viene detta **semiconvergente** o **semplicemente convergente** o **condizionatamente convergente**.

(c) Una serie assolutamente convergente è convergente, ma non è detto che una serie convergente sia anche assolutamente convergente.

Criterio di Kummer

Siano date una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ed una successione $\{b_n\}_{n\in N}$ di numeri positivi. Si calcoli il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty}\left(b_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\right)=\lambda$

- Se $\lambda>0$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
- Se $\lambda<0$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge positivamente, allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente.
- Se $\lambda=0$ allora il criterio di Kummer è inefficace

Il criterio di Kummer non è di facile applicazione in quanto è difficile individuare la successione $\{b_n\}_{n\in N}$ di numeri positivi. La sua importanza consiste nel fatto che da esso si possono dedurre altri criteri. Ad esempio, ponendo $b_n=n$ si ottiene il criterio di Raabe.

Osservazione: ***A quale tipo di serie possiamo applicare questo criterio***?
Praticamente a tutte le serie positive che troviamo in un corso di analisi 1, purché si scelga opportunamente la successione $\{b_n\}_{n\in N}$. Se nella serie compaiono fattoriali prenderemo come successione di confronto $b_n=1$, se invece compaiono potenze può essere utile prendere $b_n=n$, se compaiono logaritmi una buona scelta può essere $b_n=n\cdot\ln n$.

Applichiamo il criterio di Kummer alla seguente serie: $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$

Come successione di confronto scegliamo la successione avente come termine generale $b_n=n\cdot\ln n$ e calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(b_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\ln n\cdot\frac{\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}}{\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}}-(n+1)\cdot\ln(n+1)\right)$$

Semplificando otteniamo: $\lambda=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot\ln(n+1)\left[\ln(n+1)-\ln n\right]}{\ln n}=1>0$

$$\lambda=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=1\cdot\lim_{n\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$\lambda=\ln e+\ln 1=1+0=1$ La serie proposta converge.

Criterio di Raabe

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Si calcoli il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda$

- Se $\lambda>1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge
- Se $\lambda<1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente
- Se $\lambda=1$ nulla possiamo dire sul carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Questo criterio riesce sovente utile quando $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, cioè quando il criterio del rapporto non è applicabile.

Determinare il carattere della serie: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}$

Applicando il criterio del rapporto otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+3)(n+5)}}{\frac{1}{(n+2)(n+4)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)(n+4)}{(n+3)(n+5)}=1$$ Il criterio è inefficace.

Applichiamo il criterio di Raabe

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\frac{(n+3)(n+5)}{(n+2)(n+4)}-1\right]=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{2n+7}{(n+2)(n+4)}=2>1$$

La serie proposta converge. Avremmo ottenuto lo stesso risultato se avessimo confrontato la serie proposta con la serie armonica generalizzata convergente $\sum\frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}\qquad \lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left[\frac{(n+1)^2-(n+1)}{n^2\ -\ n}-1\right]=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{2n^2}{n^2-n}=2>1$$

La serie proposta converge. Avremmo ottenuto lo stesso risultato se avessimo confrontato la serie proposta con la serie armonica generalizzata convergente $\sum\frac{1}{n^2}$.

Utilizzando il criterio di Raabe studiare la convergenza della serie armonica generalizzata: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left[\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1 \right] = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha - 1 \right] = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right]$$

$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = t \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha \quad \text{Ho posto: } \frac{1}{n} = t \quad n \to \infty \Leftrightarrow t \to 0$$

$\boldsymbol{\lambda = \alpha > 1}$ la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge

$\boldsymbol{\lambda = \alpha < 1}$ la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

$\boldsymbol{\lambda = \alpha = 1}$ il criterio di Raabe è inefficace, ma per $\boldsymbol{\lambda = \alpha = 1}$ la serie armonica generalizzata diventa la serie armonica semplice $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge.

Conclusione: La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\boldsymbol{\lambda = \alpha < 1}$, diverge se $\boldsymbol{\lambda = \alpha \le 1}$

Criterio di condensazione o criterio della successione decrescente o criterio di Cauchy

Se $\{a_n\}$ è una successione a termini positivi ($a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$), strettamente decrescente ($a_{n+1} < a_n$) allora le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \textbf{converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \ \textbf{converge}$$

Quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$.

a_{2^n} significa che nell'espressione di a_n al posto di n debbo porre 2^n .

$$a_n = \frac{1}{n^5} \quad \Rightarrow \quad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^5} = \frac{1}{2^{5n}} = 2^{-5n}$$

Studio delle serie numerico: considerazioni di carattere pratico

Si è visto che lo studio di una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_n + ...$ è ricondotto a quello delle successioni delle sue ridotte e quindi al limite per $n \to +\infty$ di:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Ma la determinazione analitica di S_n è possibile solo in determinate e limitate situazioni. Illustriamo sinteticamente i casi nei quali è possibile determinare S_n o determinare il carattere della serie.

(1) La serie numerica è **telescopica**. In questo caso il termine generico della serie a_n è esprimibile mediante la differenza di due termini di una medesima successione $\{b_n\}$, cioè:

$$\boxed{a_n = b_n - b_{n+k}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbf{b_n} - \mathbf{b_{n+k}}) \Rightarrow$$

$$S_n = (b_0 - b_{0+k}) + (b_1 - b_{1+k}) + (b_2 - b_{2+k}) + \cdots + (b_n - b_{n+k}) = (b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{k-1}) - (b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{n+k})$$

$$\mathbf{S = b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{k-1}}$$

Casi particolari:

$$\boxed{k=1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) \qquad S_n = b_0 - b_{n+1} \qquad S = b_0 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = 0$$

$$\boxed{k=2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+2}) \qquad S_n = (b_0 + b_1) - (b_{n+1} + b_{n+2}) \qquad S = b_0 + b_1 \qquad \lim_{n\to+\infty} (b_{n+1} + b_{n+2}) = 0$$

$$\mathbf{k=3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{b_n} - \mathbf{b_{n+3}}) \qquad S_n = (b_0 + b_1 + b_2) - (b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}) \qquad S = b_0 + b_1 + b_2$$

$$\boxed{k=4} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+4}) \qquad S_n = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3) - (b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + b_{n+4})$$

$$S = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \qquad \lim_{n\to+\infty} (b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + b_{n+4}) = 0$$

(2) La serie numerica è **geometrica**. In questo caso è possibile determinare S_n

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a \cdot q^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^n + ...} \qquad a, q \in R - \{0\} \qquad \mathbf{S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \cdot a}$$

La serie geometrica converge se $\mathbf{-1 < q < 1}$ e la sua somma vale: $\mathbf{S = \dfrac{a}{1-q}}$

Per $\mathbf{a=1}$ abbiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1+q+q^2+q^3+q^4+\times\times\times\times+q^n+\cdots$ $\quad S = \dfrac{1}{1-q}$ $\quad a_1=1$

Spesso il carattere di una serie viene individuato mediante il confronto con una serie geometrica opportunamente scelta.

(3) Qualche volta è possibile identificare S_n con il polinomio di Taylor o di Mac Laurin relativo ad una data funzione. Ad esempio, volendo calcolare la somma S della seguente serie:

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots\cdots$$

Basta osservare che la serie data è il valore, per $x=1$, di: $S(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}+\cdots$

Che, a sua volta, è lo sviluppo in serie di Mac Laurin della funzione $f(x)=\ln(1+x)$

Ne deriva che: $S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\ln(1+1)=\ln 2$. La serie considerata è la serie armonica a segni alterni che converge, mentre la serie armonica diverge.

(4) Se $a_n = f(n)$ è una funzione **continua**, **positiva**, **decrescente** nell'intervallo $[1,+\infty[$ (o più in generale nell'intervallo $[x_o,+\infty[$) allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso comportamento dell'integrale generalizzato di prima specie $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ($\int_{x_o}^{+\infty} f(x)dx$), e quindi si ha **convergenza** o **divergenza** a seconda che sia finito o infinito il seguente limite:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx \qquad \left(\lim_{b\to+\infty}\int_{x_o}^b f(x)dx\right)$$

(5) Quando non è possibile determinare l'espressione analitica di S_n allora si ricorre ai criteri di convergenza, che però sono solo criteri sufficienti per la convergenza. Questo significa che se sono valide le ipotesi espresse da ciascun criterio, allora il comportamento della serie è precisato (cioè la serie o converge o diverge), mentre se qualcuna delle ipotesi non è verificata nulla può dirsi sul carattere della serie in studio. Si dice, in questo caso, che il criterio applicato è inefficace.

Adesso analizziamo singolarmente questi criteri.

(6) Condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica, cioè criterio del termine ennesimo per la divergenza applicabile a tutte le serie.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+2n+5}{2n^2+3n+12}$ diverge in quanto risulta $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+5}{2n^2+3n+12}=\frac{1}{2}\neq 0$

(7) Criterio del confronto per la convergenza (divergenza) applicabile alle serie a termini non negativi. Particolarmente utile risulta il confronto con la serie armonica generalizzata o con una serie geometrica opportunamente scelta.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n^2\cdot 4^n}$ $\quad a_n=\frac{3^n}{n^2\cdot 4^n}=\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n<\left(\frac{3}{4}\right)^n$ la serie proposta $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n^2\cdot 4^n}$ converge in quanto maggiorata dalla serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ che converge poiché la sua ragione è $q=\frac{3}{4}<1$

(8) Criterio del rapporto applicabile alle serie a termini positivi. Questo criterio è sicuramente efficace se nel termine generale a_n della serie figura qualche fattoriale di n o di una sua espressione o se c'è una potenza con base un numero dato ed esponente n o una sua funzione.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n^4}\qquad a_n=\frac{e^n}{n^4}\qquad a_{n+1}=\frac{e^{n+1}}{(n+1)^4}\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^4}}{\frac{e^n}{n^4}}=\frac{e^{n+1}}{(n+1)^4}\cdot\frac{n}{e^n}=e\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\qquad \lim_{n\to+\infty}e\left(\frac{n}{n+1}\right)^4=e>1$$

La serie proposta diverge positivamente

(9) Criterio della radice applicabile alle serie a termini positivi. Di solito viene applicato quando il termine generale a_n della serie contiene fattori che sono potenze con esponente n o una sua funzione.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\qquad a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\qquad \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}=\frac{1}{e}<1$ La serie proposta converge

(10) Criterio del confronto asintotico, che prende il nome di **criterio degli infinitesimi** se la serie con la quale si effettua il confronto è la serie armonica generalizzata. Quest'ultimo criterio è particolarmente utile quando il termine generale a_n della serie i presenta come rapporto tra polinomi di n o tra espressioni razionali o irrazionali di n.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{arctg\, n}}{\mathbf{n^2}} = \sum \mathbf{a_n}$ effettuo il confronto asintotico con la serie armonica generalizzata

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum b_n$ che converge $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{arctg\, n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} arctg\, n = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

La serie proposta converge

(11) Criterio del confronto con un integrale, applicabile alle serie a termini positivi e decrescenti.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\cdot \ln x} d\, x = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{\ln x} \mathrm{d} \ln x = \lim_{x\to+\infty} [\ln \ln x]_2^x = -\ln \ln 2 + \lim_{x\to+\infty} (\ln \ln x) = +\infty$$

La serie proposta diverge

(12) Criterio della successione decrescente, applicabile alle serie a termini positivi e decrescenti. Spesso questo criterio sostituisce quello del confronto con un integrale del quale può essere considerato una versione elementare, se, ad esempio, non conosciamo ancora il calcolo degli integrali semplici o generalizzati.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \sum a_n \qquad a_n = \frac{\ln n}{n^2} \qquad a_{2^n} = \frac{\ln 2^n}{(2^n)^2} = \frac{n\cdot \ln 2}{2^n \cdot 2^n}$ Il carattere della serie proposta coincide col carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum b_n \qquad b_n = 2^n \cdot a_{2^n} = \cancel{2^n} \cdot \frac{n\cdot \ln 2}{\cancel{2^n} \cdot 2^n} = \frac{n\cdot \ln 2}{2^n}$

$$b_{n+1} = \frac{(n+1)\cdot \ln 2}{2^{(n+1)}} = \frac{(n+1)\cdot \ln 2}{2\cdot 2^n} \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)\cdot \ln 2}{2\cdot 2^n}}{\frac{n\cdot \ln 2}{2^n}} = \frac{(n+1)\cdot \ln 2}{2\cdot 2^n} \cdot \frac{2^n}{n\cdot \ln 2} = \frac{n+1}{2n}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$ la serie proposta converge

(13) Criterio di Kummer, applicabile alle serie a termini positivi

(14) Criterio di Raabe, applicabile alle serie a termini positivi

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a_n}$ una serie a termini positivi. Si calcoli il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{a_{n+1}}} - 1 \right) = \lambda$

- Se $\lambda > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{a_n}$ converge

- Se $\lambda < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente

- Se $\lambda = 1$ nulla possiamo dire sul carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$ Applichiamo il criterio di Raabe calcolando il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{(n+3)(n+5)}{(n+2)(n+4)}-1\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n+7)}{(n+2)(n+4)}=2>1$$

La serie proposta converge. Avremmo ottenuto lo stesso risultato confrontando la serie data con la serie armonica generalizzata convergente $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Questi criteri possono essere applicati per risolvere problemi di convergenza o divergenza di serie a termini negativi (o non positivi). Basta mettere in evidenza il fattore -1 nella serie in questione e verificare se la risultante serie a termini positivi (o non negativi) è convergente o divergente.

(15) Criterio di Leibnitz, applicabile alle serie a segni alterni

$$\sum_{n01}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}=\sum_{n01}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n!}+\cdots$$

Considero la successione a termini positivi $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ risulta:

- $a_n=\frac{1}{n!}>0\ \forall n\in N$
- $a_{n+1}<a_n\quad \forall n\in N$ Infatti: $\frac{1}{(n+1)!}<\frac{1}{n!}\quad\forall n\in N$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$ La serie proposta converge per il criterio di Leibniz

(16) Come si fa, in concreto, a stabilire se una serie a termini positivi è convergente o divergente?
Si comincia col calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty} a_n=k$ Se risulta $k=0$ la serie può essere sia convergente che divergente. Se risulta $k\neq 0$ la serie è sicuramente divergente.

Poi, in base alla natura del termine generale a_n si applica uno dei criteri studiati.

Ulteriori considerazioni di carattere pratico

- Risulta sempre: $\ln n < n$ $\frac{\ln n}{n} < 1$ $|\sin\varphi(n)| \le 1$ $|\cos\varphi(n)| \le 1$

- Il termine generale a_n della serie proposta contiene $\ln n$ o sue potenze o combinazioni lineari di sue potenze. Si applica il **criterio della successione decrescente di Cauchy** e poi il criterio del rapporto

- $$a_n = \frac{N_1+N_2}{D_1+D_2} > \frac{N_1}{D_1+D_2} = b_n \qquad a_n = \frac{N_1+N_2}{D_1+D_2} < \frac{N_1+N_2}{D_1} = b_n$$

Eliminare un termine positivo nel numeratore (denominatore) di una frazione significa diminuire (aumentare) il valore della frazione

- Sostituire un addendo del numeratore di una frazione con un numero più grande (piccolo) significa aumentare (diminuire) il valore della frazione.

- Sostituire un addendo del denominatore di una frazione con un numero più grande (piccolo) significa diminuire (aumentare) il valore della frazione.

- Una frazione aumenta (diminuisce) il suo valore se sostituiamo un addendo del denominatore col suo valore massimo (minimo).

$$\frac{A+B}{D} \le \frac{A+\max(B)}{D} \qquad \frac{A+B}{D} \ge \frac{A+\min(B)}{D} \qquad \frac{A+B}{C+D} \le \frac{A+\max(B)}{C+\min(D)} \qquad \frac{A+B}{C+D} \ge \frac{A+\min(B)}{C+\max(D)}$$

$$\frac{A}{D+C} < \frac{A}{D} \qquad \frac{A+B}{D} > \frac{A}{D} \qquad \frac{A}{C+D} \le \frac{A}{C+\min(D)} \qquad \frac{A}{C+D} \ge \frac{A}{C+\max(D)}$$

$$\frac{n\cdot\ln n}{5n^2+3n|\cos n|} \le \frac{n\cdot\ln n}{5n^2+3n}$$