

Unità Didattica N°23

La definizione di limite

- 1) Variabile che tende ad un numero, variabile infinitesima
- 2) Definizione di limite finito per una funzione in un punto $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$
- 3) Limite destro e limite sinistro
- 4) Variabile infinitamente grande
- 5) Definizione di limite infinito per una funzione in un punto $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
- 6) Un limite fondamentale: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$
- 7) Definizione di limite finito per una funzione all'infinito: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$
- 8) Un altro limite fondamentale: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
- 9) Definizione di limite infinito per una funzione all'infinito: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Variabile che tende ad un numero, variabile infinitesima

Quando la variabile x tende al numero x_0 scriviamo $x \rightarrow x_0$. Adesso vogliamo precisare il significato matematico di questa scrittura. Diciamo che **la variabile x tende al numero x_0** e scriviamo $x \rightarrow x_0$ quando scelto un numero positivo ε in maniera arbitraria e come tale piccolo a piacere, risulta: $|x - x_0| < \varepsilon$ cioè $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. In simboli abbiamo:

$$x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \quad \varepsilon > 0$$

Se $x_0 = 0$, allora diciamo che la variabile x è **infinitesima** o che tende al valore zero. Questo significa che, scelto in maniera arbitraria un numero positivo ε , deve risultare: $|x| < \varepsilon$. Pertanto, dire che x è una **variabile infinitesima** significa affermare che essa, in valore assoluto, può assumere valori minori di un numero positivo scelto piccolo a piacere.

Una **variabile infinitesima** si dice che tende a zero e si scrive: $x \rightarrow 0$

$$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Definizione di limite finito per una funzione in un punto

Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$, escluso al più in un suo punto di accumulazione x_0 . Col simbolo $\mathcal{J} - \{x_0\}$ indichiamo l'insieme differenza che si ottiene togliendo dall'insieme \mathcal{J} il suo elemento x_0 .

Definizione: Si dice che la funzione $f(x)$ tende (o converge) al numero ℓ per $x \rightarrow x_0$ e si scrive:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se, scelto un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere) è possibile

determinare in corrispondenza un intorno completo $\mathcal{J}(x_0)$ del punto x_0 , tale che si abbia:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_0) - \{x_0\}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{J}(x_0) : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_0) - \{x_0\}$$

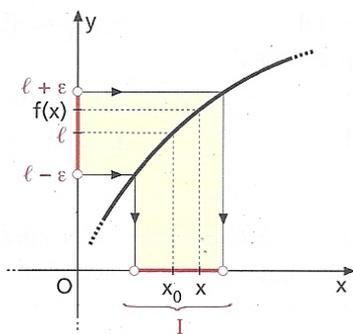
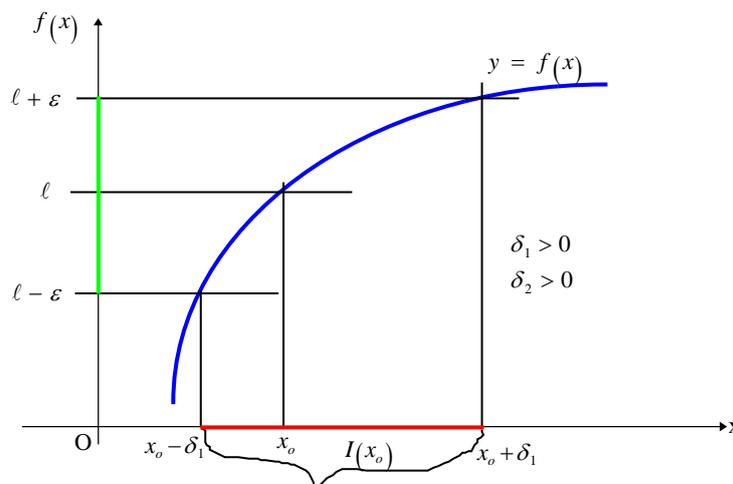
$$\mathcal{J}(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[\quad \text{con} \quad \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

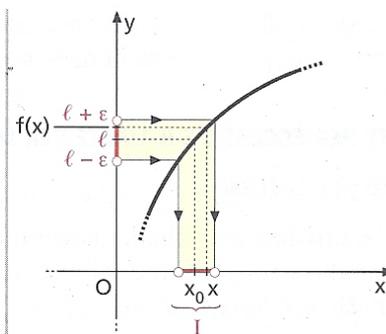
$$\forall \varepsilon > 0$$

$$I(x_0) \text{ — } \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \text{ — } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

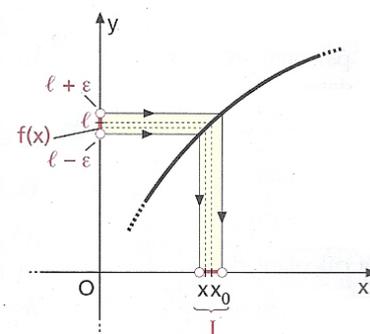
L'esistenza del limite della funzione $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$ è illustrata graficamente dalla seguente figura.



a. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ per ogni $x \in I$.



b. Se riduciamo ε , potremmo essere costretti a scegliere un intorno di x_0 più piccolo.



c. Più piccolo scegliamo ε , più piccolo diventa, in genere, l'intorno I .

Per verificare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ si procede come segue:

- 1) Si sceglie un numero ε positivo ed arbitrario
- 2) Si risolve l'inequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
- 3) Se, tra le soluzioni dell'inequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ esiste un intorno completo $\mathcal{J}(x_0)$ del punto x_0 , allora il limite è verificato, in caso contrario il limite non è verificato e la scrittura

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ è falsa.

Verificare che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} - 3 \right| < \varepsilon \quad \left| \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{(x - 2)} - 3 \right| < \varepsilon \quad |x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon, \quad 4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon, \quad \sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon} \quad I(2) =]\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}[$$

Conclusione: $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} - 3 \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I(2) - \{2\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2} = 3$

Osservazione

- In generale, al diminuire di ε diminuisce l'ampiezza ρ dell'intervallo $I(2)$.

$$\rho = (x_o + \delta_2) - (x_o - \delta_1) = \delta_1 + \delta_2$$

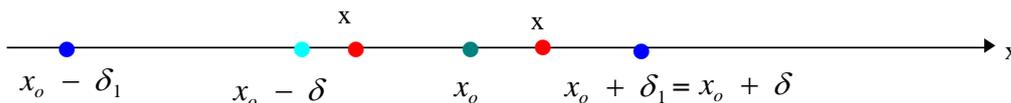
con δ_1 e δ_2 (e quindi δ e ρ) funzioni di ε . In generale risulta: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta_1 + \delta_2) = 0$

- Nella definizione di limite non è restrittivo sostituire l'intorno completo $\mathcal{J}(x_o)$ con un **intorno simmetrico** (o **circolare**) del punto x_o .

Infatti l'intorno $I(x_o) =]x_o - \delta_1; x_o + \delta_2[$ può essere sostituito con l'**intorno circolare**

$I(x_o, \delta) =]x_o - \delta; x_o + \delta[$ dove δ è il **più piccolo** dei due numeri positivi δ_1, δ_2 .

$$\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall 0 < |x - x_o| < \delta \text{ et } x \neq x_o$$



$$0 < |x - x_o| < \delta \Leftrightarrow x \in]x_o - \delta, x_o + \delta[$$

- La funzione $f(x)$ può non essere definita nel punto x_o ed esistere il $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = \ell$, come può esistere $f(x_o)$ ed essere uguale o diverso da ℓ . Di conseguenza il punto $P(x_o, \ell)$ può appartenere oppure non appartenere al grafico della funzione $f(x)$ in quanto abbiamo detto che $f(x_o)$ può non esistere e nel caso che esista può essere diverso da ℓ .
- Se risulta $\ll \ell = 0 \gg$, la funzione $f(x)$ è **infinitesima** nel punto x_o (o per $x \rightarrow x_o$).

In questo caso scriviamo: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e diciamo che la funzione $f(x)$ tende a zero per x che tende ad x_0 se, scelto un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere) è possibile determinare in corrispondenza un intorno completo del punto x_0 tale che si abbia:

$$|f(x)| < \varepsilon \quad [\text{cioè } -\varepsilon < f(x) < \varepsilon] \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$$

Limite destro e limite sinistro

Consideriamo la funzione $f(x) = 4x + 3\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x < 0 \\ 4x + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$, definita $\forall x \neq 0$.

Studiamo il suo comportamento in un intorno completo del punto zero. Osservando il grafico della funzione si può facilmente constatare che quando la x tende a zero dalla sinistra ($x \rightarrow 0^-$) essa tende al numero -3 , mentre per x che tende a zero dalla destra ($x \rightarrow 0^+$) essa tende al numero $+3$.

Cominciamo col verificare che $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(4x + 3\frac{|x|}{x} \right) = -3$ cioè che $\lim_{x \rightarrow 0^-} (4x - 3) = -3$ con $x \in]-\infty, 0[$.

.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |4x - 3 + 3| < \varepsilon, \quad |4x| < \varepsilon, \quad -\frac{\varepsilon}{4} < x < 0 \quad (\text{intorno sinistro del punto zero}).$$

In questo caso diciamo che -3 è il **limite sinistro** della funzione proposta per $x \rightarrow 0^-$ e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(4x + 3\frac{|x|}{x} \right) = -3$$

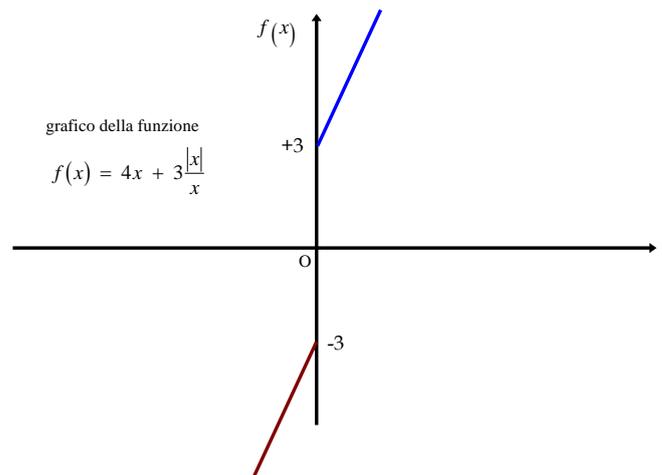
Poi verifichiamo che: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4x + 3\frac{|x|}{x} \right) = +3$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4x + 3) = +3$ Risultato:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |4x + 3 - 3| < \varepsilon, \quad |4x| < \varepsilon, \quad 0 < x < \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{intorno destro del punto zero})$$

In questo caso diciamo che $+3$ è il **limite destro** della funzione proposta per $x \rightarrow 0^+$ e scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4x + 3\frac{|x|}{x} \right) = +3$$

Poiché, scelto ad arbitrio il numero $\varepsilon > 0$, non esistono un intorno completo $I(0) =]\delta_1, \delta_2[$ del punto zero ed un numero ℓ tale che si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in I(0) - \{0\}$, diciamo che non esiste il limite della funzione data per $x \rightarrow 0$, mentre esistono e sono diversi fra loro, il **limite sinistro** ed il **limite destro**.



Risultano pertanto giustificate le seguenti **definizioni**:

- ℓ_s è il **limite sinistro** della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow x_o -$ (oppure ℓ_s è il limite di $f(x)$ quando la x tende ad x_o dalla sinistra) e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_o -} f(x) = \ell_s$ quando, scelto un numero ε positivo ed arbitrario, è possibile determinare in corrispondenza un intorno sinistro $I(x_o -) =]x_o - \delta_1, x_o[$ del punto x_o tale che si abbia: $|f(x) - \ell_s| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o -)$

In simboli abbiamo: $\lim_{x \rightarrow x_o -} f(x) = \ell_s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{J}(x_o -) : |f(x) - \ell_s| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_o -)$

- ℓ_d è il **limite destro** della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow x_o +$ (oppure ℓ_d è il limite di $f(x)$ quando la x tende ad x_o dalla destra) e scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_o +} f(x) = \ell_d$ quando, scelto un numero ε positivo ed arbitrario, è possibile determinare in corrispondenza un intorno destro $I(x_o +) =]x_o, x_o + \delta_2[$ del punto x_o tale che si abbia: $|f(x) - \ell_d| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o +)$

In simboli abbiamo: $\lim_{x \rightarrow x_o +} f(x) = \ell_s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathcal{J}(x_o +) : |f(x) - \ell_d| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_o +)$

Osservazione

- La funzione $f(x)$ **ammette limite** per $x \rightarrow x_o$ quando e soltanto quando esistono finiti i limiti destro e sinistro e questi limiti sono uguali fra loro, cioè quando risulta: $\ell_s = \ell_d = \ell$

In caso contrario si dice che la funzione $f(x)$ **non ammette limite** nel punto x_o .

Ricordiamo inoltre che può esistere soltanto ℓ_s , o soltanto ℓ_d o entrambi ed essere $\ell_s \neq \ell_d$.

- Per indicare un limite sinistro o un limite destro possiamo usare uno dei seguenti simboli :

$$\ell_s, f(x_o -), \quad \ell_d, f(x_o +), \quad f_+(x_o)$$

- Una funzione che ammette limite nel punto x_0 si dice **regolare** nel punto x_0 .

Variabile infinitamente grande

Si dice che la variabile x tende a **più infinito** e si scrive $x \rightarrow +\infty$ quando, scelto un numero k positivo ed arbitrario (e come tale grande a piacere) risulta $x > k$, mentre se risulta $x < -k$ allora la variabile x tende a **meno infinito** e si scrive $x \rightarrow -\infty$.

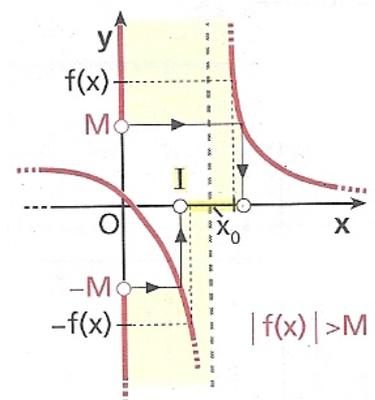
In generale diciamo che una variabile x è **infinitamente grande** o che **tende ad infinito** e scriviamo $x \rightarrow \infty$ se, scelto ad arbitrio un numero positivo k , risulta $|x| > k$. In simboli abbiamo:

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x > k \quad \forall k \in \mathbb{R}^+, \quad x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow x < -k \quad \forall k \in \mathbb{R}^+, \quad x \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x| > k \quad \forall k \in \mathbb{R}^+$$

Definizione di limite infinito per una funzione in un punto

Si dice che la funzione $f(x)$ **tende ad infinito** (o **diverge**) per x che tende a x_0 e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ quando, scelto un numero k positivo ed arbitrario (e come tale grande a piacere) è possibile determinare in corrispondenza un intorno completo $\mathcal{J}(x_0)$ del punto x_0 tale che si abbia:

$$|f(x)| > k \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$$



In forma compatta abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}^+, \exists \mathcal{J}(x_0): |f(x)| > K \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_0) - \{x_0\}$$

Sono evidenti le seguenti definizioni di limite scritte in forma compatta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}^+, \exists \mathcal{J}(x_0): f(x) > K \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_0) - \{x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}^+, \exists \mathcal{J}(x_0): f(x) < -K \quad \forall x \in \mathcal{J}(x_0) - \{x_0\}$$

$$\begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \\ | \\ \forall K \in \mathbb{R}^+ \\ | \\ I(x_0) =]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[\\ | \\ |f(x)| > K \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \end{array}$$

Per verificare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ si procede come segue:

- 1) Si sceglie un numero positivo ed arbitrario K
- 2) Si risolve l'inequazione $|f(x)| > K$
- 3) Se la suddetta inequazione ammette come soluzione un intorno completo del punto x_0 il limite è verificato, in caso contrario il limite non è verificato

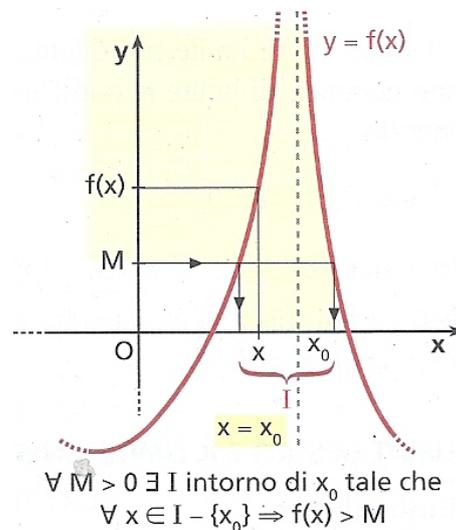
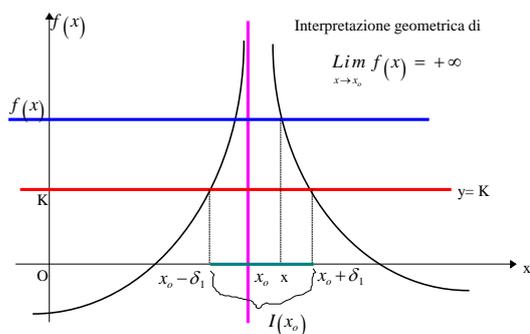
Se come soluzione troviamo un intorno sinistro (destro) allora abbiamo il **limite sinistro** (**destro**) e scriviamo rispettivamente $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$)

Verificare che $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

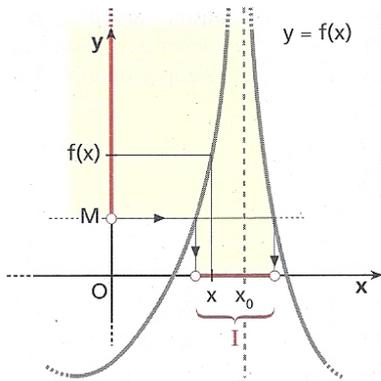
$$\forall K > 0, \quad \frac{1}{(1-x)^2} > K \Rightarrow (1-x)^2 < \frac{1}{K} = \delta \Rightarrow -\sqrt{\delta} < 1-x < \sqrt{\delta} \Rightarrow$$

$$1 - \sqrt{\delta} < x < 1 + \sqrt{\delta} \quad I(1) =]1 - \sqrt{\delta}, 1 + \sqrt{\delta}[\quad \text{Conclusione :}$$

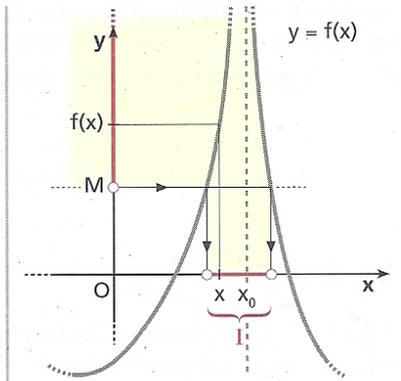
$$\forall K > 0 \quad \frac{1}{(1-x)^2} > K \quad \forall x \in I(1) - \{1\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$$



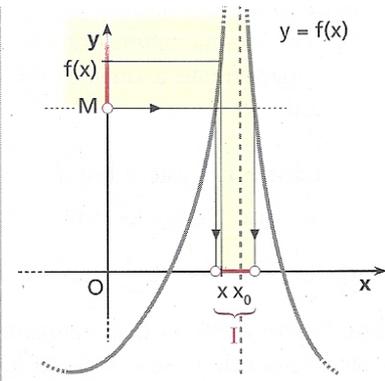
Se risulta



a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) > M$ $\forall x \in I - \{x_0\}$.



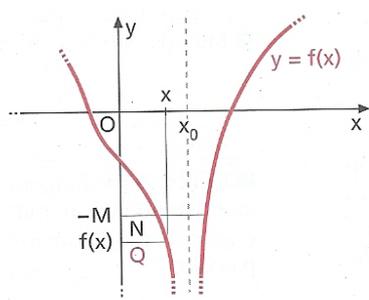
b. Se prendiamo M più grande, I esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.



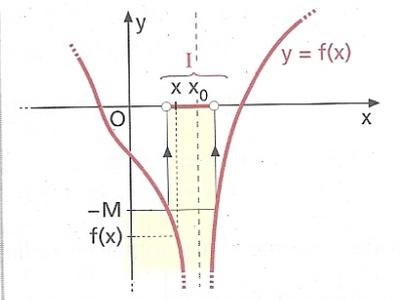
c. Scegliamo un valore di M ancora più grande. Se I è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0 , allora $f(x)$ supera M .

Se risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ diciamo che la funzione **diverge positivamente** nel punto x_0 , se

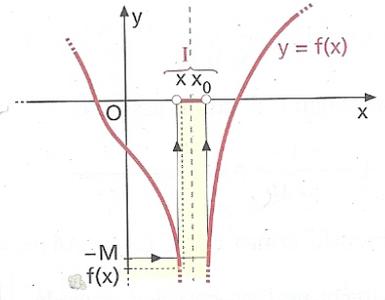
risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ diciamo che la funzione **diverge negativamente** nel punto x_0 .



a. Scelto M positivo grande a piacere, consideriamo $N(0; -M)$ e $Q(0; f(x))$. Se $f(x) < -M$ significa che il punto Q ha ordinata minore del punto N , cioè Q si trova "più in basso" di N .



b. Per quel fissato M , individuiamo un intorno I di x_0 tale che $\forall x \in I - \{x_0\}$ $f(x) < -M$, cioè $f(x) \in I(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -M\}$.



c. Scegliamo M più grande: in genere, perché sia verificata la condizione $f(x) < -M$, dovremo prendere un intorno I più piccolo del precedente.

Un limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Scelto ad arbitrio il numero positivo K , risolvo l'inequazione $\left| \frac{1}{x} \right| > K$, $|x| < \frac{1}{K} = \delta$ per

$-\delta < x < \delta$ (intorno completo del punto zero) $I(0) =]-\delta, \delta[$ con $\delta \in \mathbb{R}^+$. Quindi:

$$\forall K > 0, \left| \frac{1}{x} \right| > K \quad \forall x \in I(0) - \{0\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Definizione di limite finito per una funzione all'infinito

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero ℓ per x che tende all'infinito e si scrive

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ quando, fissato un numero ε positivo ed arbitrario (e come tale piccolo a piacere),

è possibile determinare in corrispondenza un intorno di infinito $\mathcal{J}(\infty)$ tale che si abbia

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in I(\infty)$$

Dire intorno di ∞ o dire $\forall |x| > h \in \mathbb{R}^+$ è la stessa cosa.

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \quad \forall |x| > h \Leftrightarrow x < -h \wedge x > +h$$

Se risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x < -h$ diciamo che esiste il $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell_s$ che rappresenta il

limite sinistro.

Se risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > h$ diciamo che esiste il $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_d$ che rappresenta il **limite**

destro.

Quando esistono e sono uguali tra loro i limiti ℓ_s e ℓ_d si dice che esiste il limite ℓ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall |x| > h$$

$$\begin{array}{c} | \\ \forall \varepsilon > 0 \\ | \end{array}$$

$$h > 0 \quad \text{---} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall |x| > h$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x > h$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x < -h$$

Per verificare che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ si opera come segue:

- 1) Si sceglie un numero ε positivo ed arbitrario
- 2) Si risolve l'inequazione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
- 3) Se la suddetta inequazione ammette come soluzione un intorno di infinito, cioè $|x| > h \in \mathbb{R}^+$, il limite è verificato, altrimenti non è verificato.

Verificare che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{1}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon, \quad x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Pongo: $\frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} = h^2 \quad x^2 - h^2 > 0$ per $x < -h \quad x > h$ cioè per $|x| > h$

$h = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ è un numero reale positivo se $\varepsilon < 1$, cosa lecita in quanto ε è un numero positivo

piccolo a piacere.

Conclusione:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon \quad |x| > h \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = 1$$

Verificare il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x} = 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{x + 1}{x} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon, \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon} = h > 0$$

$$\text{Conclusione} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{x + 1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \forall |x| > h \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x} = 1$$

Un altro limite fondamentale: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon, \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon} = h > 0 \quad \text{Quindi:}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \quad |x| > h \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Definizione di limite infinito per una funzione all'infinito

Si dice che la funzione $f(x)$ tende ad infinito per x che tende ad infinito e si scrive $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

quando, fissato un numero M positivo ed arbitrario (e come tale grande a piacere), è possibile determinare in corrispondenza un intorno di infinito tale che si abbia:

$$|f(x)| > M \quad \forall |x| > h \quad [\text{cioè } \forall x \in \mathcal{J}(\infty)]$$

In sintesi possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists h > 0 : |f(x)| > M \quad \forall |x| > h$$

$$\begin{array}{c} | \\ \forall M > 0 \\ | \\ h > 0 \end{array} \quad \text{—————} \quad |f(x)| > M \quad \forall |x| > h$$

Casi particolari

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists h > 0 : f(x) > M \quad \forall x > h$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists h > 0 : f(x) < -M \quad \forall x < -h$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists h > 0 : f(x) > M \quad \forall x < -h$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists h > 0 : f(x) < -M \quad \forall x > h$$

Per verificare che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si procede come segue:

- 1) Si sceglie un numero M positivo ed arbitrario
- 2) Si risolve l'inequazione $|f(x)| > M$
- 3) Se tra le soluzioni di tale inequazione troviamo un intorno di infinito (cioè $|x| > h \in \mathbf{R}^+$)

il limite è verificato, in caso contrario il limite non è verificato

Verificare il seguente limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2+x} = +\infty$$

$$\forall M > 0, \quad \sqrt{2+x} > M, \quad 2+x > M^2, \quad x > M^2 - 2, \quad M^2 - 2 = h > 0 \quad \text{se } M > \sqrt{2}.$$

Conclusione $\forall M > 0, \quad \sqrt{2+x} > M \quad \forall x > h \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2+x} = +\infty$

Applicando la definizione di limite verificare che: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-2x} = +\infty$

$$\forall M > 0, \quad \sqrt{3-2x} > M, \quad 3-2x > M^2, \quad x < \frac{3-M^2}{2} = -\frac{M^2-3}{2} = -h$$

essendo $h = \frac{M^2-3}{2}$, $h > 0$ se $M > \sqrt{3}$ cosa lecita essendo **M** un numero arbitrario positivo e come tale grande a piacere.

Conclusione: $\forall M > 0, \quad \sqrt{3-2x} > M \quad \forall x < -h \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-2x} = +\infty$

Definizione unica di limite, ovvero definizione topologica di limite

Le quattro precedenti definizioni possono essere sintetizzate nella seguente **unica definizione**.

Si dice che la funzione $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende ad x_0 e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se ad ogni

intorno $J_\ell = J(\ell)$ del punto ℓ è possibile associare $I(x_0)$ del punto x_0 tale che $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

si abbia $f(x) \in J(\ell)$. Sinteticamente possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall J(\ell), \exists I(x_0): f(x) \in J(\ell) \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$$

o meglio $\forall x \in \text{dom } f \cap [I(x_0) - \{x_0\}]$.

Osservazione

- Esistono funzioni che per $x \rightarrow x_0$, con x_0 numero finito o infinito, non ammettono limite
- Il calcolo del limite di una funzione quando la variabile indipendente converge o diverge può essere considerato come una nuova operazione (al pari dell'addizione, della moltiplicazione, ...) nel senso che con esso otteniamo un numero ℓ finito o infinito.

Osservazione

- Se f ha limite finito ℓ in x_0 ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) diremo che f è **regolare** in x_0 .
- Se $|f|$ è **divergente** in x_0 diremo che f è **infinitamente grande** in x_0 .
- Col simbolo $\overline{\mathbb{R}}$ indichiamo l'**insieme numerico reale ampliato**, cioè l'insieme dei numeri reali ampliato dai due nuovi elementi $-\infty$ e $+\infty$ che si leggono rispettivamente <<**meno infinito**>> e <<**più infinito**>>. Risulta: $\inf \overline{\mathbb{R}} = -\infty$, $\sup \overline{\mathbb{R}} = +\infty$

Ogni sottoinsieme proprio di $\overline{\mathbb{R}}$ è **limitato**.