Unità Didattica N°24

Teoremi ed operazioni sui limiti

1) **Limite del valore assoluto di una funzione**

2) **Teorema dell'unicità del limite**

3) **Teorema della permanenza del segno**

4) **Teorema del confronto fra limiti**

5) **Limite della somma.**

6) **Limite della differenza**

7) **Limite del prodotto**

8) **Limite del reciproco di una funzione**

9) **Limite del quoziente**

10) **Alcuni limiti notevoli:** $\lim_{x \to \infty} P(x)$ $\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{D(x)}$.

Limite del valore assoluto di una funzione

Teorema: Se $f(x)$ è una funzione che tende ad $\ell \in R$ per $x \to x_o$, allora $|f(x)|$ converge a $|\ell|$ per $x \to x_o$, cioè il limite del valore assoluto di una funzione è uguale al valore assoluto del limite. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = |\ell|$ **[1]**

Il teorema non è invertibile, cioè: $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = |\ell|$ non implica $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell$

Il teorema è **invertibile** solo se $\ell = 0$, in questo caso abbiamo:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_o} |f(x)| = 0$$

Teorema dell'unicità del limite

Se una funzione $f(x)$, per $x \to x_o$, ammette limite ℓ, esso è unico.

Dimostrazione: Dimostriamo questo teorema per assurdo, cioè supponiamo che si abbia contemporaneamente: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1 \neq \ell$

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in I_1(x_o) - \{x_o\} \qquad [1]$$

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell_1| < \varepsilon \quad \forall x \in I_2(x_o) - \{x_o\} \qquad [2]$$

La [2] può essere scritta anche nella seguente maniera: $|\ell_1 - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I_2(x_o) - \{x_o\}$ [3]

Le [1] e [2] sono verificate contemporaneamente

$$\forall x \in I(x_o) - \{x_o\} = I_1(x_o) \cap I_2(x_o) - \{x_o\}$$

Possiamo scrivere : $\begin{cases} -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon \\ -\varepsilon < \ell_1 - f(x) < \varepsilon \end{cases} \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

Sommando membro a membro otteniamo: $-2\varepsilon < \ell_1 - \ell < 2\varepsilon$ cioè : $|\ell_1 - \ell| < 2\varepsilon$

Questa disuguaglianza è assurda in quanto la quantità costante $|\ell_1 - \ell|$ non può essere minore della quantità 2ε positiva, variabile e piccola a piacere.

L'assurdo si toglie ammettendo che la funzione $f(x)$ ammette nel punto x_o un limite unico.

Teorema della permanenza del segno

Se per $x \to x_o$ la funzione $f(x)$ tende al limite finito ℓ non nullo, allora esiste almeno un intorno $I(x_o)$ del punto x_o nei cui punti x, escluso al più il punto x_o, la funzione $f(x)$ assume lo stesso segno di ℓ, cioè sono entrambi positivi oppure entrambi negativi.

Hp: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell \neq 0$ Th: $\exists\, I(x_o) : \ell \cdot f(x) > 0 \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

Dimostrazione

Scelto il numero positivo $\varepsilon = |\ell|$ abbiamo:

$\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

$\ell - |\ell| < f(x) < \ell + |\ell| \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$ **[1]**

- $\ell > 0 \Rightarrow |\ell| = \ell$ e quindi la [1] diventa : $0 < f(x) < 2\ell \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

  cioè : $f(x) > 0 \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$
- $\ell < 0 \Rightarrow |\ell| = -\ell$ e quindi la [1] diventa : $\ell + \ell < f(x) < \ell - \ell \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

$2\ell < f(x) < 0 \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$ cioè : $f(x) < 0 \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

Teorema inverso della permanenza del segno

Se esiste $\mathbf{\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell}$, se risulta **$f(x) > 0$** $[\, f(x) < 0\,]$ in un opportuno intorno del punto x_o allora è $\ell \geq 0$ $[\, \ell \leq 0\,]$

Corollario

Se per $x \to x_o$ risulta quanto segue: $f(x) < g(x)$, $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_2$ allora si può dimostrare che vale la seguente relazione: $\ell_1 \leq \ell_2$

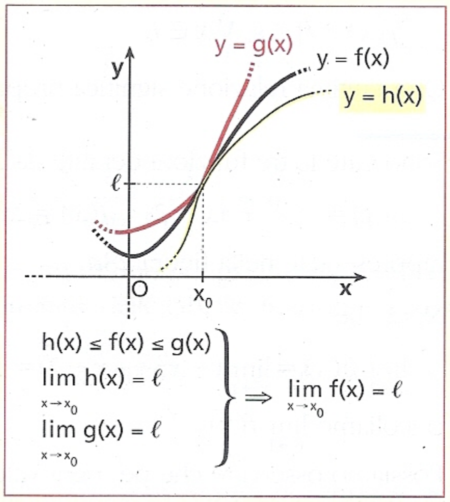
Teorema del confronto fra limiti

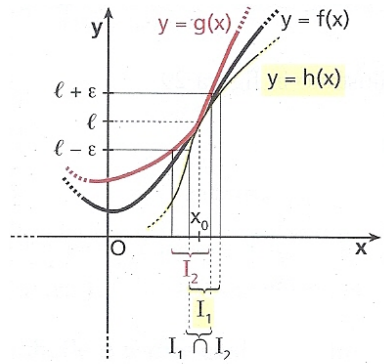
Siano $f(x)$, $h(x)$, $g(x)$ tre funzioni definite nello stesso intervallo. Se risulta:

1) $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

2) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell$

allora risulta anche: $\lim\limits_{x \to x_o} h(x) = \ell$





Poiché la funzione f viene "costretta" dalle funzioni h e g, il teorema viene detto **teorema dei due carabinieri**.

Dimostrazione: $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \;\Rightarrow\; \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in I_1(x_o) - \{x_o\}$

$\lim_{x\to x_o} g(x) = \ell \Rightarrow \; \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in I_2(x_o) - \{x_o\}$

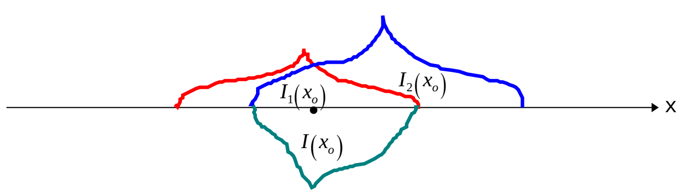
Allora, detto $I(x_o) = I_1(x_o) \cap I_2(x_o)$, possiamo scrivere:

$$\ell - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$$

ed affermare che: $\lim_{x\to x_o} h(x) = \ell$

Infatti abbiamo dimostrato che in corrispondenza di un certo $\varepsilon > 0$, fissato ad arbitrio, esiste un intorno $I(x_o)$, per ogni x del quale, diverso da x_o, risulta: $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$ cioè: $|h(x) - \ell| < \varepsilon$. In base alla definizione di limite questo significa che: $\lim_{x\to x_o} h(x) = \ell$.

Il teorema continua a sussistere anche quando $\ell = \pm\infty$.



Limite della somma

Teorema: Il limite della somma di un numero finito di funzioni è uguale alla somma dei limiti delle singole funzioni. Nel caso di due funzioni abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_o} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x\to x_o} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$$

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell_1 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in I_1(x_o) - \{x_o\} \qquad \textbf{[2]}$$

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in I_2(x_o) - \{x_o\} \qquad \textbf{[3]}$$

Le [2] e [3] valgono contemporaneamente nell'intorno $I(x_o) = I_1(x_o) \cap I_2(x_o)$ - $\{x_o\}$ sicché , sommando membro a membro , otteniamo :

$$|f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\} \qquad [4]$$

Ricordando che $|A + B| \leq |A| + |B|$ possiamo scrivere la [4] nella seguente maniera:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) + g(x) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\} \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_o} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$$

- Il teorema non è invertibile.

Osservazione: Il teorema [1] è stato dimostrato nell'ipotesi che ℓ_1 ed ℓ_2 siano numeri finiti. In caso contrario valgono le seguenti considerazioni:

ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$
$+\infty$	ℓ_2	$+\infty$
ℓ_1	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	ℓ_2	$-\infty$
ℓ_1	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty \ -\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty \ -\infty$

Il teorema [1] dà luogo alla forma indeterminata $+\infty \ -\infty$ che va eliminata, se possibile, con opportuni accorgimenti che saranno esposti in seguito.

Limite della differenza

Teorema: Il limite della differenza di due funzioni è uguale alla differenza dei limiti delle funzioni date.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to x_o} [f(x) - g(x)] = \ell_1 - \ell_2$$

Tenendo presente le considerazioni del paragrafo precedente e che $|A - B| \leq |A| + |B|$ possiamo scrivere: $\left| [f(x) - \ell_1] - [g(x) - \ell_2] \right| \leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| \quad \forall x \in I(x_o) - \{x_o\}$

Questo vuol dire che: $\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x) - g(x) \right] = \ell_1 - \ell_2$ • Il teorema non è invertibile.

Osservazione: Valgono le stesse considerazioni fatte per il teorema precedente, cioè il limite della differenza di due funzioni può condurre alla forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Limite della potenza ennesima di una funzione

Il limite della potenza di una funzione è uguale alla potenza del limite della funzione stessa, cioè:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_o} \left[f(x) \right]^n = \ell^n$$

Limite della radice ennesima di una funzione

Il limite della radice n-esima di una funzione è uguale alla radice n-esima del limite della funzione stessa, cioè:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_o} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$$

Limite del prodotto

Teorema: **Il limite del prodotto di un numero finito di funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle singole funzioni.**

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1 \\ \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = \ell_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_o} f(x) g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 \ell_2$
ℓ_1	∞	∞
∞	ℓ_2	∞
$\ell_1 > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$\ell_2 > 0$	$+\infty$
$\ell_1 < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$\ell_2 < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$\ell_2 < 0$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	∞	$0 \cdot \infty$
∞	0	$\infty \cdot 0$

Negli ultimi due casi il limite del prodotto delle due funzioni si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$ e quindi, per il momento, non possiamo stabilire se esso è finito, infinito o non esiste.

Corollario: Se $g(x)=k=\text{costante}$, allora il limite precedente diventa:

$$\lim_{x\to x_o} k\cdot f(x)=k\cdot \lim_{x\to x_o} f(x)=k\cdot \ell_1$$

cioè un fattore costante può essere portato fuori dal simbolo di limite.

Limite del reciproco di una funzione

Il limite del reciproco di una funzione è uguale al reciproco del limite della funzione stessa, nell'ipotesi che tale limite sia diverso da zero. $\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\ell}$

Il teorema non è invertibile.

Corollario: Si può facilmente verificare che:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to x_o} f(x)=\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=0$$

Limite del quoziente di due funzioni

Teorema: **Il limite del quoziente di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti del dividendo e del divisore nell'ipotesi in cui il divisore è diverso da zero**, cioè:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell_1\\ \lim_{x\to x_o} g(x)=\ell_2\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$$

ℓ_1	ℓ_2	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$
∞	ℓ_2	∞
ℓ_1	∞	0
ℓ_1	0	∞
0	0	$\frac{0}{0}$
∞	∞	$\frac{\infty}{\infty}$
∞	0	$\frac{\infty}{0}=\infty\cdot\frac{1}{0}=\infty\cdot\infty=\infty$
0	∞	$\frac{0}{\infty}=0\cdot\frac{1}{\infty}=0\cdot 0=0$

Osservazione: Le forme $+\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ sono dette **forme indeterminate**. La loro eliminazione avviene mediante l'applicazione di particolari accorgimenti o ricorrendo ai due teoremi di De L'Hospital.

Le forme $\frac{\infty}{0}$ e $\frac{0}{\infty}$ non sono indeterminate in quanto risulta:

$$\frac{\infty}{0}=\infty\cdot\frac{1}{0}=\infty\cdot\infty=\infty \quad , \quad \frac{0}{\infty}=0\cdot\frac{1}{\infty}=0\cdot 0=0 \ , \ o^{+\infty} = 0 \ , \ o^{-\infty} = \frac{1}{0^{+\infty}} = 0$$

Esistono anche le tre seguenti forme indeterminate: 1^{∞} , 0^{0} , ∞^{0}

Non sono forme indeterminate :

- $(+\infty)^{+\infty}$ che tende a $+\infty$
- $(+\infty)^{-\infty}$ che tende a zero
- $0^{+\infty}$ che tende a zero

Alcuni limiti notevoli

Sia $P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x + a_n$ un polinomio di grado n nella variabile x, con $n\in N$, $a_o, a_1,\ldots,a_n \in R$. Vogliamo dimostrare che : $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = a_o\cdot\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$

$$\lim_{x\to\infty}P(x)=\lim_{x\to\infty}x^n\left(a_o+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}\right)=a_o\cdot\lim_{x\to\infty}x^n=\infty$$

In particolare abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\begin{cases}+\infty & se \ \ a_o>0\\ -\infty & se \ \ a_o<0\end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\begin{cases}+\infty \ \ se & \begin{cases}a_o>0 \ ed \ n \ pari\\ a_o<0 \ ed \ n \ dispari\end{cases}\\ -\infty \ \ se & \begin{cases}a_o<0 \ ed \ n \ pari\\ a_o>0 \ ed \ n \ dispari\end{cases}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3+2x+5\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3\right)=-3\cdot\lim_{x\to+\infty}x^3=-\infty$$

Siano $N(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x + a_n$

$D(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2}+\cdots+b_{m-1}x + b_m$

due polinomi nella variabile x, rispettivamente di grado **n** ed **m** (con n maggiore, uguale, minore di m).

Vogliamo dimostrare che:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{a_o}{b_o}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\infty & se \quad n>m\\ \frac{a_o}{b_o} & se \quad n=m\\ 0 & se \quad n<m\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty}N(x)}{\lim_{x\to\infty}D(x)}=\frac{\lim_{x\to\infty}a_o x^n}{\lim_{x\to\infty}b_o x^m}=\frac{a_o}{b_o}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}=\frac{a_o}{b_o}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^4+2x-3}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^4}{2x}=-\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to-\infty}x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2x-5}{-4x^3+2x^2+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{-4x^3}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^4}{7x^5}\frac{-5x^4+2x-3}{7x^5+3x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^4}{7x^5}=\frac{5}{7}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{5}{7}\cdot 0=0$$