

Unità Didattica N° 25

Le funzioni continue

- 01) Funzioni continue**
- 02) Punti di discontinuità per una funzione**
- 03) Proprietà fondamentali delle funzioni continue**
- 04) Limiti fondamentali**
- 05) Calcolo di limiti che si presentano sotto forma indeterminata**

Funzioni continue

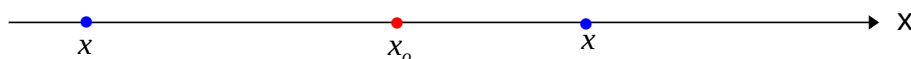
Una funzione $f(x)$ si dice **continua** in un punto $x_0 \in [a, b]$ quando risulta:

$$[1] \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Perché una funzione $f(x)$ sia continua in un punto x_0 si debbono verificare tre circostanze:

- 1)** deve esistere finito il numero $f(x_0)$ **2)** deve esistere finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3) questo limite deve essere uguale al valore assunto dalla funzione nel punto x_0

La [1] è detta **condizione di continuità** per la funzione $f(x)$ nel punto x_0 .



- Ponendo $x = x_0 + h$ ed osservando che $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$, la [1] assume la seguente forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad [2]$$

La relazione [2] esprime, in maniera solo formalmente diversa, che la funzione $f(x)$ è **continua** nel punto x_0 .

Quindi anche la [2] è detta **condizione di continuità** per la funzione $f(x)$ nel punto x_0 .

- La funzione $f(x)$ è **continua** nel punto x_0 *dalla destra (sinistra)* se risulta :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0) \quad \text{oppure} \quad \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h) = f(x_0) \\ [\quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0) \quad \text{oppure} \quad \lim_{h \rightarrow 0-} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad] \end{aligned}$$

Una funzione è **continua** in x_0 se, e solo se, essa è ivi continua sia dalla sinistra che dalla destra.

- La funzione $f(x)$ è **continua** nell'intervallo $[a, b]$ se è **continua** in tutti i punti di tale intervallo. Una funzione $f(x)$ è **generalmente continua** in un intervallo $[a, b]$ se è continua in tutti i punti di $[a, b]$ tranne che in un numero finito di punti di tale intervallo.

La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è **generalmente continua** nell'intervallo $[-2\pi, 4\pi]$.

- Poiché la funzione $f(x) = x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

Questo ci consente di scrivere la [1] nella seguente maniera: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$ [4]

Pertanto, dal punto di vista formale, dire che la funzione $f(x)$ è **continua** in x_0 , significa affermare che è lecito scambiare il simbolo funzionale f col simbolo di **Limite**

Così, ad esempio, è lecito scrivere :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \quad \text{con } a > 0$$

Limiti e continuità delle funzioni composte

Le funzioni $y = f(z)$ e $z = g(x)$ definiscono la **funzione composta** o **funzione di funzione**

$$y = f(z) = f[g(x)] = F(x)$$

TEOREMA

Se la funzione $z = g(x)$ ammette, per $x \rightarrow x_0$, un limite finito ℓ e se $f(z)$ è **continua** per $z = \ell$,

allora risulta :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right] = f(\ell)$$

In particolare, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ con ℓ numero finito allora deduciamo che :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} &= \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{\ell} & \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n &= \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n = \ell^n \\ \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} &= a^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = a^\ell & \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a f(x) &= \log_a \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right] = \log_a \ell \end{aligned}$$

COROLLARIO

Se la funzione $z = g(x)$ è **continua** nel punto $x = x_0$ del suo campo di definizione e la funzione $y = f(z)$ è **continua** nel punto corrispondente $z = g(x_0)$, allora la funzione composta $y = f(z) = f[g(x)] = F(x)$ è anch'essa continua in tale punto x_0 .

Punti di discontinuità per una funzione

Sia $f(x)$ un funzione definita nell'intervallo $[a, b]$. Se $f(x_0)$ non esiste o se

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$, allora diciamo che la funzione $f(x)$ è **discontinua** nel punto x_0 .

Diciamo anche che x_0 è un **punto di discontinuità** o un **punto singolare** per la funzione $f(x)$.

Una funzione è **discontinua** in un punto x_0 se si verifica una delle seguenti circostanze:

- 1)** $f(x_0)$ non esiste **2)** $f(x_0)$ esiste ma è **infinito** **3)** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste **4)** $f(x_0)$ esiste

finito ma è diverso da $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

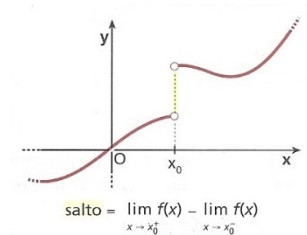
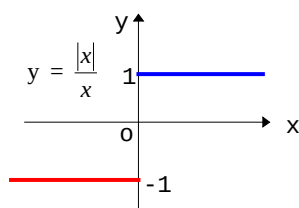
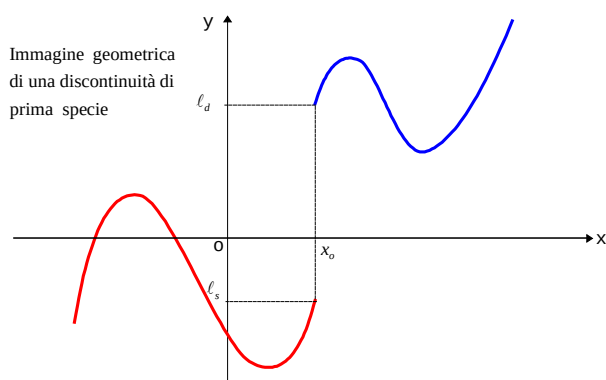
La classificazione dei punti di discontinuità dà luogo a **tre tipi di punti di discontinuità**:

1) Discontinuità di prima specie

Il punto x_0 rappresenta una **discontinuità di prima specie** per la funzione $f(x)$ quando non esiste $f(x_0)$ ma esistono finiti e diversi fra loro i limiti sinistro e destro di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$, cioè quando :

$$f(x_0) \text{ non esiste} \quad \ell_s = f(x_0 -) = \lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) \neq \ell_d = f(x_0 +) = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$$

Il numero $\ell_d - \ell_s$ dicesi **salto** della funzione $f(x)$ nel punto x_0 .



La funzione $y = \frac{|x|}{x}$ presenta nel punto $x = 0$ una **discontinuità di prima specie**

La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ presenta una **discontinuità di prima specie** nel punto $x = 0$

Infatti:

1) $f(0) = \frac{0}{0}$ non esiste **2)** $f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$

3) $f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{-x} = -1$ I limiti destro e sinistro, nel punto $x = 0$, esistono

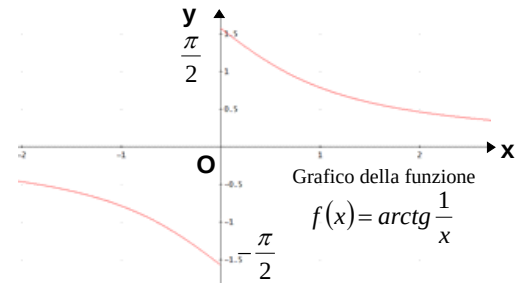
finiti ma sono fra loro diversi.

La funzione $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ presenta una

discontinuità di prima specie nel punto $x = 0$. Infatti:

$$f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} \arctg \frac{1}{x} = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2},$$

$$f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \arctg \frac{1}{x} = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$



Osservazione

Se $f(x)$ non è definita in x_0 , o se è definita in x_0 ma risulta $f(x_0) \neq f(x_0-) [f(x_0) \neq f(x_0+)]$

la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0-) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è **continua a sinistra** di x_0 , ma non a destra di x_0 .

Diciamo in questo caso che la funzione $g(x)$ si ottiene prolungando la $f(x)$ in x_0 per continuità dalla sinistra o modificando il valore di $f(x)$ dalla sinistra.

La funzione :

$$p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ f(x_0+) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è **continua** alla destra di x_0 ma non alla sinistra di x_0 .

Diciamo in questo caso che la funzione $p(x)$ si ottiene prolungando per continuità da destra o modificando il valore di $f(x)$ in x_0 da destra.

2) Discontinuità di seconda specie

La funzione $f(x)$ presenta nel punto x_0 una **discontinuità di seconda specie** quando almeno uno dei due limiti (sinistro o destro) è, nel punto x_0 , infinito oppure non esiste, cioè quando:

1) $f(x)$ è infinita nel punto x_0 oppure

2) quando non esiste almeno uno dei due seguenti limiti

$$f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x), \quad f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$$

3) almeno uno dei due seguenti limiti $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ vale infinito.

OSSERVAZIONE

Se x_0 è un **punto di discontinuità di seconda specie**, ciò non esclude che la funzione sia continua a destra oppure a sinistra, od anche che sia prolungabile in una funzione **continua a sinistra** (**ma non a destra**), o continua a destra (ma non a sinistra).

- La funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ presenta una **discontinuità di seconda specie** nel punto $x=0$.

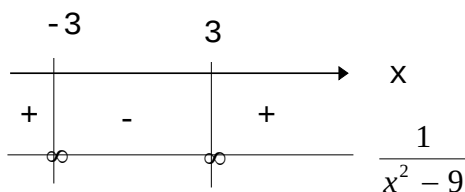
$$f(0) = e^{\frac{1}{0}} \text{ non esiste}, \quad \ell_s = f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\ell_d = f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-9}}$

$$f(-3-) = \lim_{x \rightarrow -3-} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-9}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

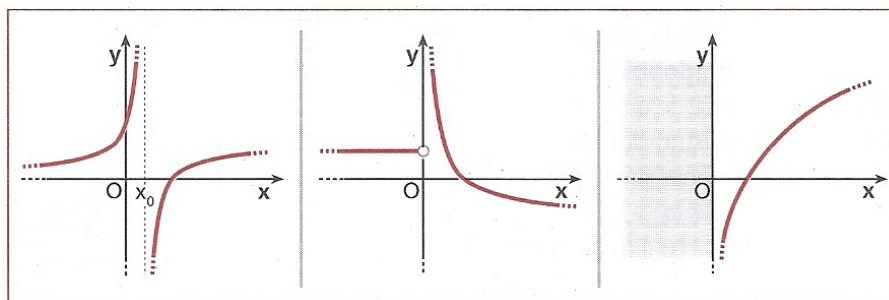
$$f(-3+) = \lim_{x \rightarrow -3+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-9}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty \quad f(3-) = +\infty, \quad f(3+) = 0$$



La funzione $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-9}}$ presenta nei punti $x = \pm 3$ delle **discontinuità di seconda specie**.

- $\lim_{x \rightarrow 0\pm} 3^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$ La funzione $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ presenta nel punto $x = 0$ una **discontinuità**

di seconda specie.



3) Discontinuità di terza specie o discontinuità eliminabile

La funzione $f(x)$ presenta nel punto x_0 una **discontinuità di terza specie** o **discontinuità eliminabile** quando si presenta una delle seguenti circostanze:

1) $f(x_0)$ non esiste , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

2) $f(x_0)$ esiste , $f(x_0 -) = f(x_0 +) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq f(x_0)$

La discontinuità si elimina ponendo : $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

In questo caso diciamo di **prolungare** (o **completare**) per continuità la funzione $f(x)$ anche nel punto x_0 . La **discontinuità di terza specie** è detta **discontinuità eliminabile**

in quanto completiamo la definizione della funzione $f(x)$ ponendo: $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

In sostanza noi eliminiamo la **discontinuità di terza specie** nel punto x_0 considerando

una nuova funzione $g(x)$ così definita :
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Così facendo il punto $P_0(x_0, \ell)$ appartiene al grafico della funzione $f(x)$.

La funzione $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$ presenta nel punto di ascissa **zero** una **discontinuità eliminabile**.

Infatti $f(0)$ non esiste . $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{-\frac{1}{x^2}} = 2^{-\infty} = 0$ La discontinuità si elimina ponendo $f(0) = 0$

Il **prolungamento per continuità** della funzione proposta dà luogo alla seguente nuova

funzione **continua** in tutto **R**:

$$g(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Altrettanto dicasi per le seguenti funzioni:

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \frac{e^x - 1}{x}, \quad x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad \text{cioè :}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Sintesi: Una **discontinuità** può essere:

1) di **prima specie** quando esistono finiti i limiti destro e sinistro e questi limiti sono fra loro diversi

2) di **seconda specie** quando almeno uno dei due limiti destro e sinistro o non esiste o è infinito

3) di **terza specie** o **eliminabile** quando $f(x)$ è convergente in x_0 (cioè esiste finito il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$) ma non esiste $f(x_0)$, oppure esiste $f(x_0)$ ma è diverso da ℓ .

Insieme di definizione e dominio di una funzione

• L'insieme di definizione di una funzione f è l'intervallo o l'unione di intervalli dove vogliamo studiare le proprietà della funzione.

Un punto x_0 appartenente all'insieme di definizione (I_D) è **punto di continuità** per la funzione f quando esiste finito il suo limite per x tendente ad x_0 (cioè quando esistono finiti i limiti destro e sinistro e questi limiti sono fra loro uguali) e tale valore è uguale a quello assunto dalla funzione nel punto x_0 , cioè quando risulta : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

• Il concetto di continuità di una funzione in un suo punto x_0 si occupa del comportamento della funzione sia in un intorno del punto x_0 che nel punto stesso, richiedendo che tali comportamenti non siano difformi.

• L'insieme dei punti di continuità (che è un sottoinsieme dell'insieme di definizione) costituisce il dominio della funzione.

$$\text{dom } f \subseteq I_D$$

Proprietà fondamentali delle funzioni continue

• Le funzioni elementari sono continue nei rispettivi domini.

Sono **continue** le seguenti funzioni:

$$\mathbf{1)} \quad f(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbf{2)} \quad f(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbf{3)} \quad f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a > 0)$$

4) $f(x) = \log_a x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

5) $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Teorema N° 1: La somma algebrica di un numero finito di funzioni continue è una funzione continua

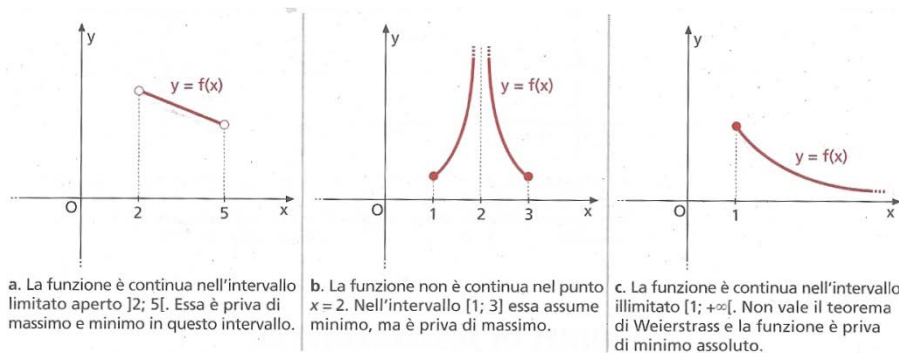
Teorema N° 2: Il prodotto di un numero finito di funzioni continue è una funzione continua

Teorema N° 3: Il **quoziente** di due funzioni continue è una funzione continua se escludiamo gli eventuali zeri del denominatore. Ne consegue che sono funzioni **sempre continue** tutti i **polinomi**, mentre sono **funzioni generalmente continue** le funzioni razionali fratte.

Teorema N° 4: Se una funzione $f(x)$ è **continua** in un intervallo limitato e chiuso, essa è ivi limitata.

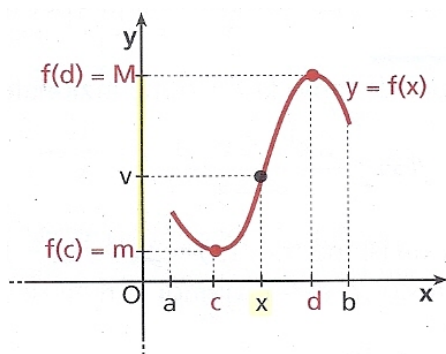
Teorema (di Weierstrass) N°5: Se una funzione $f(x)$ è **continua** in un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ essa ammette ivi il **massimo assoluto M** ed il **minimo assoluto m**, cioè l'intervallo limitato e chiuso $[m, M]$ è il **codominio** di f .

Se qualcuna delle ipotesi del teorema N°5 non è verificata, il risultato non è più valido come mostrano i seguenti controesempi:



Teorema (di Bolzano) N°6 o teorema dei valori intermedi

Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ essa assume tutti i valori compresi fra il suo minimo assoluto **m** ed il suo massimo assoluto **M**. In particolare, una funzione $f(x)$ continua e strettamente monotona in un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$ quando la x descrive l'intervallo $[a, b]$, cioè quando la x assume tutti i valori compresi tra **a** e **b**.



f continua in $[a; b] \Rightarrow$

$$\forall v : m \leq v \leq M$$

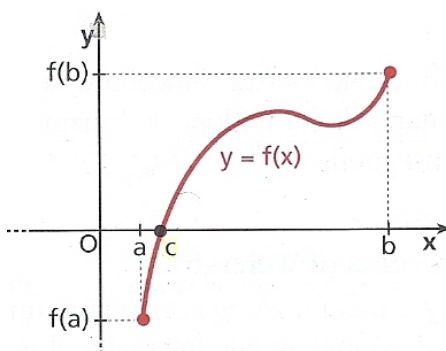
$$\exists x \in [a; b] : f(x) = v$$

Teorema (di esistenza degli zeri) N°7: Se $f(x)$ è una funzione **continua** in un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$, se risulta $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) = 0$.

Se $f(x)$ è anche strettamente crescente o strettamente decrescente in $[a, b]$ abbiamo:

$$\exists^* x_0 \in]a, b[: f(x_0) = 0$$

cioè esiste ed è unico il punto x_0 interno all'intervallo $[a, b]$ per il quale risulta $f(x_0) = 0$.



f continua in $[a; b]$

$$f(a) < 0, f(b) > 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in]a; b[: f(c) = 0$$

Limiti fondamentali

- In analisi matematica gli angoli e gli archi si misurano in radianti.

Limiti notevoli e loro dimostrazione

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{se } a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty \quad \text{se } a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{se } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} a^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} a^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} a^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{se } a > 1$$

- Quando la x esprime la misura in radianti di un arco o di un angolo risulta: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Constatato facilmente che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, consideriamo l'arco

$\widehat{AB}$ la cui misura in radianti è x .

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overline{EB} < \overline{AB} < \widehat{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}, \quad \overline{BC} < \overline{TC} \Rightarrow \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{TC}$$

$$\overline{EB} < \widehat{AB} < \overline{AT} \quad \text{cioè: } \sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dividendo ciascun termine per $\sin x > 0$ otteniamo: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

Poiché risulta: $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$, è valido il teorema del confronto fra limiti e

possiamo scrivere: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Ponendo $x = -t$ ed osservando che $x \rightarrow 0- \Leftrightarrow t \rightarrow 0+$ possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

logaritmi neperiani o **logaritmi naturali** o *logaritmi iperbolici* (in quanto intervengono nella misura dell'area di una iperbole equilatera).

Una volta si usava il simbolo **lg** oppure **log**, oggi si usa il simbolo **ln**.

I logaritmi in base 10 (simbolo usato in passato **Log** oppure **Lg**, attualmente si usa il simbolo **log** oppure **lg**) sono detti **decimali** o di **Briggs** o *volgari* in quanto usati nei calcoli della matematica elementare.

Per passare da un sistema di logaritmi all'altro basta tenere presente quanto segue:

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y = e^{\ln x} \Rightarrow \log x = \log e^y = y \log e = \ln x \cdot \log e$$

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} = 2,30258509 \cdot \log x \quad \log x = \log e \cdot \ln x = 0,43429448 \cdot \ln x$$

● ● Per calcolare un valore approssimato del numero di Nepero **e** basta porre **x=1** nello sviluppo in serie della funzione e^x , cioè:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Dimostrazione: $\text{dom} \frac{\log_a(1+x)}{x} =]-1, +\infty[- \{0\}$

Ponendo $tx = 1$ ed osservando che $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow \infty$ possiamo scrivere:

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_a\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \log_a \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \log_a e$$

● ● Se abbiamo **a = e** il limite precedente diventa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

● ● $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Dimostrazione

Poniamo: $a^x - 1 = t$ cioè: $a^x = 1 + t$ $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

$$\ln a^x = \ln(1+t), \quad x \ln a = \ln(1+t), \quad x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln(1+t)$$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{t}{\frac{1}{\ln a} \cdot \ln(1+t)} = \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \ln a$$

• • Se risulta $a = e$ il limite precedente diventa : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

in quanto risulta : $\ln a = \ln e = 1$.

• • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$

Valgono anche i seguenti limiti fondamentali:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{\pi}{2} - \arccos x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) \cdot x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - 1} = 1$$

Limiti riconducibili ai limiti fondamentali

$$\begin{aligned} \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} &= 1 & \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} &= 1 & \lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} &= e \\ \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} &= 1 & \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} &= 1 & \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{(1+f(x))^k - 1}{f(x)} &= k \end{aligned}$$

Calcolo di due limiti che si presentano sotto forma indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \text{oppure :} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calcolo di limiti che si presentano sotto forma indeterminata

In questo paragrafo faremo veder come , attraverso opportuni accorgimenti e tenendo presente i limiti fondamentali , è possibile calcolare alcuni limiti che si presentano in una delle seguenti 4

forme indeterminate : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$.

In seguito vedremo come si calcolano i limiti che si presentano in una delle tre seguenti forme indeterminate 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

Per le funzioni derivabili è spesso possibile utilizzare un metodo generale (dovuto al matematico francese De L'Hospital) in grado di eliminare le precedenti forme indeterminate senza dovere ricercare quegli opportuni artifici di cui si diceva all'inizio del paragrafo .

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x \cos x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot (1 + \cos x) = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \cdot (1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \cdot (1 - \cos x)}{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 - \cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} \cdot \frac{x}{\tan x} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x}{x \cos x} + 3}{\frac{3 \sin x}{x \cos x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \tan x}{x} + 3}{\frac{3 \tan x}{x} - 2} = \frac{2 + 3}{3 - 2} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3 \cdot \cos x \cdot (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \frac{1}{\cos x \cdot (1 + \cos x)} = 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot (1 + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{\sin^2 3x} = \frac{2}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right)^2 = \frac{2}{9} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + \cos^2 x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x (1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x (1 + \cos x)} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \sqrt[3]{(1 + \sin x)^2}}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2} \cdot (1 + \sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \sqrt[3]{(1 + \sin x)^2}}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{(1 + \sin x)^2}}{\sqrt[3]{\cos x}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^2 + 8x - 13}}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{16 + \frac{8}{x} - \frac{13}{x^2}}}{|x| \cdot \left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \frac{\pm 4}{2} = \pm 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 3} = \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0 + 3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x-2}} = (\text{ho trascurato gli infiniti di ordine inferiore}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Forma indeterminata $+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(x - \sqrt{x}) = (+\infty)(+\infty - 1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)(\sqrt{x^2 - 1} - x)}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \\ &= \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x}} = \frac{-1}{+\infty} = 0- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + px + q} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + px + q} - x)(\sqrt{x^2 + px + q} + x)}{\sqrt{x^2 + px + q} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + px + q - x^2}{\sqrt{x^2 + px + q} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + px + q - x^2}{\sqrt{x^2 + px + q} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{px + q}{\sqrt{x^2 + px + q} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(p + \frac{q}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{p}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 7x - 5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 7x - 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 7x - 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{7}{x} - \frac{5}{x^2}} + 1} = \frac{7}{1 + 1} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 1 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x)(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)} = \frac{1}{+\infty} = 0 +$$

$$\text{Infatti : } (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4 \Rightarrow$$

$$(\sqrt[4]{x^4 + 1} - x)(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x)(\sqrt{x^4 + 1} + x^2) = (x^4 + 1) - x^4 = 1$$

$$\sqrt[4]{x^4 + 1} - x = \frac{1}{(\sqrt[4]{x^4 + 1} + x)(\sqrt{x^4 + 1} + x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(x+1-x)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{9x^3 + 6x^2 - 12x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{9x^3} = \frac{2}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2\cotg 2x - \cotg x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\tg 2x} - \frac{1}{\tg x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tg^2 x}{\tg x} - \frac{1}{\tg x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (-\tg x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \ln \sin 2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{\sin 2x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin 2x} = \ln \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sin 2x} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tg x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tg x (1 - \sin x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \sin x) \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad \frac{1}{x} = t, \quad x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\text{quantità finita}}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{tg} 2x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg} x) \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \operatorname{tg} x &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right] \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{t}{2} \right) \cot g t = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \right) \cot g t = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{\cos t}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Si pone: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - t \\ t = \frac{\pi}{2} - x \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot g^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1 \cdot \frac{1}{0} = \infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{-1}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \right) = \\ &= (+\infty) \cdot (1 + 0) = +\infty \end{aligned}$$