Unità Didattica N°26
Derivata prima di una funzione

01) **Definizione di derivata prima di una funzione**

02) **La continuità nei confronti della derivabilità**

03) **Derivate di ordine superiore**

04) **Significato geometrico di derivata prima**

05) **Angolo di due curve**

06) **Discontinuità della derivata prima**

07) **Significato cinematico di derivata prima**

08) **Derivata prima di alcune funzioni elementari**

09) **Derivata prima della somma algebrica di due o più funzioni**

10) **Derivata del prodotto di due o più funzioni**

11) **Derivata della potenza ennesima di una funzione**

12) **Derivata del quoziente di due funzioni**

13) **Derivata del reciproco di una funzione**

14) **Derivata di una funzione di funzione**

15) **Derivata logaritmica**

16) **Funzioni invertibili**

17) **Derivata della funzione inversa**

18) **La derivata prima delle funzioni inverse delle funzioni circolari**

19) **Tabella delle formule e regole di derivazione**

Definizione di derivata prima di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. Quando la variabile indipendente passa dal valore $x_o \in \text{dom} f$ al valore $x \in \text{dom} f$ essa subisce l'**incremento**

$$\Delta x = x - x_o = h \qquad (x = x_o + h = x_o + \Delta x\ )$$

e, di conseguenza, la funzione $f(x)$ subisce l'*incremento*

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_o) = f(x_o + h) - f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

Il rapporto $\mathbf{R(x_o,\Delta x)=R(x_o,h)=\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\dfrac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}}$ **[1]**

dicesi rapporto incrementale della funzione $f(x)$ relativo al punto x_o ed all'incremento $\Delta x = h$. In particolare, se risulta $\Delta x = h > 0$ $(x > x_o)$, la [1] rappresenta il rapporto incrementale destro, se risulta $\Delta x = h < 0$ $(x < x_o)$, la [1] rappresenta il rapporto incrementale sinistro.

$\mathbf{R^+(x_o,\Delta x)}$ = rapporto incrementale destro,

$\mathbf{R^-(x_o,\Delta x)}$ = rapporto incrementale sinistro

Il rapporto incrementale di una funzione $f(x)$ varia al variare del punto x_o e dell'incremento $\Delta x = h$ [cioè $R^+(x_o,\Delta x)$ è una funzione a due variabili x_o e Δx] e non è definito soltanto nel punto x_o $(h=0)$ dove assume la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.

Tuttavia può esistere finito il seguente limite:

$$\mathbf{\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}} \quad [2]$$

In questo caso diciamo che la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_o e tale limite prende il nome di derivata prima della funzione $f(x)$ nel punto x_o.

Esso può essere indicato con uno dei seguenti simboli:

$y'(x_o)$, $f'(x_o)$ **[dovuto a <u>LAGRANGE</u> nel 1798]**

$D\,y(x_o)$, $D\,f(x_o)$ [dovuto a **<u>CAUCHY</u>** nel 1823]

$\dfrac{d\,y(x_o)}{d\,x}$, $\dfrac{d\,f(x_o)}{d\,x}$ [dovuto a **<u>LEIBNIZ</u>** nel 1823]

$\dot{y}(x_o)$, $\dot{f}(x_o)$ [dovuto a **NEWTON** nel 1686 ed usato in meccanica razionale quando la variabile indipendente è il tempo t]

La derivata prima di una funzione in un punto rappresenta un numero.

$$f'(x_o -) = \lim_{x \to x_o -} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$ = **derivata sinistra** della funzione nel punto x_o

$$f'(x_o +) = \lim_{x \to x_o +} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$ = **derivata destra** della funzione nel punto x_o

Se questi due limiti esistono finiti e sono uguali tra loro [$f'(x_o -) = f'(x_o +)$] diciamo che **esiste la derivata prima** della funzione f(x) nel punto x_o.

Quindi $f(x)$ è derivabile nel punto x_o se $f'(x_o -) = f'(x_o +)$.

Se $f(x)$ è derivabile in ogni punto dell'intervallo $[a,b]$ diciamo che essa è derivabile nell'intervallo $[a,b]$ e scriviamo:

$$\lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad [3]$$

I simboli adottati per la circostanza sono i seguenti :

- $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d f(x)}{dx}$ (Leibniz) usato quando si vuole mettere in evidenza il punto in cui calcolare la derivata.
- $y'(x)$ oppure $f'(x)$ (Lagrange) usato quando vogliamo mettere in evidenza il punto in cui calcolare la derivata
- $D y(x)$ oppure $D f(x)$ (Cauchy) adoperato quando vogliamo mettere in evidenza la funzione da derivare.

Se nel punto $x_o \in dom f$ risulta : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = \pm \infty$ diciamo che la funzione f(x) ammette nel punto x_o la **derivata prima infinita** con segno.

Si parla in questo caso di derivata generalizzata. In ogni caso diciamo che f(x) è derivabile nel punto x_o ed ha ivi derivata infinita se la derivata sinistra e quella destra sono infinite ed hanno lo stesso segno. Il significato fisico di derivata prima sarà messo in evidenza nel prossimo paragrafo .

Quando noi diremo che la funzione f(x) **è derivabile** nel punto x_o intenderemo sempre che il limite [2] esiste finito.

ESEMPI

- $f(x) = 3x^3 - 2x + 3$ calcolare $f'(2)$

$$f(2+h)=3(2+h)^3-2(x+h)=3h^3+18h^2+34h+23 \quad , \quad f(2)=23$$

$$R(2,h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 3h^2 + 18h + 24$$

$$f'(2) = \underset{h\to 0}{Lim}\, R(2,h) = \underset{h\to 0}{Lim}\left(3h^2 + 18h + 24\right) = 24$$

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ calcolare $f'(2)$, $f(h) = \sqrt[3]{h}$, f(0) = 0 , $R(0,h) = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}}$

$$f'(0) = \underset{h\to 0}{Lim}\, R(0,h) = \underset{h\to 0}{Lim}\frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

- $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ calcolare $f'(5)$, $f(5+h) = \frac{5+h-1}{5+h-3} = \frac{h+4}{h+2}$, $f(5)=2$

$$f'(5) = \underset{h\to 0}{Lim}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \underset{h\to 0}{Lim}\frac{-1}{h+2} = -\frac{1}{2}$$

- $D\sqrt{x} = \underset{h\to o}{Lim}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \underset{h\to o}{Lim}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \underset{h\to o}{Lim}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

OSSERVAZIONE

- La derivata prima di una funzione in un punto è un numero, in un intervallo è una funzione
- $\Delta x = x - x_o = h$ = **incremento della variabile indipendente**

$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_o + h) - f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ = **incremento della funzione f(x)** quando la variabile indipendente passa dal valore x_o al valore x

La continuità nei confronti della derivabilità

Teorema: Se la funzione f(x) è derivabile nel punto $x_o \in d\,\mathrm{om}\, f$ essa è continua in tale punto. Questo teorema non è invertibile, cioè f(x) può essere continua nel punto x_o ed essere ivi non derivabile. **Una funzione derivabile è sicuramente continua, mentre una funzione continua può non essere derivabile**.

$$Hp \left\{ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} = f'(x_o) \in R = \text{quantità finita} \right. \qquad Th \left\{ \lim_{h\to 0} f(x_o+h) = f(x_o) \right.$$

Dimostrazione: Consideriamo l'identità $f(x_o+h)=f(x_0)+\frac{h}{h}\left[f(x_o+h)-f(x_o)\right]$ e prendiamo di ambo i membri il limite per $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0} f(x_o+h)=\lim_{h\to 0}\left[f(x_o)+h\cdot\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0} f(x_o)+\lim_{h\to 0} h\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=f(x_o)+0\cdot f'(x_o)=f(x_o)$$

La funzione $f(x) = |x|$ è **continua** nel punto $x=0$ ma non è ivi derivabile.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & se\ x>0 \\ -x & se\ x<0\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0-} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h} \quad , \quad f'(o-) = \lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{-h}{h} = -1 ,$$

$$f'(o+) = \lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{h}{h} = 1 \qquad f'(0-) \neq f'(0+)$$

Possiamo concludere affermando che la funzione $f(x) = |x|$ **non è derivabile** nel punto $x=0$.

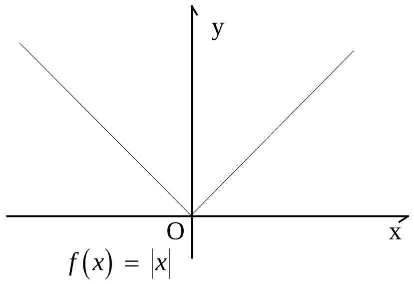
$$f(x) = 2|x|-1 = \begin{cases} 2x-1 & se\ x>0 \\ -2x-1 & se\ x<0\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0\pm}(2|x|-1) = -1 = f(0)$$

La funzione proposta è **continua** nel punto $x=0$.

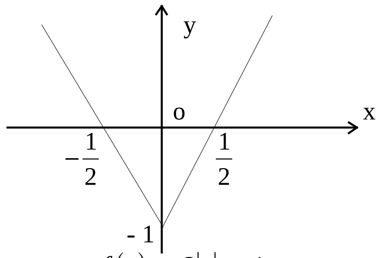
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2|x+h|-1-2|x|+1}{h} = \frac{2|x+h|-2|x|}{h}$$

$$f'(0+) = \lim_{h\to 0+}\frac{2|h|}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{2h}{h} = 2 , \quad f'(0-) = \lim_{h\to 0-}\frac{2|h|}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{-2h}{h} = -2$$

$f'(0-) \neq f'(0+)$ Possiamo concludere affermando che la funzione $f(x) = 2|x| - 1$ non è derivabile nel punto $x=0$. Pertanto la funzione proposta, nel punto $x=0$ è **continua ma non derivabile**.



$f(x) = |x|$



$f(x) = 2|x| - 1$

Osservazione

- Se $f(x)$ è **discontinua** nel punto x_o , allora $f(x)$ è sicuramente **non derivabile** nel punto x_o
- Se $f(x)$ è **continua** nel punto x_o allora f(x) nel punto x_o può essere **sia derivabile che non derivabile**.

Derivate successive o di ordine superiore

Abbiamo visto che la derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ è a sua volta una funzione il cui dominio non coincide sempre con quello di $f(x)$. La funzione $f'(x)$ è derivabile nel suo dominio quando esiste finito il limite [4] $\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

che prende il nome di derivata seconda o derivata del secondo ordine della funzione $f(x)$ e viene indicata con uno dei seguenti simboli:

$$f''(x) \ , \ y''(x) \ , \ D^2 f(x) \ , \ \frac{d^2 y(x)}{d x^2} \ , \ \frac{d^2 f(x)}{d x^2}$$

Quando esiste finito il limite [4] diciamo che la funzione $f(x)$ è **derivabile due volte** nel punto **x** che ammette la derivata seconda nel punto **x** .

La derivata seconda della funzione $f(x)$ può, pertanto, considerarsi come la **derivata della derivata prima della funzione f(x)**.

Ma la $f''(x)$ è, a sua volta, una funzione di **x** per cui, procedendo come prima, possiamo definire la **derivata terza** (o **derivata del terzo ordine**), la derivata quarta (o del quarto ordine),...., la derivata ennesima (o di **ordine n**). Simboli usati:

$$f^{(n)}(x), \ y^{(n)}(x), \ D^n y(x), \ D^n f(x), \ \frac{d^n y(x)}{d x^n}, \ \frac{d^n f(x)}{d x^n}$$

Le derivate successive possono essere indicate anche con i seguenti simboli:

$$f'(x) \ , \ f''(x) \ , \ f'''(x) \ , \ f^{IV}(x) \ , \ f^{V}(x) \ , \ ..... , \ f^{(n)}(x)$$

Significato geometrico di derivata prima

La nozione di derivata prima è intimamente connessa col problema della definizione di **retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto**.

Sia $P_o\left[x_o, f\left(x_o\right)\right]$ un punto della curva piana γ di equazione y = f(x) . Sia $P\left[x, f\left(x\right)\right]$ il punto del grafico γ della funzione f(x) di ascissa x. Detta ϑ(x) la misura in radianti dell'angolo di cui deve ruotare in senso antiorario la direzione positiva dell'asse delle ascisse per sovrapporsi alla secante P_oP, definiamo retta tangente alla curva γ nel punto di ascissa x_o la retta t, se esiste, posizione limite della retta secante P_oP quando il punto P, muovendosi lungo la curva γ, tende a P_o. Tenendo presente la figura, dopo semplici considerazioni deduciamo:

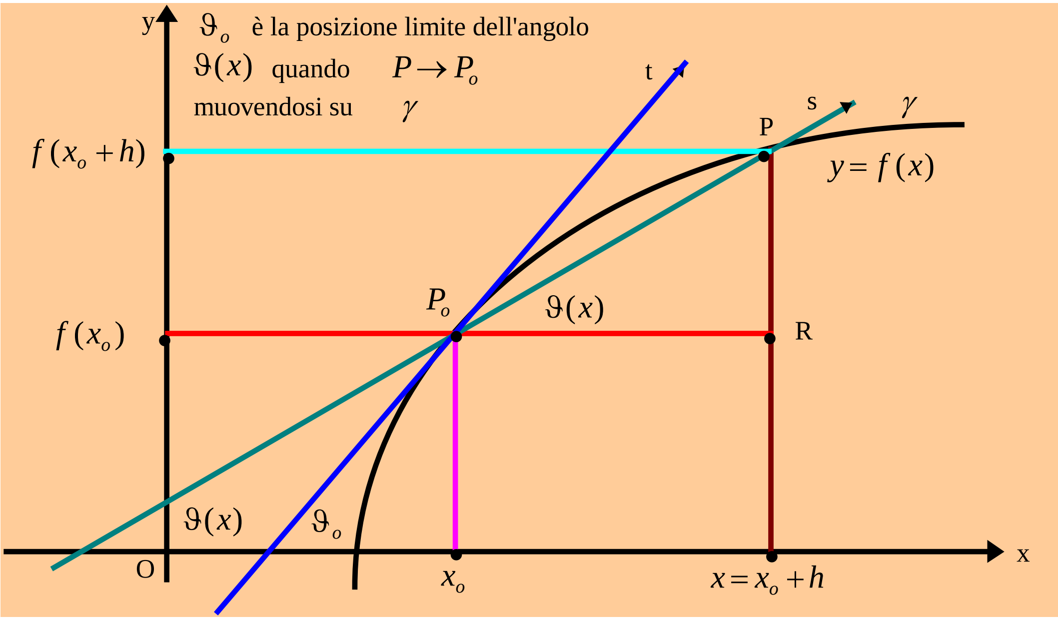
[5] $$\mathbf{tg}\,\vartheta(\mathbf{x}) = \frac{\overline{\mathbf{PR}}}{\overline{\mathbf{P_oR}}} = \frac{\mathbf{f}\left(\mathbf{x_o}+\mathbf{h}\right)-\mathbf{f}\left(\mathbf{x_o}\right)}{\mathbf{h}}$$

cioè il rapporto incrementale della funzione f(x) relativo al punto x_o ed all'incremento h rappresenta il **coefficiente angolare** della retta secante P_oP. Adesso supponiamo che la curva piana γ ammetta la tangente nel punto $P_o\left[x_o, f\left(x_o\right)\right]$, cioè supponiamo che t sia la posizione limite della secante P_oP quando P tende a P_o muovendosi lungo la curva γ. Sotto queste ipotesi possiamo scrivere: $\vartheta_o = \vartheta(x_o) = \underset{P\to P_o}{Lim}\ \vartheta(x)$ cioè $tg \lim\limits_{P\to P_o}\vartheta(x) = tg\,\vartheta_o$ $\lim\limits_{P\to P_o} tg\,\vartheta(x) = tg\,\vartheta_o = m_t$

Tenendo presente la [5] abbiamo:

[6] $$\mathbf{m_t} = \mathbf{tg}\,\vartheta_{\mathbf{o}} = \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{\mathbf{f}\left(\mathbf{x_o}+\mathbf{h}\right)-\mathbf{f}\left(\mathbf{x_o}\right)}{\mathbf{h}} = \mathbf{f}'\left(\mathbf{x_o}\right)$$

cioè la derivata prima $f'\left(x_o\right)$ della funzione f(x) nel punto x_o rappresenta il **coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f(x) nel punto di ascissa** x_o.



Si può dimostrare che quando esiste finito il limite **[6]** esiste la tangente al grafico della funzione f(x) nel punto di ascissa x_o , e viceversa. Possiamo concludere affermando che **condizione necessaria e sufficiente** perché il grafico della funzione f(x) ammetta la tangente nel punto di ascissa x_o è che esista finito il seguente limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

cioè il fatto geometrico dell'esistenza della tangente ad una curva di equazione $y=f(x)$ nel suo punto di ascissa x_o equivale al fatto analitico dell'esistenza del limite **[6]**.

L'equazione della retta tangente t alla curva γ di equazione $y=f(x)$ nel suo punto di ascissa x_o é :

[7] $$\mathbf{y - f(x_o) = f'(x_o)\cdot(x - x_o)}$$

mentre quella della retta normale alla curva γ nel punto Po di ascissa x_o (retta perpendicolare alla tangente a γ in P_o) é:

[8] $$\mathbf{y - f(x_o) = \frac{-1}{f'(x_o)}\cdot(x - x_o)}$$

Osservazione

● Se risulta $f'(x) = \infty$ la funzione ha **derivata infinita** (o **generalizzata**) nel punto x_o.

In questo caso la retta t, tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa x_o, è perpendicolare all'asse delle ascisse (tangente verticale).

● Se due curve γ e σ aventi rispettivamente equazioni $y=f(x)$, $y=g(x)$ sono tangenti in un punto P di ascissa x, allora deve aversi simultaneamente:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} P(x,y) \in \gamma \\ P(x,y) \in \sigma \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{le due curve hanno la} \\ \text{stessa tangente nel punto P} \end{cases}$$

<<**Tra le curve di equazione** $y = k e^x$ **determinare quella che risulta tangente alla parabola di equazione** $y = x^2$>>

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} k e^x = x^2 \\ k e^x = 2x \end{cases} \quad [*]$$

Si tratta di un sistema dove le incognite sono il parametro k e l'ascissa x del punto di tangenza delle due curve. Risolvendo il sistema [*] otteniamo: $x = 2$, $k = \dfrac{4}{e^2}$

La curva richiesta ha equazione $y = 4e^{x-2}$ ed è tangente alla parabola $y = x^2$ nel punto $P(2,4)$.

La tangente comune alle due curve ha equazione : y = 4x - 4 .

Angolo di due curve

Sia P un punto comune a due curve γ e σ aventi rispettivamente equazioni: $y = f(x)$ $y = g(x)$.

Si dice **angolo formato dalle due curve nel punto P** l'angolo ϑ determinato dalle tangenti alle due curve nel punto P. Se non è precisato l'orientamento delle due curve, è indifferente la scelta fra l'angolo acuto e quello ottuso. Per la determinazione di tale angolo si procede come segue. Se α e β sono gli angoli che ciascuna retta tangente forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, abbiamo:

$$\vartheta = \alpha - \beta \Rightarrow tg\,\vartheta = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{f'(x) - g'(x)}{1 + f'(x)\cdot g'(x)}$$

Se la scelta dell'angolo formato tra le due curve ricade sull'angolo acuto la formula precedente assume la seguente forma:

$$\vartheta = \mathbf{arctg}\left|\frac{\mathbf{f'(x) - g'(x)}}{\mathbf{1 + f'(x)\cdot g'(x)}}\right|$$

<<**Calcolare la misura dell'ampiezza dell'angolo □ formato dalle curve di equazioni** $y = f(x) = 2^x$ e $y = g(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $x > 0$ >>

Le due curve si tagliano nel punto P(1,2) . $f'(x) = 2^x \ln 2$, $f'(2) = 2\ln 2$

$g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $g'(2) = -1$ $\qquad \vartheta = \mathbf{arctg}\left|\dfrac{\mathbf{1 + 2\ln 2}}{\mathbf{1 - 2\ln 2}}\right| = \approx \mathbf{80^\circ 48'}$

Discontinuità della derivata prima

Ricerca dei punti x dove la funzione è continua ma non derivabile

Può accadere che una funzione f(x) sia nel punto x_o **continua ma non derivabile**. Questo si verifica quando il grafico della funzione f presenta nel punto di ascissa x_o un punto angoloso (**tangente sinistra diversa dalla tangente destra**) oppure una cuspide di prima specie (**tangente sinistra verticale diversa dalla tangente destra verticale** cioè la tangente sinistra è una semiretta coincidente con la tangente destra) o un flesso a tangente verticale (tangente inflessionale verticale) Analizziamo tutti i casi che si possono presentare ricordando, innanzitutto, che una funzione non è derivabile in un punto x_o se non esiste il limite del suo rapporto incrementale relativo al punto x_o, oppure se tale limite esiste ma non è finito.

Quindi f(x) **non è derivabile** nel punto x_o se:

1) $f'(x_o)$ non esiste **2)** $f'(x_o) = \infty$ **3)** $f'(x_o-) \neq f'(x_o+)$

Ricordando che $f'(x_o)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al G(f) nel punto $P_o[x_o, f(x_o)]$, possiamo affermare quanto segue:

1) $f'(x_o)$ non esiste, il G(f) non ammette la retta tangente in $P_o[x_o, f(x_o)]$

2) $f'(x_o) = \infty$, la tangente al G(f) in $P_o[x_o, f(x_o)]$ è **verticale**.

Se f(x) è nel punto x_o **continua ma non derivabile** allora vale quanto segue:

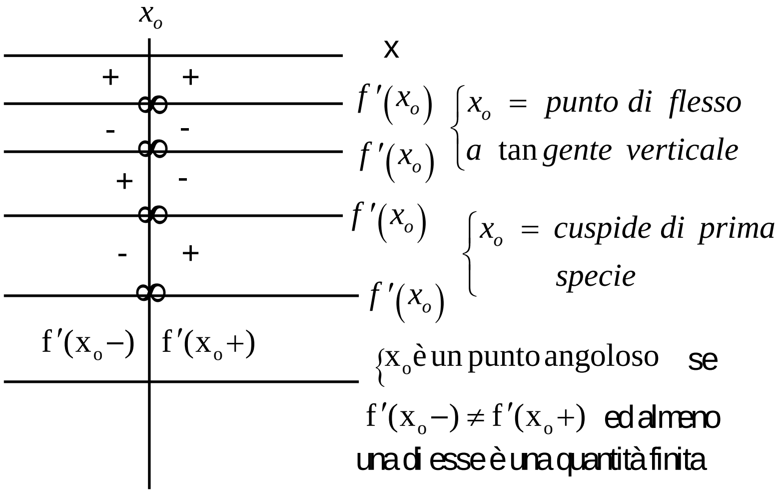
1) $f'(x_o-) \neq f'(x_o+)$,con almeno una delle due derivate , destra o sinistra, diversa da ∞: il grafico della funzione presenta nel punto di ascissa x_o un **punto angoloso**.

2) se $f'(x_o) = \infty$ allora il G(f) presenta nel punto di ascissa x_o :

a) un **flesso a tangente verticale** se $f'(x_o-) = +\infty$ $f'(x_o+) = +\infty$ oppure se $f'(x_o-) = -\infty$ $f'(x_o+) = -\infty$, cioè se il segno di $f'(x_o) = \infty$ non cambia quando la x passa da valori minori di x_o a valori più grandi di x_o In questo caso la tangente destra e la tangente sinistra al G(f) sono semirette opposte e costituiscono una retta tangente verticale (*tangente inflessionale*) .

b) una **cuspide di prima specie** se $f'(x_o-) = +\infty$ $f'(x_o+) = -\infty$ oppure se $f'(x_o-) = -\infty$ $f'(x_o+) = +\infty$, cioè se il segno di $f'(x_o) = \infty$ cambia quando la x passa da valori minori di x_o a valori più grandi di x_o.

Le cose sopraddette possono essere riassunte nel seguente prospetto:



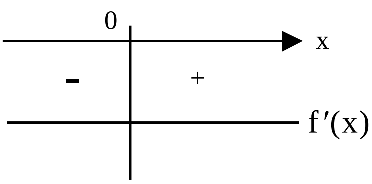
Osservazione

f(x) è **continua** in x_o se $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$

f(x) è **discontinua** in x_o se: 1) $f'(x_o-) \neq f'(x_o+)$ 2) $f'(x_o) = \infty$ 3) $f'(x_o)$ non esiste

Studiare la continuità della derivata prima $f'(x)$ della funzione f(x) ed interpretare le sue eventuali discontinuità nei seguenti casi:

- $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & se\ x<0 \\ 1 & se\ x = 0 \\ e^x & se\ x>0 \end{cases}$ dom $f = R$ $f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & se\ x<0 \\ e^x & se\ x>o \end{cases}$



$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} -e^{-x} = -1$$

$$f'(0+) = \lim_{x \to 0+} e^x = 1$$

La derivata prima presenta nel punto x=0 una **discontinuità di prima specie** $d\,\text{om}\, f' = d\,\text{om}\, f - \{0\}$

La funzione è, nel punto x = 0, **continua ma non derivabile**. Quindi $x=0$ è un punto angoloso per il grafico della funzione.

Equazione della semitangente sinistra:

$$y - f(0) = f'(0-)\cdot(x - 0) \quad , \quad y - 1 = -x \quad , \quad y = -x + 1$$

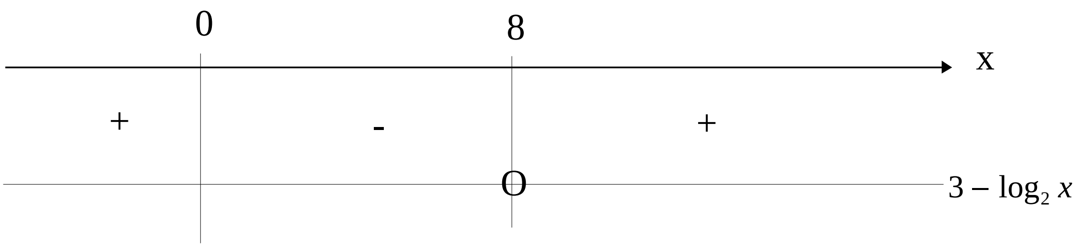
Equazione della semitangente destra:

$$y - f(0) = f'(0+)\cdot(x - 0) \quad , \quad y - 1 = x \quad , \quad y = x + 1$$

- $f(x) = |3 - \log_2 x| + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{8}$, $\qquad d\text{om}\, f = R^+ =]0, +\infty[$

$$3 - \log_2 x > 0 \Rightarrow \log_2 x < 3 \Rightarrow x < 2^3 \Rightarrow 0 < x < 8$$

$$3 - \log_2 x < 0 \Rightarrow \log_2 x > 3 \Rightarrow x > 2^3 \Rightarrow x > 8$$



$$f(x) = \begin{cases} 3 - \log_2 x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{8} & se \ \ 0 < x < 8 \\ \dfrac{\pi}{8} & se \ \ x = 8 \\ -3 + \log_2 x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{8} & se \ \ x > 8 \end{cases}$$

$$f(8) = |3 - \log_2 8| + \operatorname{arctg}\frac{8}{8} = |3 - 3| + \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x\ln 2} + \dfrac{8}{1 + x^2} = \dfrac{-x^2 + 8x\ln 2 - 1}{(1 + x^2)x\ln 2} & se \ \ 0 < x < 8 \\ \dfrac{1}{x\ln 2} + \dfrac{8}{1 + x^2} = \dfrac{x^2 + 8x\ln 2 + 1}{(1 + x^2)x\ln 2} & se \ \ x > 8 \end{cases}$$

$$f'(8-) = \frac{-64 + 64\ln 2 - 1}{520\ln 2} = \frac{-65 + 64\ln 2}{520\ln 2} \qquad f'(8+) = \frac{64 + 64\ln 2 + 1}{520\ln 2} = \frac{65 + 64\ln 2}{520\ln 2}$$

$f'(8-) \neq f'(8+)$ La derivata prima presenta nel punto x = 8 una **discontinuità di prima specie**. $\qquad d\text{om}\, f' = d\text{om}\, f - \{8\}$

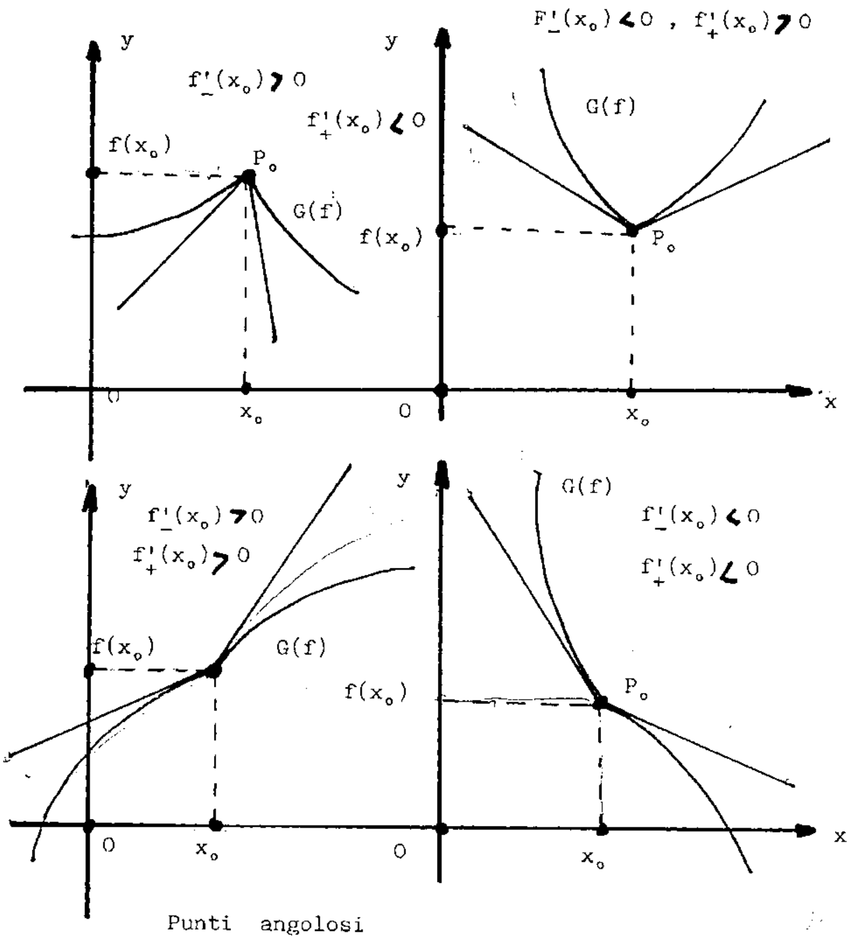
La funzione è, nel punto x = 8, **continua ma non derivabile**. Quindi x = 8 è un **punto angoloso** per il grafico della funzione.

Osservazione

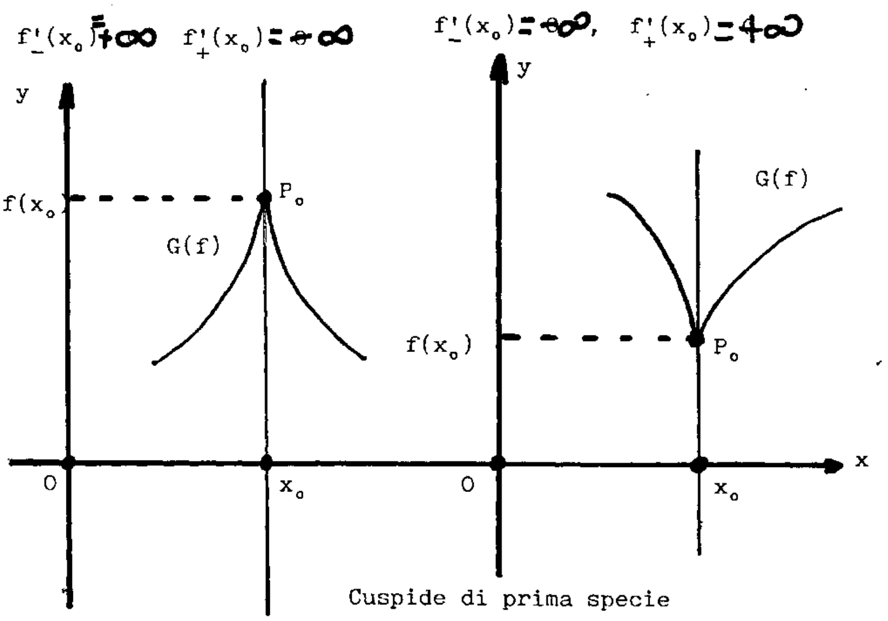
Sia $P_o[x_o, f(x_o)]$ un punto del grafico della funzione f .P_o è un **punto angoloso** per il grafico della funzione f se la **tangente sinistra** è diversa dalla **tangente destra** ed almeno una di esse non è verticale, cioè. P_o è un **punto angoloso** per il grafico della funzione f se la derivata sinistra è diversa dalla derivata destra ed almeno una delle due è una quantità finita.

P_o è una **cuspide di prima specie** per il grafico della funzione f se la **tangente destra e la tangente sinistra** sono la stessa semiretta ed essa è **verticale** .

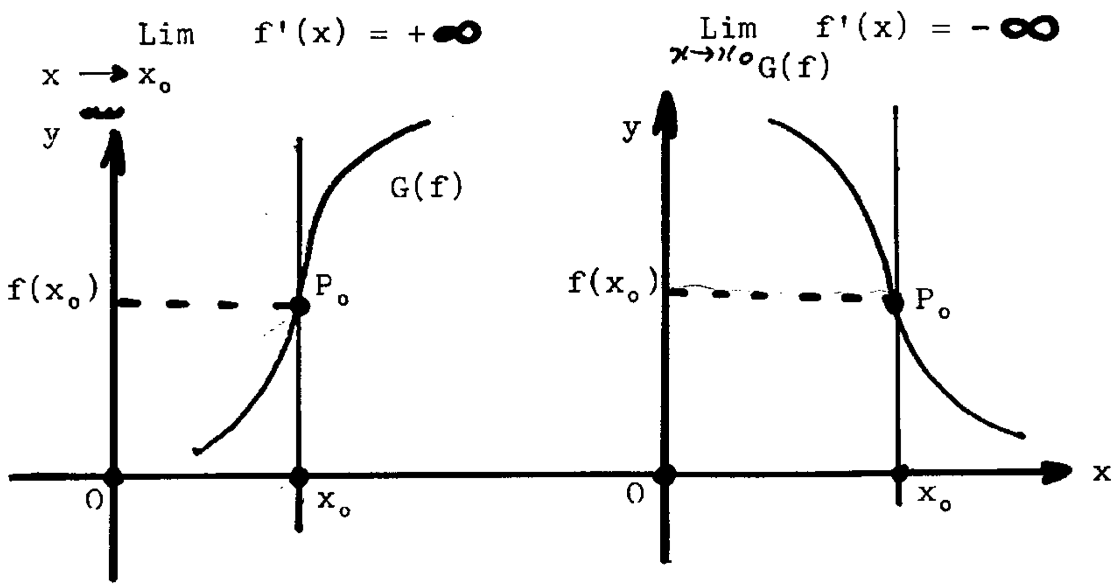
P_o è un **flesso a tangente verticale** se la *tangente destra e la tangente sinistra* sono semirette opposte, cioè se la **tangente inflessionale** è verticale.



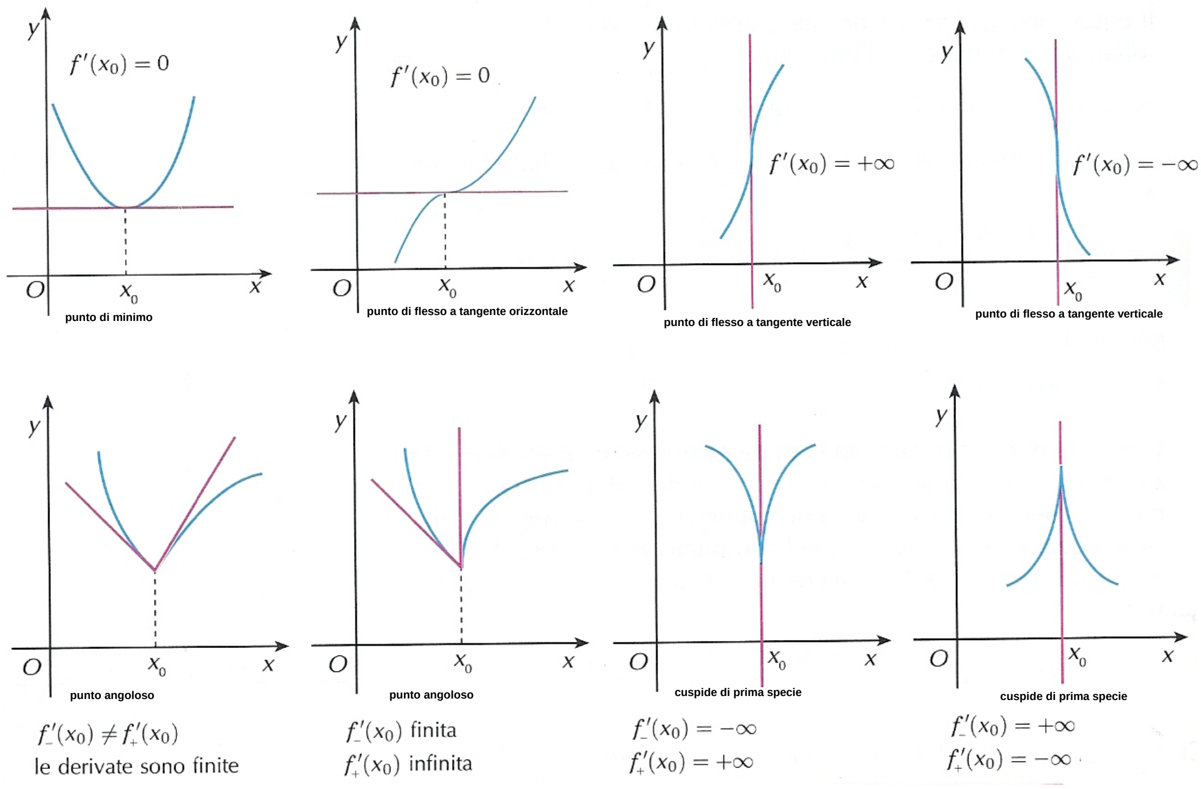
Punti angolosi



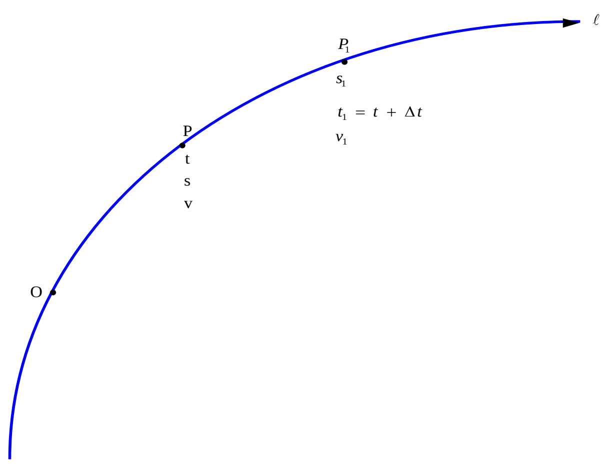
Cuspide di prima specie



Punto di flesso a tangente verticale



Interpretazione cinematica della derivata prima e della derivata seconda



Sia P un punto materiale che si muove su una traiettoria curvilinea ℓ sulla quale fissiamo il verso positivo, l'origine O e l'unità di misura per le lunghezze (che nel S.I. è il metro). La sua posizione all'istante t è individuata dall'ascissa curvilinea s la quale risulta essere funzione del tempo. Sia $s(t)$ la **legge oraria** o **equazione del moto**, cioè $s(t)$ è la funzione che ci consente di individuare la posizione del mobile P all'istante t. All'istante t il punto P occupi la posizione corrispondente all'ascissa curvilinea $s = s(t)$ ed all'istante $t_1 = t + \Delta t$ occupi la posizione corrispondente all'ascissa curvilinea $s_1 = s(t_1) = s(t + \Delta t)$.

Il rapporto : $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

rappresenta la velocità scalare media relativa all'intervallo di tempo Δt .

Per avere la **velocità scalare istantanea** bisogna calcolare il seguente limite:

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

che esprime il limite del rapporto incrementale della funzione s(t) relativo all'istante t ed all'incremento Δt. Tale limite rappresenta la **derivata prima** della funzione s(t) rispetto al tempo, cioè: $$v(t) = s'(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{t_1 \to t} \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

la velocità istantanea di un punto materiale che descrive una traiettoria prestabilita con legge oraria s(t) è la derivata prima della funzione s(t) rispetto al tempo.

In generale, la **velocità istantanea** del punto mobile P(t) è funzione del tempo, cioè $v = v(t)$.

Siano $v(t)$ e $v(t_1) = v(t + \Delta t)$ le velocità del punto mobile P rispettivamente agli istanti t e t_1.

Il rapporto : $$a_m = \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

rappresenta il **rapporto incrementale** della funzione $v(t)$ relativo al tempo t ed all'incremento Δt ed anche l'**accelerazione scalare media** del mobile P relativa all'intervallo di tempo Δt. Per avere l'accelerazione scalare istantanea bisogna calcolare il seguente limite: $$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{t_1 \to t} \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \lim_{t_1 \to t} \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

cioè: l'accelerazione scalare istantanea è la derivata prima della velocità rispetto al tempo oppure la derivata seconda dell'ascissa curvilinea **s** rispetto al tempo.

<<Un punto materiale si muove lungo una traiettoria prestabilita con la seguente legge oraria $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ Calcolare la velocità e l'accelerazione all'istante t>>

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(t+\Delta t)^2-5(t+\Delta t)+2-3t^2+5t-2}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3t^2+3(\Delta t)^2+6t\cdot\Delta t-5t-5\Delta t+2-3t^2+5t-2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(\Delta t)^2+6t\cdot\Delta t-5\Delta t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(6t-5+3\Delta t)$$

$$\mathbf{v(t)=6t-5}$$

$$\mathbf{a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6(t+\Delta t)-5-6t+5}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6\Delta t}{\Delta t}=6}$$

Derivata prima di alcune funzioni elementari

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la definizione di derivata prima e di essa abbiamo dato una interpretazione geometrica ed una fisica.

Adesso calcoliamo la derivata prima di alcune funzioni elementari.

DK = 0 k = costante $\qquad Dk = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$

Dx = 1 $\qquad Dx=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$

$\mathbf{Dx^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}}$ $\quad \forall x\in R^+ \ , \ \forall \alpha\in R-\{0\}$ $\qquad \mathbf{Dx^{n}=nx^{n-1}}$ $\quad \forall x\in R \ , \ \forall n\in Z-\{0\}$

Osservazione

$$(Dx^{\alpha})_{x=0}=\begin{cases}0 & se\ \ \alpha>1\\ 1 & se\ \ \alpha=1\\ +\infty & se\ \ 0<\alpha\ 1\end{cases}$$

$$R(x,h)=\frac{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h}=\frac{\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]^{\alpha}-x^{\alpha}}{h}=\frac{x^{\alpha}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1}{h}=x^{\alpha}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{h}=$$

$$=x^{\alpha-1}\cdot x\cdot\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1}{h}=x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{h}{x}}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}$$

avendo posto $\frac{h}{x}=t \ , \ h\to 0 \Leftrightarrow t\to 0$

$$Dx^{\alpha}=\lim_{h\to 0}R(x,h)=\lim_{h\to 0}x^{\alpha-1}\cdot\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$D\sqrt{x} = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\mathbf{D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$D\sqrt[n]{x} = Dx^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\mathbf{D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

$$\mathbf{D\sqrt[n]{x^m} = Dx^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}}$$

con x angolo misurato in radianti.

La dimostrazione di $Dx^n = nx^{n-1}$ con $n \in Z-\{0\}$ è identica a quella di Dx^α con $\alpha \in R-\{0\}$

$$Dx^n = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n}h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$$

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n =$$

$$nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n}h^n$$

Tenendo presente l'identità:

$$(x^n - y^n) = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$$

1 2 3 .... $n-1$ n

possiamo scrivere:

$$Dx^n = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right]}{h} =$$

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

1 2 3 .... $n-1$ n

$$\mathbf{D\sin x = \cos x}$$

con x angolo misurato in radianti. [1]

$$R(x,h) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} = -\sin x \cdot \sin\frac{h}{2} \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

[1] $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$$D\sin x = \lim_{h\to 0} R(x,h) = -\sin x \cdot \lim_{\frac{h}{2}\to 0} \sin\frac{h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\sin h}{h} = \cos x$$

Altra dimostrazione

$$R(x,h) = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$D\sin x = \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

$D\cos x = -\sin x$ con x angolo misurato in radianti. ([2])

$$R(x,h) = \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cdot\cosh+\sinh\cdot\sin x-\cos x}{h} = \frac{-\cos x(\cosh-1)+\sinh\cdot\cos x}{h} =$$

$$= -\cos x\cdot\sin\frac{h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} - \sin x\cdot\frac{\sin h}{h}$$

$$D\cos x = \lim_{h\to 0}R(x,h) = -\cos x\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\sin\frac{h}{2}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x$$

Altra dimostrazione

$$R(x,h) = \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$D\cos x = \lim_{\frac{h}{2}\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right] = -\sin x$$

$$\mathbf{D\,tg\,x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) \Rightarrow \sin(x+h)\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x+h) + \frac{1}{2}\sin h$$

---

[2] $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$

$$\sin x\cos(x+h) = \frac{1}{2}\sin(2x+h) + \frac{1}{2}\sin(-x) = \frac{1}{2}\sin(2x+h) - \frac{1}{2}\sin x$$

$$R(x,h) = \frac{tg(x+h) - tg\,x}{h} = \frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x\cos(x+h)}{h\cos x\cos(x+h)} = \frac{1}{\cos x\cos(x+h)}\cdot\frac{\sin h}{h}$$

$$D\,tg\,x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos x\cos(x+h)}\cdot\frac{\sin h}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Altra dimostrazione

$$tg(x+h) - tg\,x = \frac{tg\,x + tg\,h}{1 - tg\,x\,tg\,h} - tg\,x = \frac{tg\,x + tg\,h - tg\,x + tg^2 x\,tg\,h}{1 - tg\,x\,tg\,h} = tg\,h\cdot\frac{1 + tg^2 x}{1 - tg\,x\,tg\,h}$$

$$D\,tg\,x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{tg(x+h) - tg\,x}{1 - tg\,x\,tg\,h} = \lim_{h\to 0}\frac{tg\,h}{h}\cdot\frac{1 + tg^2 x}{1 - tg\,x\,tg\,h} = 1 + tg^2 x$$

$$\mathbf{D\,cotg\,x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + cotg^2 x\right)}$$

$$\cot g(x+h) - \cot g\,x = \frac{\sin x\cos(x+h) - \cos x\sin(x+h)}{\sin x\sin(x+h)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin(2x+h) - \frac{1}{2}\sin h - \frac{1}{2}\sin(2x+h) - \frac{1}{2}\sin h}{\sin x\sin(x+h)} = \frac{-\sin h}{\sin x\sin(x+h)}$$

$$D\cot g\,x = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\sin x\sin(x+h)} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Altra dimostrazione

$$\cot g(x+h) - \cot g\,x = \frac{\cot g\,x\cot g\,h - 1}{\cot g\,x + \cot g\,h} - \cot g\,x =$$

$$= \frac{\cot g\,x\cot g\,h - 1 - \cot g^2 x - \cot g\,x\cot g\,h}{\cot g\,x + \cot g\,h} = \frac{-1 - \cot g^2 x}{\cot g\,x + \cot g\,h}$$

$$D\cot g\,x = \lim_{h\to 0}\frac{-1 - \cot g^2 x}{h(\cot g\,x + \cot g\,h)} = -\left(1 + \cot g^2 x\right)\lim_{h\to 0}\frac{tg\,h}{h(tg\,h\cot g\,x + 1)} = -\left(1 + \cot g^2 x\right)$$

$\mathbf{Da^x = a^x \ln a}$ $$D a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\frac{a^h - 1}{h} = a^x\ln a = \quad a = e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{De^x = e^x}$$

$$D\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$

Dimostriamo innanzitutto che: $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$

$$\log_a e = x \Rightarrow e \Rightarrow \ln a^x = \ln e \Rightarrow x\ln a = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\ln a} \Rightarrow \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$R(x,h) = \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{h} = \frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\frac{x}{h} = t \ , \ h\to 0 \Leftrightarrow t\to\infty \ , \ \frac{h}{x} = \frac{1}{\frac{x}{h}} = \frac{1}{t}$$

$$R(x,h) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

$$D\log_a x = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x}\log_a \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \ ) \ \frac{1}{x}\log_a e$$

$a=e \Rightarrow$ $\quad D\ln x = \frac{1}{x}$ $\quad D\log_a|x| = \frac{1}{x\ln a}$ $\quad D\ln|x| = \frac{1}{x}$

$$\log_a|x| = \begin{cases}\log_a(-x) & se \ \ x<0 \\ \log_a x & se \ \ x>0\end{cases} \qquad D\log_a(-x) = \frac{1}{(-x)\ln a}D(-x) = \frac{1}{x\ln a}$$

$$D\log_a|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{\ln a} \qquad D\log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad D|f(x)| = \frac{f(x)}{|f(x)|}\cdot f'(x)$$

$$D\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}$$

$|f(x)|^2 = [f(x)]^2$ Derivando ambo i membri otteniamo:

$$2|f(x)|D|f(x)| = 2f(x)f'(x) \qquad D|f(x)| = \frac{f(x)}{|f(x)|}\cdot f'(x) \qquad \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases}+1 & se \ \ f(x)>0 \\ -1 & se \ \ f(x)<0\end{cases}$$

Regole di derivazione

Derivata della somma algebrica di due o più funzioni

La derivata della somma algebrica di un numero finito di funzioni è uguale alla somma algebrica delle derivate delle singole funzioni.

$$\mathbf{D[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)}$$

$$D[f(x) \pm g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$$

$$D\left(x^8 - x^4 + 5x^2 + 2\right) = 8x^7 - 4x^3 + 10x \quad , \quad D(\sin x + \cos x) = \cos x - \sin x$$

Derivata del prodotto di due o più funzioni

La derivata del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto della derivata della prima funzione per la seconda più il prodotto della prima funzione per la derivata della seconda. $\mathbf{Df(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

$$D\, f(x)g(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$D\sin x\cos x = \cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

Nel caso in cui risulta $g(x) = k$ otteniamo: $\mathbf{Dkf(x) = k\,Df(x) = k\,f'(x)}$

cioè una **costante moltiplicativa può essere portata fuori dal simbolo di derivata**.

La regola ricavata per il prodotto di due funzioni può essere estesa al prodotto di un numero finito di funzioni. $\mathbf{Df(x)g(x)h(x) = f'(x)g(x)h(x) + g'(x)f(x)h(x) + h'(x)f(x)g(x)}$

cioè ***la derivata del prodotto di tre (n) funzioni è uguale alla somma di 3 (n) addendi ciascuno dei quali è il prodotto di due (n-1) delle date funzioni per la derivata della funzione rimanente.***

Derivata della potenza ennesima di una funzione

$$\mathbf{D[f(x)]^n = n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)}$$

$$D\cos^3 x = 3\cos^2 x D\cos x = -3\sin x\cdot\cos^2 x \quad , \quad D\ln^3 x = \left(3\ln^2 x\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3\ln^2 x}{x}$$

$$D[f(x)]^n = D[\underset{1}{f(x)}\cdot\underset{2}{f(x)}\cdot\underset{3}{f(x)}\cdots\cdots\underset{n-1}{f(x)}\cdot\underset{n}{f(x)}] =$$

$$= \underset{1}{f'(x)\cdot[f(x)]^{n-1}} + \underset{2}{f'(x)\cdot[f(x)]^{n-1}} +\cdots\cdots+ \underset{n}{f'(x)\cdot[f(x)]^{n-1}} = n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

tale formula è valida se $n \in Z$ ed $f(x) \neq 0$, è valida se $n \in R$ ed $f(x) > 0$

$$y = [f(x)]^n \quad\Rightarrow\quad \ln y = n\cdot\ln f(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{y'(x)}{y(x)} = n\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} \quad\Rightarrow$$

$$y'(x) = D[f(x)]^n = n\cdot y(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} = n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

Derivata del quoziente di due funzioni

$$\mathbf{D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(x+h)f(x)}{h} =$$

$$= \underset{h\to 0}{Lim}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\underset{h\to 0}{Lim}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$D\,tg\,x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$D\cot g\,x = D\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot g^2 x\right)$$

Derivata dell'inverso di una funzione

$$\mathbf{D\frac{1}{g(x)} = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Si ottiene ponendo nella formula precedente $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$

Altra dimostrazione

$$D\frac{1}{g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x) - g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-[g(x+h) - g(x)]}{h} = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = D\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{1}{g(x)}D\,f(x) + f(x)\,D\frac{1}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

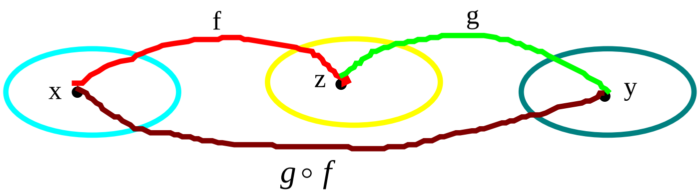
$$D\frac{1}{e^x} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = \frac{-1}{e^x} = -e^{-x} \quad , \quad D\frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$D\sec x = D\frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = tg\,x\sec x \ , \ D\mathrm{cosec}\,x = D\frac{1}{\sin x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \cot g\,x\,\mathrm{cosec}\,x$$

Teorema di derivazione delle funzioni composte

Le funzioni univoche $f: x \to z$, $g: z \to y$, che possono essere indicate anche con i seguenti simboli: $y = g(z)$, $z = f(x)$ individuano la **funzione composta**

$$y = g \circ f = g[f(x)] = F(x) \ .$$



TEOREMA

Se g è **derivabile** rispetto a z ed f è **derivabile** rispetto ad x, allora la funzione composta $y = g \circ f = g[f(x)] = F(x)$ è **derivabile** rispetto ad x e la sua derivata è uguale al prodotto delle derivate delle funzioni componenti.

Precisamente la **derivata di y** (cioè di F) **rispetto ad x è uguale al prodotto della derivata di g rispetto a z per la derivata di f rispetto ad x**.

In simboli abbiamo : $\mathbf{y'(x) = F'(x) = g'(z)\cdot f'(x) = \frac{dg}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}}$

$$\text{Hp} = \begin{cases} g'(z) = \lim_{k\to 0} \dfrac{g(z+k) - g(z)}{k} & \textit{esiste finita} \\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} & \textit{esiste finita} \end{cases}$$

Dimostrazione

Quando la variabile indipendente passa dal valore x al valore x + h , la funzione f passa dal valore $z = f(x)$ al valore $z_1 = f(x+h)$, mentre la funzione composta $g \circ f = F$ passa dal valore $F(x) = g[f(x)]$ al valore $F(x+h) = g[f(x+h)]$.

Ponendo $k = f(x+h) - f(x)$ ricaviamo : $f(x+h) = f(x) + k = z + k$

Ricordando che $f(x)$, essendo derivabile è anche continua, ricaviamo :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

e quindi : $\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x)] = \lim_{h\to 0} k = 0$ cioè : $h\to 0 \Rightarrow k \to 0$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{h} =$$

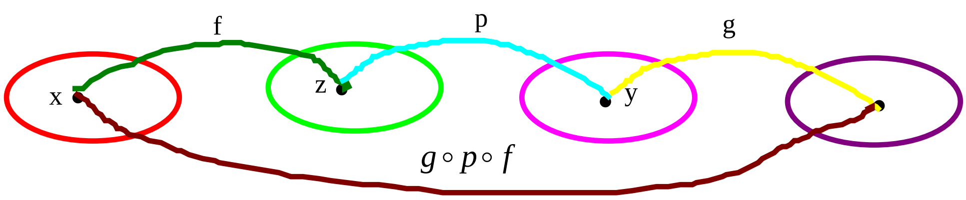
$$= \lim_{h\to 0}\frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)}\cdot\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{g(z+k) - g(z)}{k}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(z)\cdot f'(x)$$

Osservazione

Osservazione: La dimostrazione effettuata non ha carattere generale in quanto dobbiamo supporre $k \neq 0 \ \forall h \neq 0$ .La dimostrazione completa sarà data successivamente.

Il teorema continua a sussistere anche quando le funzioni componenti sono più di due.



Le funzioni univoche $y = g(z)$, $z = p(u)$, $u = f(x)$ individuano la funzione composta $g \circ p \circ f = g\{p[f(x)]\} = F(x)$. Risulta: $\mathbf{F'(x) = g'(z)\cdot p'(u)\cdot f'(x)}$

$y = \ln \sin x \quad [y = \ln z \ , \ z = \sin x] \quad y'(x) = (D\ln u)\cdot(D\sin x) = \dfrac{1}{u}\cdot\cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot g\, x$

Regola pratica

Nella pratica, per derivare una **funzione composta**, non è necessario individuare le funzioni componenti per derivarle separatamente e poi moltiplicarle fra loro. Si può procedere in base alla **seguente regola pratica**. **La derivata di una funzione composta è uguale alla derivata della prima funzione (da sinistra verso destra) rispetto alla seconda (considerata come variabile indipendente) per la derivata della seconda rispetto alla terza (considerata come variabile indipendente) e cosi di seguito fino alla derivata dell'ultima funzione componente rispetto alla variabile indipendente x.**

$$D\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1}{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot D\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{2\sin x}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sin x}$$

$$D\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot D\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{D\left(1+x^2\right)}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Abbiamo dimostrato che: $f(x+h)=f(x)-h\cdot f'(x)+\varepsilon h$ con $\lim_{h\to 0}\varepsilon=0$, cioè con ε **infinitesimo** per $h\to 0$. Sapendo che:

$$k=f(x+h)-f(x)=h\cdot f'(x)+\varepsilon h=h[f'(x)+\varepsilon]$$

deduciamo che : $h\to 0 \;\Rightarrow\; k\to 0$

$$g(z+k)=g(z)+k\cdot g'(z)+k\varepsilon_1 \qquad \text{con} \qquad \lim_{k\to 0}\varepsilon_1=0$$

$$\frac{g(z+k)-g(z)}{k}=\frac{k[g'(z)+\varepsilon_1]}{k}=\frac{k[f'(x)+\varepsilon]\cdot[g'(z)+\varepsilon_1]}{k}=[g'(z)+\varepsilon_1]\cdot[f'(x)+\varepsilon]$$

Prendendo di ambo i membri il limite per $h\to 0$ ( ) otteniamo :

$$F'(x)=\lim_{k\to 0}[\underset{\substack{\downarrow\\ g'(z)}}{g'(z)}+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\varepsilon_1}]\cdot[\underset{\substack{\downarrow\\ f'(x)}}{f'(x)}+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\varepsilon}]=g'(z)\cdot f'(x)$$

Derivata logaritmica

L'operazione di derivazione del logaritmo di una funzione è detta **derivazione logaritmica**.

Se f(x) è una data funzione positiva, la derivata del logaritmo di f(x) è data dalla seguente formula:

$$D \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

che prende il nome di **derivata logaritmica della funzione f(x)**. Quindi si chiama **derivata logaritmica** di una funzione positiva f(x) la derivata del logaritmo naturale della funzione.

La formula precedente può essere scritta anche nella seguente maniera:

$$\mathbf{f'(x) = f(x) \cdot D \ln f(x)}$$

Qualora f(x) non fosse ovunque positiva, allora dovremmo scrivere:

$$\mathbf{D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}} \qquad [*]$$

Una funzione avente la forma $f(x) = [p(x)]^{g(x)}$ [**] [p(x) > 0]

dove la base e l'esponente sono entrambi funzioni della variabile indipendente x è detta **funzione composta esponenziale**.

Possiamo derivare una simile funzione applicando la [*]. Troviamo:

$$f'(x)=[p(x)]^{g(x)} \cdot D\ln[p(x)]^{g(x)}=[p(x)]^{g(x)} \cdot D[g(x) \cdot \ln p(x)]=[p(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\ln x+g(x)\frac{p'(x)}{p(x)}\right]$$

Ma la funzione [**] può essere derivata anche in base alle seguenti considerazioni . Prendo il logaritmo naturale di ambo i membri . $\ln f(x) = \ln[p(x)]^{g(x)}$ $\quad \ln f(x) = g(x)\ln p(x)$

Derivo ambo i membri rispetto ad x: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)\ln p(x) + g(x)\dfrac{p'(x)}{p(x)}$

$$\mathbf{f'(x) = [p(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln p(x) + g(x)\frac{p'(x)}{p(x)}\right]} \qquad [***]$$

$$D x^x = x^x D\ln x^x = x^x(1 + \ln x) \quad D x^x = D e^{\ln x^x} = D e^{x\ln x} = e^{x\ln x} D(x\ln x) = x^x(1 + \ln x)$$

$$y=x^x \Rightarrow \ln y = x\ln x \quad \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = 1 + \ln x \ , \ y'(x) = y(1 + \ln x) \quad f'(x) = x^x(1 + \ln x)$$

Osservazione

- La funzione $f(x) = [p(x)]^{g(x)}$ è detta **funzione esponenziale composta** o **funzione potenza**.

- Se, per derivare una funzione potenza , non vogliamo applicare direttamente la [***] , abbiamo altre due possibilità:

1) si applica il metodo della derivata logaritmica

2) si prende il logaritmo di ambo i membri e si deriva rispetto ad x sia il primo membro che il secondo.

● E' conveniente applicare la derivata logaritmica o un metodo equivalente quando la funzione f(x) da derivare è il prodotto di due o più funzioni. $f(x) = 2^x \sqrt{x^2 + 4}\, sin^2 x$

Prendo il logaritmo naturale di ambo i membri $\ln f(x) = x \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + 2 \ln sin x$

Derivo ambo i membri rispetto ad x: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2 + \frac{x}{x^2 + 4} + 2 \cot g\, x$

$$\mathbf{f'(x) = 2^x \sqrt{x^2 + 4}\, sin^2 x \left(\ln 2 + \frac{x}{x^2 + 4} + 2 cotg\, x \right)}$$

● Usando la **derivata logaritmica** possiamo dimostrare che: $\mathbf{Dx^n = nx^{n-1}}$

$x > 0 \Rightarrow y = x^n \Rightarrow \ln y = \ln x^n \Rightarrow \ln y = n \ln x \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{n}{x}$,

$y'(x) = y(x)\frac{n}{x} = x^n \frac{n}{x} = n x^{n-1}$

$x < 0 \Rightarrow y = x^n = (-1)^n \cdot (-x)^n \Rightarrow y'(x) = n x^{n-1}$

● $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $\ln y = \frac{1}{n}\ln x$, $\frac{y'(xn\, x)}{y(x)} =$, $y'(x) = \frac{x^{1/n}}{nx} = \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

● $y = (sin x)^{sin x}$ [sin x > 0] $\ln sin x = sin x \cdot \ln sin x$ $\frac{y'(x)}{y(x)} = \cos x \cdot \ln sin x - sin x \cdot \frac{\cos x}{sin x}$

$$\mathbf{y'(x) = (sin\, x)^{sin\, x} [cos\, x(1 + \ln sin\, x)]}$$

● $y = (x^3 + 1)^{x^2 - 1}$ $[\ x^3 + 1 > 0]$, $\ln y = (x^2 - 1)\ln(x^3 + 1)$,

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2x\ln(x^3 - 1) + (x^2 - 1)\frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

$$\mathbf{y'(x) = (x^3 + 1)^{x^2 - 1}\left[2x\ln(x^3 - 1) + \frac{3x^2(x^2 - 1)}{x^3 + 1}\right]}$$

Funzioni invertibili

Sia $y = f(x)$ una funzione univoca definita e continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. Questo significa che ad ogni $x \in [a,b]$ corrisponde una sola immagine

$y = f(x) \in codm\, f = [m, M]$. Secondo i canoni della matematica moderna una simile funzione viene indicata nella seguente maniera: $\mathbf{f : [a,b] \longrightarrow [m,M]}$

(e si legge: ***f* è una funzione di** $[a,b]$ **in** $[m,M]$) oppure:

$$\mathbf{f : x \in [a,b] \longrightarrow y = f(x) \in [m,M]}$$

(e si legge: ***f* è la funzione che all'elemento x dell'intervallo** $[a,b]$ **associa l'elemento** $y = f(x)$ **dell'intervallo** $[m,M]$, dove f(x) è l'immagine dell'elemento x tramite la funzione f, $y = f(x)$ è l'equazione cartesiana del grafico G(f) della funzione f. In generale, una funzione univoca f non definisce una **funzione inversa** f^{-1}, in quanto ad ogni **immagine** $f(x) \in \mathrm{codom\, f}$ corrispondono più **controimmagini** $x \in [a,b]$. Se γ è il **grafico** della funzione f osserviamo dalla figura [2] che al valore $x_o \in [a,b]$ corrisponde un solo valore $\mathrm{y_o} \in \mathrm{codom\, f}$, mentre al valore $\mathrm{y_o} \in \mathrm{codom\, f}$ corrispondono i valori $x_o, x_1, x_2 \in [a,b]$. Vediamo se, ed a quali condizioni, una funzione univoca f(x) è invertibile. Una funzione è **invertibile** solo se essa è una **corrispondenza biunivoca**. Questo si verifica sicuramente se f è una **funzione strettamente monotona**, cioè se è **strettamente crescente** o **strettamente decrescente**.

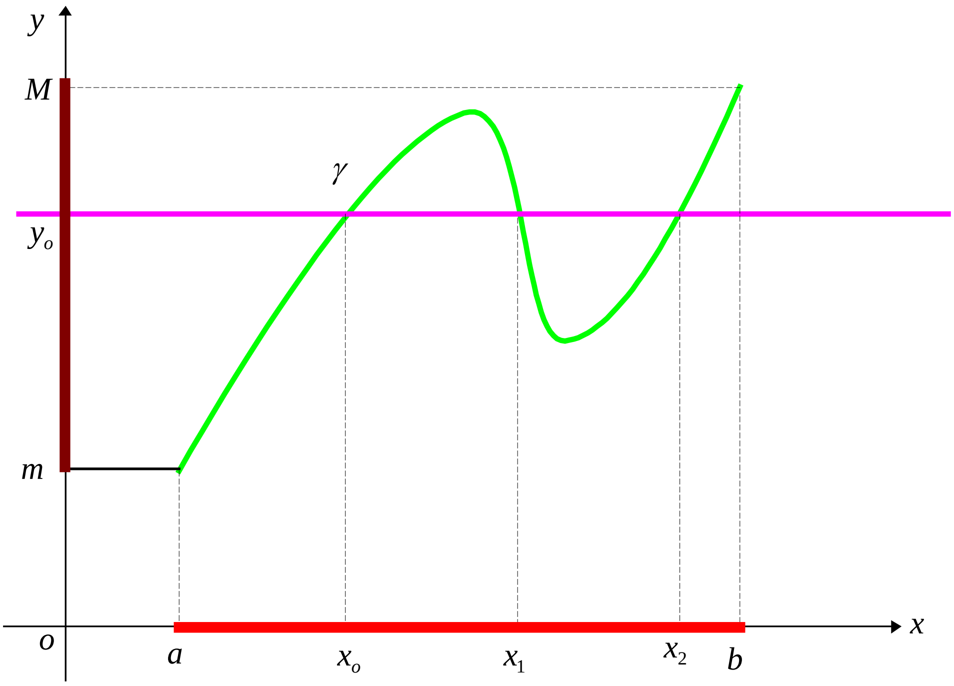
TEOREMA

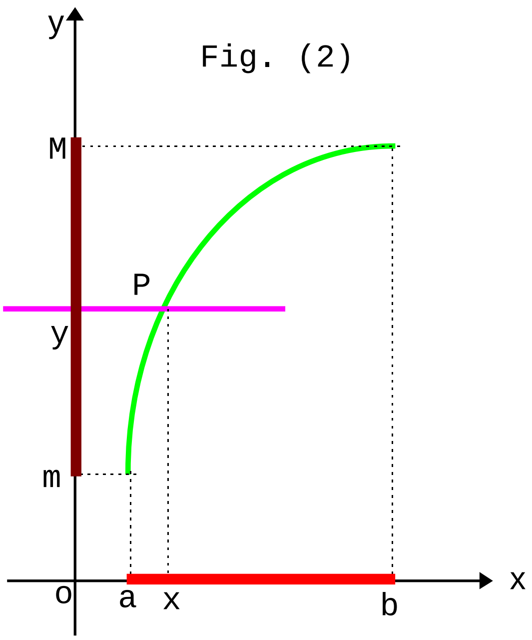
Una funzione *f*(x) continua e strettamente monotona (cioè strettamente crescente o strettamente decrescente) in $[a,b]$ **è ivi invertibile.**

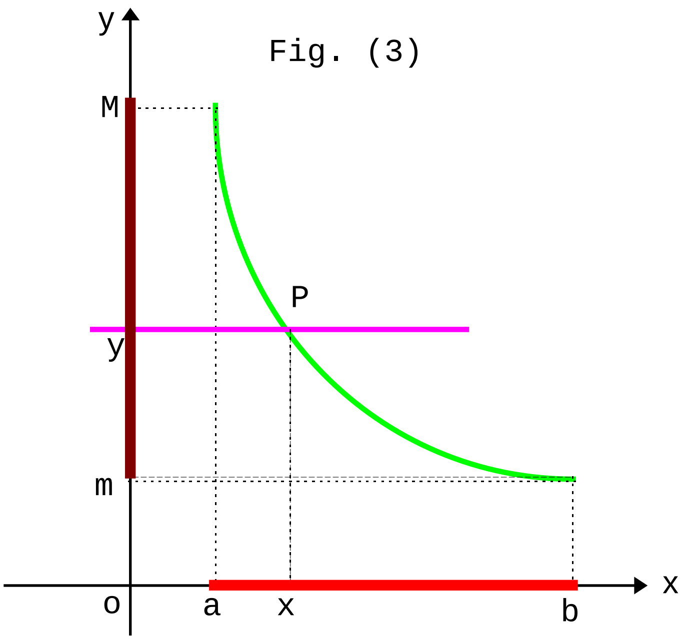
La funzione inversa f^{-1} è, a sua volta, **strettamente monotona** (cioè strettamente crescente o strettamente decrescente). Infatti, se f(x) è **strettamente monotona** (vedere le figure [2] e [3]) ad ogni valore di $x \in [a,b]$ corrisponde un solo valore di $\mathrm{y_o} \in \mathrm{codom\, f}$, mentre ad ogni valore di $y \in [m,M]$ corrisponde un solo valore di $x \in [a,b]$, cioè la funzione f **definisce una corrispondenza biunivoca** tra gli insiemi $[a,b]$ ed $[m,M]$.

Diciamo anche che l'insieme $[a,b]$ è in **corrispondenza biunivoca** con l'insieme $[m,M]$ tramite f. Se la funzione f non è strettamente monotona in $[a,b]$ esistono sempre intervalli parziali $[c,d]$ contenuti in $[a,b]$ dove f è strettamente monotona.

Si dice che la funzione f è localmente invertibile in $[c,d]$.







Se la funzione $y = f(x)$ [□] è **invertibile**, allora la funzione inversa si indica col seguente simbolo: $x = f^{-1}(y) = g(y)$ [□□]

o, utilizzando il simbolismo della matematica moderna,

$$f^{-1} : y \in [m, M] \longrightarrow x = f^{-1}(y) = g(y) \in [a, b]$$

La [□□] si ottiene risolvendo l'equazione [□] rispetto alla variabile x, e viceversa.

Risulta : $\text{dom } f^{-1} = \text{codom } f \qquad \text{codom } f^{-1} = \text{dom } f$

$x = f^{-1}(y) = f^{-1}[f(x)] \qquad y = f(x) = f[f^{-1}(y)]$

cioè **i simboli di due funzioni una inversa dell'alta si cancellano mutuamente**.

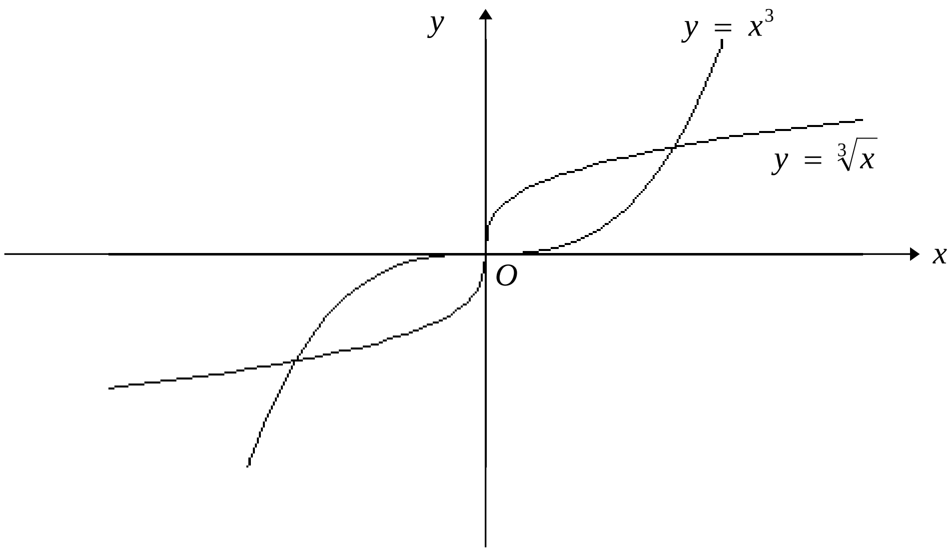
Le due seguenti funzioni $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y) = g(y)$, una inversa dell'altra, hanno lo **stesso grafico**. Se nell'equazione [□□] scambiamo la x con la y e la y con la x otteniamo la funzione $y = f^{-1}(x)$. Si tratta sempre della **funzione inversa** della funzione $y = f(x)$ ma, questa volta, il grafico della funzione $f(x)$ non coincide col grafico della funzione $f^{-1}(x)$.

Tuttavia esiste una relazione semplice tra i diagrammi delle funzioni una inversa dell'altra $y = f(x)$ ed $y = f^{-1}(x)$. Essi sono **simmetrici tra loro** rispetto alla bisettrice fondamentale degli assi cartesiani.

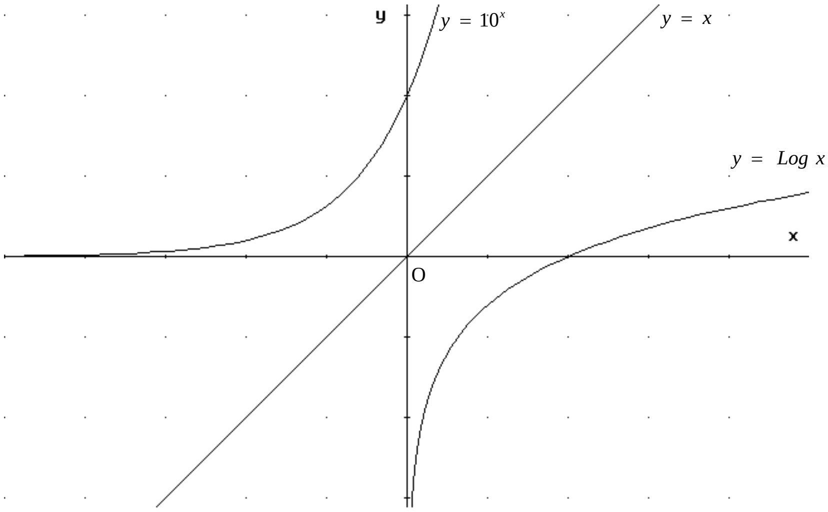
Infatti, lo scambio nell'equazione $x = f^{-1}(y)$ della x con la y e della y con la x fa passare dal punto $P(x,y)$ al punto $P'(y,x)$ del diagramma della funzione $y = f^{-1}(x)$.

Poiché i punti $P(x,y)$ $P'(y,x)$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante possiamo concludere affermando che il grafico della funzione $f^{-1}(x)$ si ottiene dal grafico della funzione $f(x)$ mediante una simmetria rispetto alla bisettrice fondamentale degli assi cartesiani.

$y = x^3$ è una **funzione continua e strettamente crescente** $\forall x \in R$. Essa è **invertibile** e la sua funzione inversa è $x = \sqrt[3]{y}$. Queste due funzioni hanno lo stesso grafico. Le due seguenti funzioni $y = x^3$ e $y = \sqrt[3]{x}$ sono una inversa dell'altra ma non hanno lo stesso grafico. Il grafico della prima funzione è simmetrico del grafico della seconda funzione rispetto alla bisettrice fondamentale degli assi cartesiani.



$y = 10^x$ è una **funzione continua e strettamente crescente** $\forall x \in R$. Essa è **invertibile** e la sua funzione inversa è $x = \log y$. Queste due funzioni hanno lo stesso grafico. Le due seguenti funzioni $y = 10^x$ ed $y = \log x$ sono una inversa dell'altra ma non hanno lo stesso grafico . Il grafico della prima funzione è simmetrico del grafico della seconda funzione rispetto alla bisettrice fondamentale degli assi cartesiani.



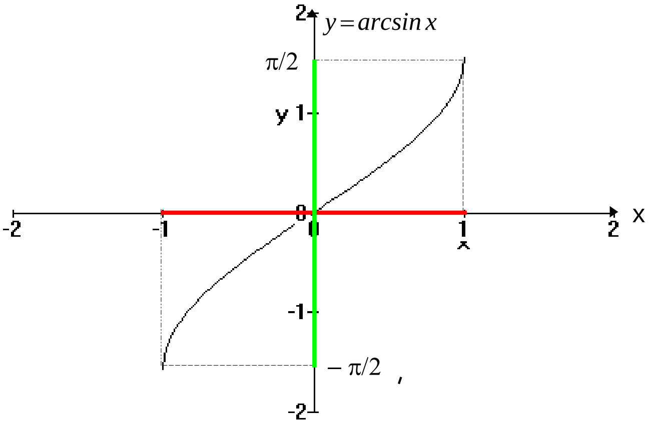
$y = x^2$ è una **funzione continua** $\forall x \in R$. Essa è **strettamente crescente** nell'intervallo $[0,+\infty[$ dove è **localmente invertibile** e la sua funzione inversa è $x = \sqrt{y}$, è **strettamente decrescente** nell'intervallo $]-\infty,0]$ dove è localmente invertibile e la sua funzione inversa è $x = -\sqrt{y}$.

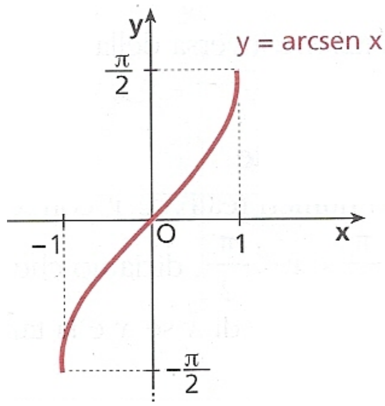
Funzioni inverse delle funzioni circolari ovvero le funzioni goniometriche inverse

- La funzione $x = \sin y$ è **strettamente crescente** nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e quindi è ivi localmente invertibile. La funzione inversa di $x = \sin y$ è indicata col simbolo: $\mathbf{y = \arcsin x}$

$$\mathbf{dom \sin y = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \qquad \mathbf{codom \sin y = [-1,1]}$$

$$\mathrm{dom} \arcsin x = [-1,1] \qquad \mathrm{codom} \arcsin x = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad \mathbf{D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$



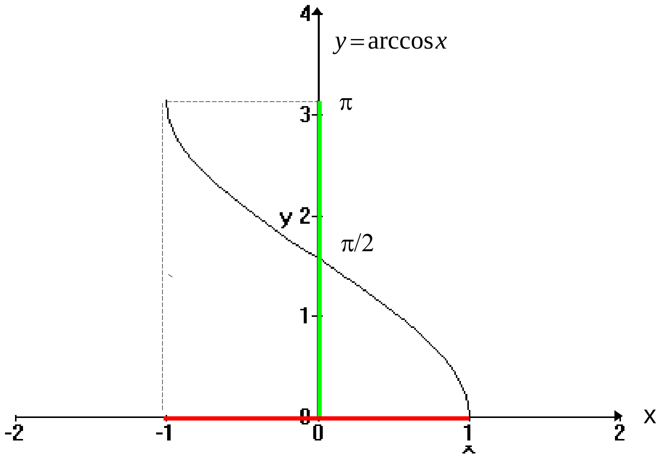


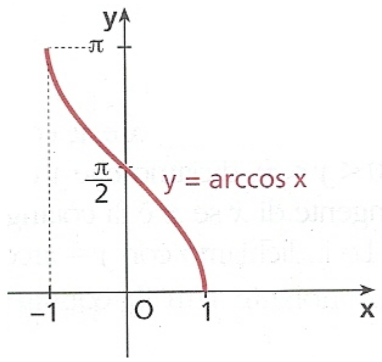
• La funzione $x = \cos y$ è **strettamente decrescente** nell'intervallo $[0,\pi]$ e quindi è ivi localmente invertibile. La funzione inversa di $x = \cos y$ è indicata col simbolo: $y = \arccos x$

$$\mathrm{dom}\cos y = [0,\pi] \qquad \mathrm{codom}\cos y = [-1,1]$$

$$\mathrm{dom}\arccos x = [-1,1] \qquad \mathrm{codom}\arccos x = [0,\pi]$$

$$\mathbf{D\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$





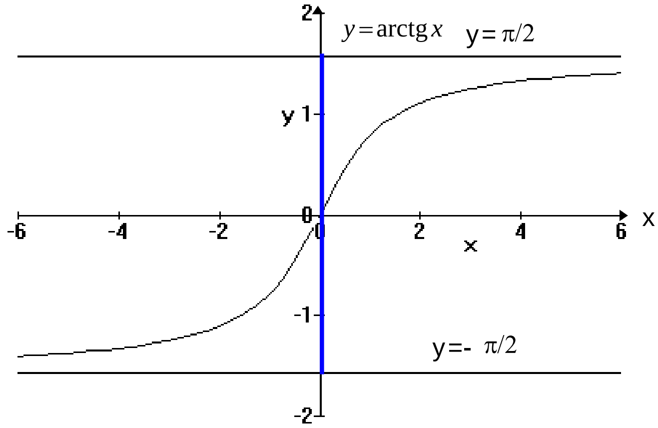
• La funzione $x = tg\, y$ è strettamente crescente nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e quindi è ivi localmente invertibile . La funzione inversa della funzione $x = \mathrm{tg}\, y$ è indicata col simbolo $y = \mathrm{arctg}\, x$

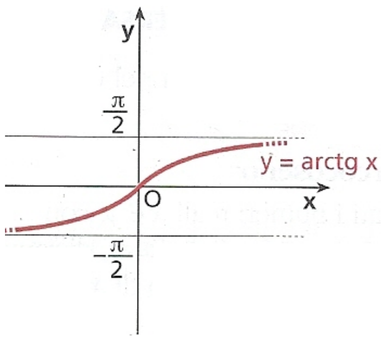
$$\mathrm{dom}\,\mathrm{tg}\, y =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\qquad \mathrm{codom}\,\mathrm{tg}\, y =]-\infty,+\infty[$$

$$\operatorname{dom} \operatorname{arctg} x =]-\infty, +\infty[\qquad \operatorname{codom} \operatorname{arctg} x = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\mathbf{D\,arctg\,x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = +\frac{\pi}{2}$$





• La funzione $x = \operatorname{cotg} y$ è strettamente crescente nell'intervallo $]0, \pi[$ e quindi è ivi localmente invertibile . La funzione inversa della funzione $x = \cot g\, y$ è indicata col simbolo

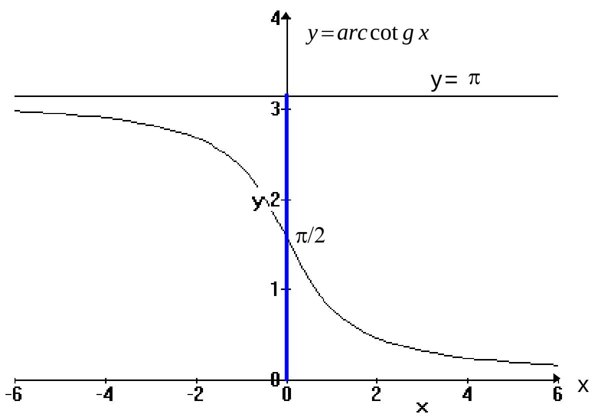
$$y = \operatorname{arccotg} x$$

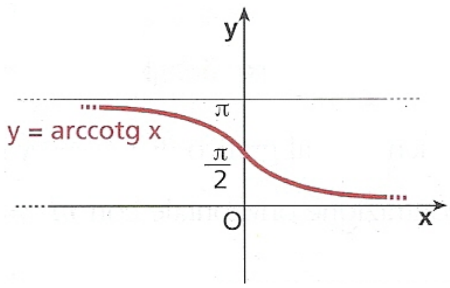
$\operatorname{dom} \operatorname{cotg} y =]0, \pi[$ $\qquad$ $\operatorname{codom} \operatorname{cotg} y =]-\infty, +\infty[$

$\operatorname{dom} \operatorname{arccotg} x =]-\infty, +\infty[$ $\qquad$ $\operatorname{codom} \operatorname{arccotg} x =]0, \pi[$

$$\mathbf{D\,arccotg\,x = \frac{-1}{1 + x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$





Derivata della funzione inversa

Sia $x = f^{-1}(y)$ la funzione inversa della funzione $y = f(x)$ continua e strettamente monotona in $[a,b]$ dove ammette derivata prima diversa da zero. Si dimostra che la derivata della funzione inversa di una data funzione è uguale al reciproco della derivata della funzione data, cioè:

$$\mathbf{Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

Dimostrazione

$$f^{-1}(y_1) = x_1 \quad , \quad f^{-1}(y) = x \quad , \quad y_1 = f(x_1) \quad , \quad y = f(x) \quad , \quad x_1 \to x \Leftrightarrow y_1 \to y$$

$$D f^{-1}(y) = \lim_{y_1 \to y} \frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)}{y_1 - y} = \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1 - x}{f(x_1) - f(x)} = \lim_{x_1 \to x} \frac{1}{\dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

La relazione che intercorre fra le derivate di due funzioni una inversa dell'altra è suscettibile di una immediata interpretazione geometrica. Noi sappiamo che le funzioni $y = f(x)$ ed $x = f^{-1}(y)$ ammettono lo stesso grafico γ. Sia $P[x, f(x)]$ un punto qualsiasi di γ e t la retta tangente a γ in $P[x, f(x)]$. Se x è la variabile indipendente risulta:

$m_t = tg\,\vartheta = f'(x)$ = coefficiente angolare della retta tangente a γ nel punto di ascissa x

ϑ = **angolo di cui deve ruotare in senso antiorario la direzione positiva dell'asse delle ascisse per sovrapporsi a t**.

S y è la **variabile indipendente** risulta:

$m_t = tg\,\beta = D f^{-1}(y)$ = coefficiente angolare della retta tangente a γ nel punto di ordinata y

β = angolo formato dal semiasse positivo delle y con la tangente t

$$\beta + \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta \Rightarrow tg\,\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \Rightarrow tg\,\beta = \cot g\,\beta = \frac{1}{tg\,\vartheta} \Rightarrow$$

$$D f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

APPLICAZIONI

$$\mathbf{D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \qquad -1 < x < 1$$

$y = \arcsin x$ è la funzione inversa della funzione $x = \sin y$ considerata nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$D\arcsin x = \frac{1}{D\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D\arcsin f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$-1 < f(x) < 1$$

$$\mathbf{D\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad -1<x<1 \qquad D\arccos f(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \qquad -1<f(x)<1$$

$y = \arccos x$ è la funzione inversa della funzione $x = \cos y$ considerata nell'intervallo $[0, \pi]$.

$$D\arccos x = \frac{-1}{D\cos y} = \frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{D\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}} \qquad D\operatorname{arctg} f(x) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$y = \operatorname{arctg} x$ è la funzione inversa della funzione $x = tg\, y$ considerata nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

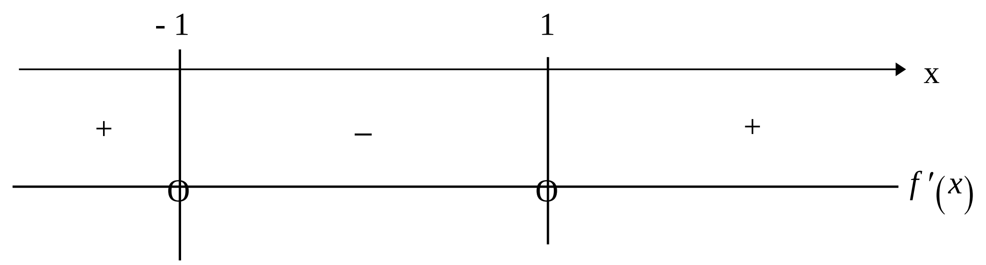
$$D\operatorname{arccotg} x = \frac{1}{D\cot g\, y} = \frac{-1}{1+\cot g^2 y} = \frac{-1}{1+x^2} \qquad \mathbf{D\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}}$$

$y = arc\cot g\, x$ è la funzione inversa della funzione $x = \cot g\, y$ considerata nell'intervallo $]0, \pi[$.

$$Darc\cot g x = \frac{1}{D\cot g y} = \frac{-1}{1+\cot g^2 y} = \frac{-1}{1+x^2} \qquad D\operatorname{arccotg} f(x) = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

<<Data la funzione $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ vedere se è invertibile, ed in caso affermativo calcolare la derivata prima della funzione inversa $f^{-1}(y)$ nel punto $y=2$>>

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) \quad , \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$$



La funzione data è strettamente crescente (decrescente) negli intervalli $]-\infty,-1[$, $]1,+\infty[$ { $]-1,1[$ } e quindi invertibile in ciascuno di essi .

$$y = 2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 3x + 2 = 2 \ , \ x^3 - 3x = 0 \ , \ x(x^2-3) \quad \Rightarrow x = 0 \ , \ x = \pm\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} \in]-\infty,-1[\quad , \; 0 \in]-1,1[\quad , \; \sqrt{3} \in]1,+\infty[$$

Inverto la funzione nell'intervallo]-1,1[, y = 2 $\Leftrightarrow$ x = 0

$$D\, f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad\qquad D\, f^{-1}(2) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$$

Osservazione

Se dimostriamo che la funzione f(x) è **invertibile** nell'intervallo $[a,b]$ non è detto che siamo in grado di determinare l'espressione analitica della funzione inversa, pur sapendo calcolare la derivata prima in tutti i punti dell'intervallo dove essa è invertibile.

<<**Verificare che la funzione** $y = f(x) = 6x + \sin 2x$ **è invertibile in** $\mathbb{R}$ **. Calcolare, poi, la derivata della funzione inversa nel punto y *corrispondente ad*** $x = \frac{\pi}{2}$ **>>**

$$f'(x) = 6 + 2\cos 2x \;\; , -1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \;\; \forall \; x \in R$$

Questo significa che $f(x)$ è **strettamente crescente** in R e , quindi , ivi invertibile .

$$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\frac{\pi}{2} + \sin\pi = 3\pi \quad , \quad f^{-1}(3\pi) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{6 + 2\cos\pi} = \frac{1}{4}$$

In questo caso non è possibile ricavare l'espressione analitica della funzione inversa .

<< **Dimostrare che la funzione** $f(x) = 2x + \cos x$ **è invertibile su tutto R e, detta** $x = g(y) = f^{-1}(y)$ **funzione inversa, calcolare** $g'(\pi) = f^{-1}(\pi)$ >>

$$f'(x) = 2 - \sin x \;\; , -1 \le \sin x \le 1 \;\Rightarrow\; f'(x) > 0 \;\; \forall \; x \in R$$

Questo significa che $f(x)$ è strettamente crescente in R e, quindi, ivi invertibile .

$$g'(y) = g'[f(x)] = D\, f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2 - \sin x}$$

$$\pi = f(x) \;\Rightarrow\; \pi = 2x + \cos x \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad g'(\pi) = D\, f^{-1}(\pi) = \frac{1}{2 - \sin\frac{\pi}{2}} = 1$$