Unità Didattica N° 28 **Curve deducibili**

Dato il grafico della funzione $f(x)$ dedurre il grafico della funzione $g(x)=f'(x)$

Dato il grafico della funzione $f(x)$ possiamo dedurre il grafico della funzione $g(x)=f'(x)$ derivata prima della funzione $f(x)$ in base alle seguenti considerazioni:

(1) $g'(x)=f''(x)$ (2) negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente la sua derivata prima è positiva e quindi la funzione $g(x)=f'(x)$ è positiva

(3) negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è decrescente la sua derivata prima è negativa e quindi la funzione $g(x)=f'(x)$ è negativa

(4) nei punti in cui il grafico della funzione $f(x)$ ha tangente orizzontale (**massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale**) la derivata prima di $f(x)$ è nulla e quindi abbiamo $g(x)=f'(x)=0$. Il grafico della funzione $g(x)$ incontra l'asse x nei punti stazionari della funzione $f(x)$

(5) il segno di $g'(x)$ derivata prima della funzione $g(x)$ coincide col segno di $f''(x)$, derivata seconda della funzione $f(x)$.

(6) la derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_o rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al suo grafico nel punto x_o.

(7) negli intervalli dove il grafico della funzione $f(x)$ volge la concavità verso l'alto (verso il basso) sarà $g'(x)=f''(x)>0$ [$g'(x)=f''(x)<0$] e quindi la funzione $g(x)=f'(x)$ sarà strettamente crescente (decrescente)

(8) nei punti di flesso del grafico della funzione $f(x)$ sarà $g'(x)=f''(x)=0$ e quindi il grafico di $f(x)$ avrà in tale punto la tangente orizzontale. Questo ci consente di affermare che tale punto sarà per la funzione $g(x)$ un punto estremante.

(9) Se la funzione $f(x)$ è pari (dispari) la sua derivata $g(x)=f'(x)$ è dispari (pari).

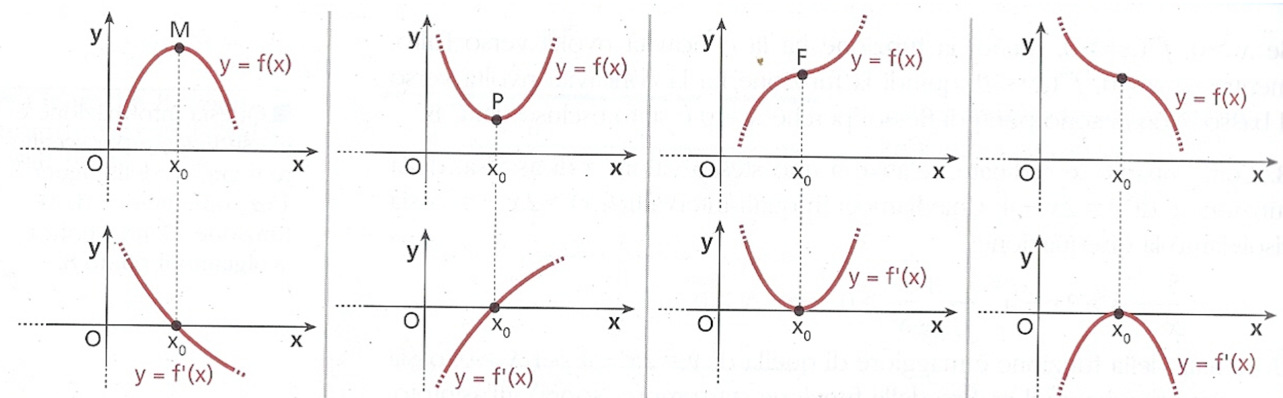
Questa proprietà ci consente di affermare quanto segue:

(10) Se il grafico della funzione $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse y il grafico della funzione $g(x)=f'(x)$ è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

(11) Se il grafico della funzione $f(x)$ è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani il grafico della funzione $g(x)=f'(x)$ è simmetrico rispetto all'asse y.

Lo schema sottostante sintetizza quanto abbiamo esposto dettagliatamente.

Seguirà un esempio particolare in grado di chiarire quanto abbiamo esposto in precedenza.



a. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo. Nello stesso punto, la derivata $f'(x)$ è nulla e quindi il suo grafico interseca l'asse x in x_0. A sinistra di x_0 la derivata è positiva, a destra è negativa.

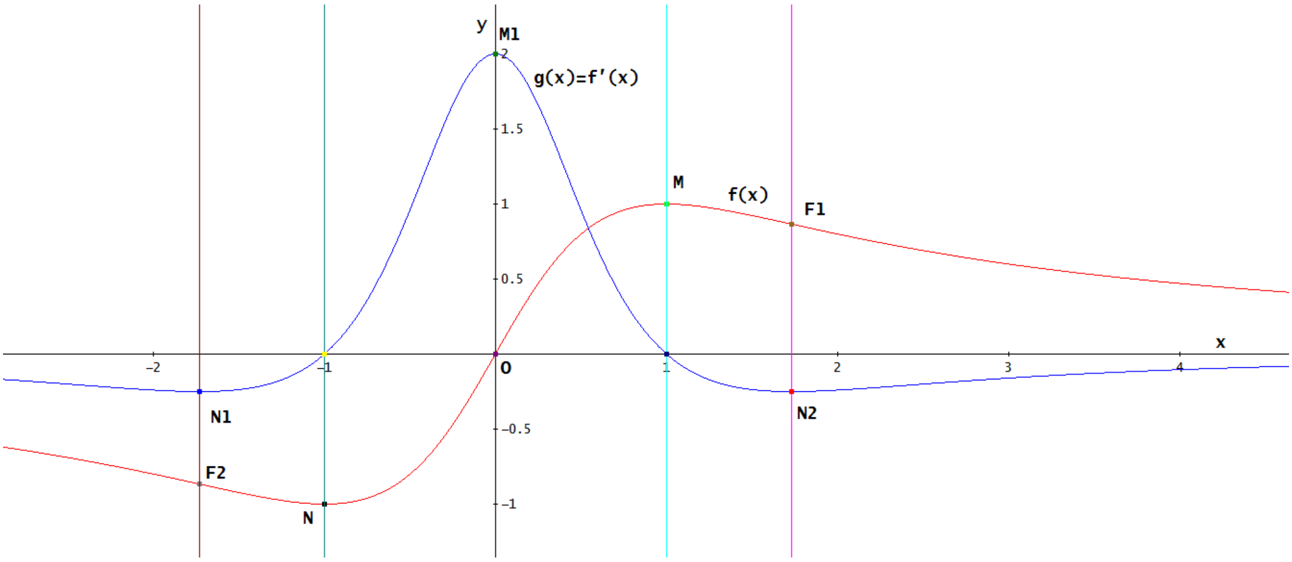
b. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo: quindi $f'(x_0)=0$. Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0; a sinistra di x_0 è negativo, a destra è positivo.

c. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale ascendente: quindi $f'(x_0)=0$. Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0 ed è positivo sia a destra sia a sinistra di x_0. Pertanto in x_0 c'è un minimo per $f'(x)$.

d. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale discendente: con considerazioni analoghe al caso precedente, per $x \neq x_0$ $f'(x)$ è negativa. Pertanto in x_0 c'è un massimo per $f'(x)$.

Dal grafico della funzione $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}}$ dedurre il grafico della funzione

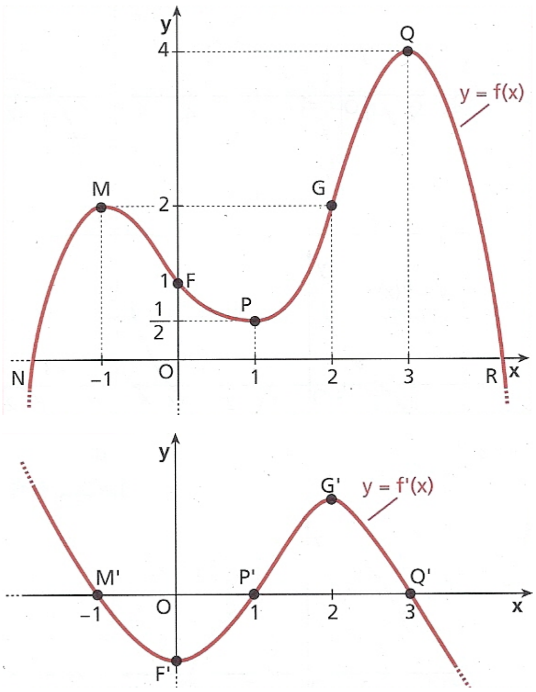
$$\mathbf{g(x)=f'(x)=\frac{2(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}}$$



Dato il grafico della funzione $f(x)$, studiare l'andamento del grafico della funzione $g(x) = f'(x)$.

I punti M, P, Q, rispettivamente di ascisse -1, 1, 3, sono punti di massimo e di minimo per $f(x)$, quindi risulta $g(x) = f'(x) = 0$ per $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.

Nei tratti NM, PQ la funzione $f(x)$ è crescente, quindi $g(x) = f'(x) > 0$, mentre nei tratti MP e QR è decrescente e quindi $g(x) = f'(x) < 0$. Nei punti di flesso F e G di $f(x)$ si ha $f''(x) = 0$ e quindi $g(x) = f'(x)$ ha un minimo in $x = 0$ ed un massimo in $x = 2$.



Dato il grafico della funzione $f(x)$ dedurre il grafico della funzione $g(x) = e^{f(x)}$

Dato il grafico della funzione $f(x)$ possiamo dedurre il grafico della funzione $g(x) = e^{f(x)}$ in base alle seguenti considerazioni:

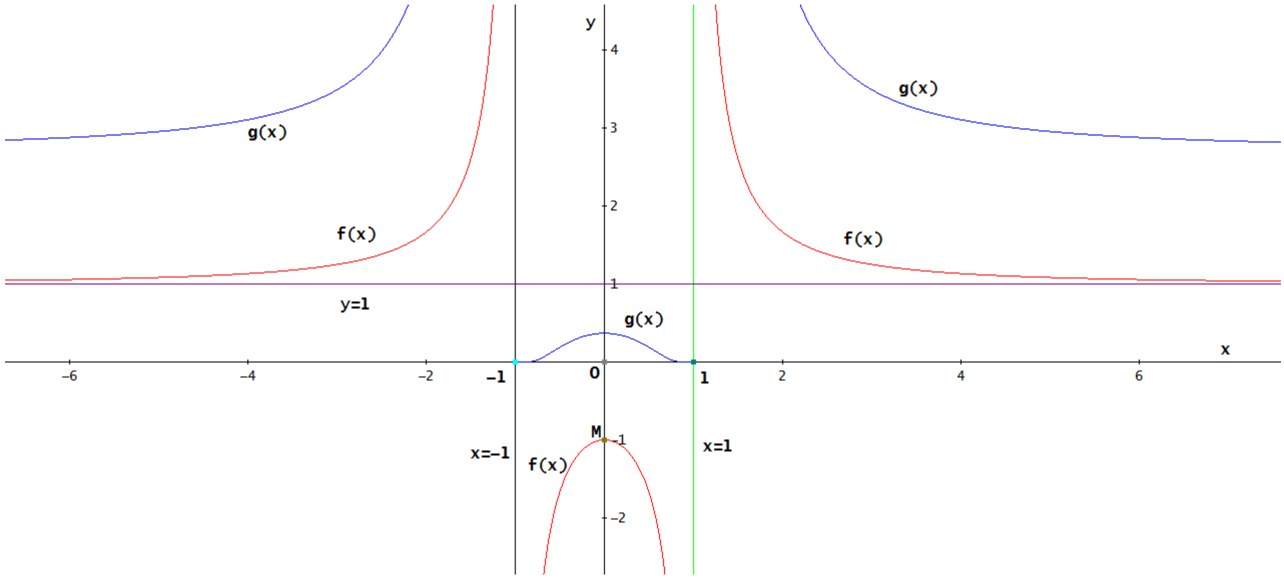
(1) $e^{f(x)} > 0 \ \forall x \in dom\, f$ (2) $dom\, f = dom\, e^{f}$ (3) $f(x) = 0 \ \Rightarrow \ e^{f(x)} = 1$

(4) $f(x) \to +\infty \ \Rightarrow \ e^{f(x)} \to +\infty$ $f(x) \to -\infty \ \Rightarrow \ e^{f(x)} \to 0+$ cioè l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale destro per la funzione $e^{f(x)}$; se $f(x) \to 0+$ per $x \to -\infty$ allora $e^{f(x)} \to 1+$ e la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale sinistro per la funzione $e^{f(x)}$

(5) La monotonia di $f(x)$ coincide con la monotonia di $g(x) = e^{f(x)}$, cioè dove $f(x)$ è strettamente crescente (decrescente) $g(x) = e^{f(x)}$ è strettamente crescente (decrescente)

(6) I punti estremanti di $f(x)$ coincidono con i punti estremanti di $g(x) = e^{f(x)}$ in quanto risulta $g'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$ e quindi $g'(x) = 0 \ \Rightarrow \ f'(x) = 0$

(7) $f(x) > 0 \ \Rightarrow \ e^{f(x)} > 1$; $f(x) < 0 \ \Rightarrow \ 0 < e^{f(x)} < 1$;



Dato il grafico della funzione $f(x)$ dedurre il grafico della funzione $g(x)=\ln f(x)$

Dato il grafico della funzione $f(x)$ possiamo dedurre il grafico della funzione $g(x)=\ln f(x)$ in base alle seguenti considerazioni:

(1) Il dominio della funzione $g(x)=\ln f(x)$ coincide con le soluzioni dell'inequazione $f(x)>0$ Questo ci dice che il grafico della funzione $g(x)=\ln f(x)$ si sviluppa nelle regioni del piano in cui $f(x)$ appartiene al semipiano delle ordinate positive

(2) se $f(x)\to 0+$ allora $g(x)=\ln f(x)\to -\infty$

(3) se $f(x)=1$ allora $g(x)=\ln f(x)=0$

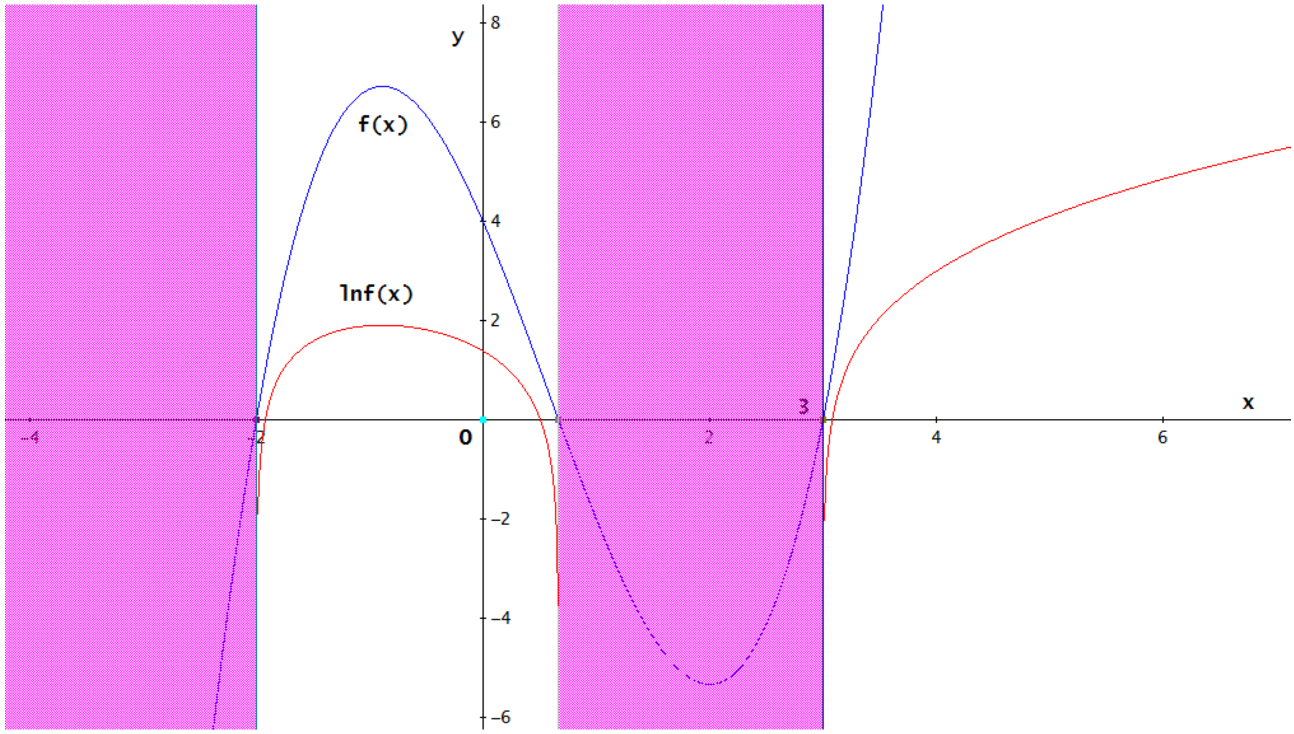
(4) se $f(x)=e$ allora $g(x)=\ln f(x)=0$

(5) se $0<f(x)<1$ allora $-\infty<g(x)=\ln f(x)<0$

(6) se $f(x)>1$ allora $g(x)=\ln f(x)>0$

(7) $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ negli intervalli in cui $f(x)$ cresce (decresce) anche $g(x)=\ln f(x)$ cresce (decresce)

(8) Se $\overline{x}$ è un punto di massimo (minimo) per la funzione $f(x)$ lo è anche per la funzione $g(x)=\ln f(x)$


y
x
f(x)
lnf(x)
8
6
4
2
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
3
4
6