Unità Didattica N° 28

Estremi, asintoti, flessi del grafico di una funzione

Estremi delle funzioni derivabili

Definizione 28.1: Il punto $x_o \in \text{dom} f$ è detto **punto di massimo relativo** per la funzione $f(x)$ se $f(x_o)$ è il valore più grande che la funzione $f(x)$ assume in un opportuno intorno del punto x_o. Con parole diverse possiamo dire che $x_o \in \text{dom} f$ è un **punto di massimo relativo** per la funzione $f(x)$ se è possibile trovare almeno un intorno $I(x_o)$ del punto x_o i cui punti $x \in I(x_o) - \{x_o\}$ hanno immagini $f(x)$ minori di $f(x_o)$, il che equivale ad affermare che risulta:

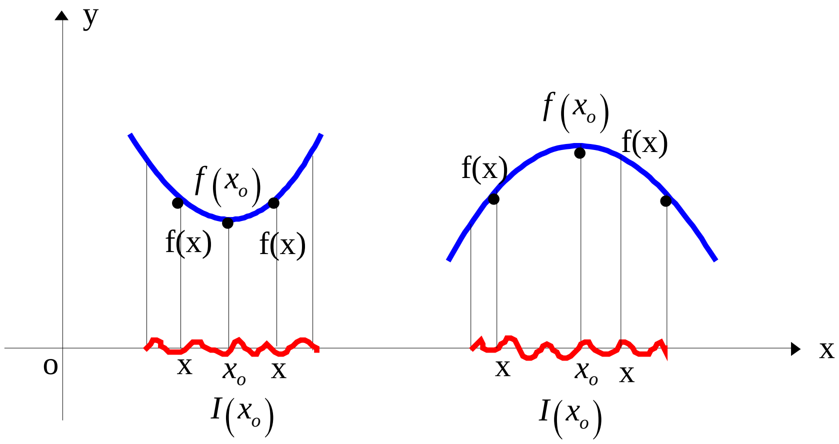
$$f(x) < f(x_o) \qquad \forall\, x \in I(x_o) - \{x_o\} \qquad \textbf{[1]}$$

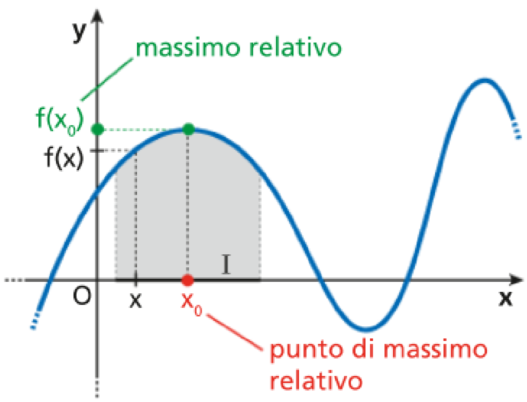
Il valore $f(x_o)$ è detto **massimo relativo** della funzione $f(x)$

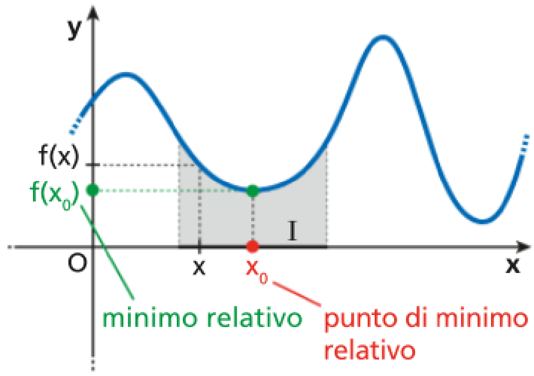
Definizione 28.2: Il punto $x_o \in \text{dom} f$ è detto **punto di minimo relativo** per la funzione $f(x)$ se $f(x_o)$ è il valore più piccolo che la funzione $f(x)$ assume in un opportuno intorno del punto x_o. Con parole diverse possiamo dire che $x_o \in \text{dom} f$ è un **punto di minimo relativo** per la funzione $f(x)$ se è possibile trovare almeno un intorno $I(x_o)$ del punto x_o i cui punti $x \in I(x_o) - \{x_o\}$ hanno immagini $f(x)$ minori di $f(x_o)$, il che equivale ad affermare che risulta :

$$f(x) > f(x_o) \qquad \forall\, x \in I(x_o) - \{x_o\} \qquad \textbf{[1]}$$

Il valore $f(x_o)$ è detto **minimo relativo** della funzione $f(x)$







I punti di massimo o di minimo relativi della funzione $f(x)$ si dicono anche punti estremanti per la funzione $f(x)$, mentre i massimi o i minimi relativi di $f(x)$ si dicono estremi relativi di $f(x)$. I punti estremanti appartengono al dominio di $f(x)$, gli estremi al codominio di $f(x)$.

L'aggettivo relativo va inteso nel senso che la [1] o la [2] è verificata in un opportuno intorno del punto x_o e non in tutto il dominio di $f(x)$. Il punto geometrico del piano cartesiano avente come ascissa il punto estremante x_o e come ordinata l'estremo relativo $f(x_o)$ dicesi immagine geometrica (o **punto immagine**) dell'estremo relativo, cioè il punto cartesiano $M[x_o;f(x_o)]$ è detto immagine geometrica dell'estremo relativo. Di solito utilizzeremo la lettera M (N) per indicare l'immagine geometrica del punto di massimo (minimo). Quindi, il **punto di massimo** (minimo) x_o ed il **massimo** (minimo) $f(x_o)$ di una funzione $f(x)$, intesi come coppia ordinata di numeri reali $(x_o, f(x_o))$, individuano nel piano cartesiano il punto $M(x_o, f(x_o))$ [$N(x_o, f(x_o))$] detto immagine geometrica del massimo (minimo).

$x_o \in \text{dom} f$ è un **punto di massimo** (minimo) relativo se la funzione $f(x)$ è strettamente crescente (decrescente) in un opportuno intorno sinistro $I^-(x_o)$ del punto x_o e strettamente decrescente (crescente) in un opportuno intorno destro $I^+(x_o)$ del punto x_o.

Teorema 28.1: Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$, se è $f'(x)>0$ [$f'(x)<0$] allora $f(x)$ è strettamente crescente (decrescente) in $[a,b]$.

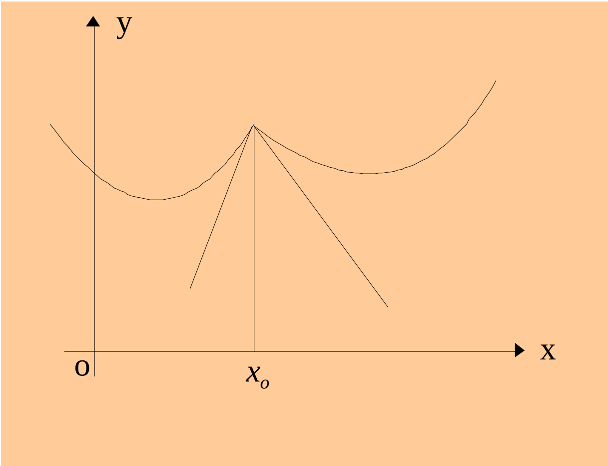
Teorema 28.2: I $f'(x_o) = 0$ è condizione necessaria (ma in generale non sufficiente) perché $x_o \in \text{dom} f$ sia un **punto estremante** per la funzione $f(x)$ derivabile nel punto x_o.

x_o = punto estremante $\Rightarrow f'(x_o) = 0$, $f'(x_o) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad x_o$ punto estremante

HP { x_o = punto estremante Th { $f'(x_o) = 0$

(una condizione necessaria rappresenta una tesi, una condizione sufficiente rappresenta una ipotesi).

Osservazione 28.1: In figura è riportato il grafico di una funzione che presenta nel punto x_o un punto di massimo relativo senza che la funzione sia ivi derivabile . Nel punto x_o la funzione è continua ma non derivabile. Per il grafico della funzione x_o è un punto angoloso.



Osservazione 28.2: Se nel punto x_o la funzione $f(x)$ ha un punto estremante allora è sicuramente $f'(x_o) = 0$; ma se è $f'(x_o) = 0$ non possiamo affermare che x_o sia un punto estremante , cioè $f'(x_o) = 0$ non è una condizione sufficiente per affermare che x_o è un punto estremante per la funzione $f(x)$.

Osservazione 28.3: Un punto x_o nel quale si annulla la derivata prima [$f'(x_o) = 0$] dicesi punto stazionario (o *punto estremale* o **punto critico**), mentre i valori ivi assunti dalla funzione f sono detti valori critici. Un punto stazionario indica soltanto un possibile punto estremante.

Teorema 28.3: Se $f(x)$ è derivabile in un intorno completo del punto x_o allora:

- x_o è un **punto di massimo relativo** se $f'(x)$ è **positiva** per $x < x_o$ e **negativa** per $x > x_o$
- x_o è un **punto di minimo relativo** se $f'(x)$ è **negativa** per $x < x_o$ e **positiva** per $x > x_o$

Con parole diverse possiamo affermare che:

$f'(x_o) = 0$, $f'(x_o -) > 0 \quad f'(x_o +) < 0$ [$f'(x_o) = 0 \quad f'(x_o -) < 0$, $f'(x_o +) > 0$]

sono C.N.S. perché $x_o \in \text{dom} f$ sia un punto di massimo (**minimo**) relativo per la funzione $f(x)$ derivabile nel punto x_o.

In breve: <<se, quando la **x** passa per il valore x_o (dalla sinistra alla destra), la derivata prima muta il suo segno allora x_o è un punto estremante, precisamente è un punto di massimo relativo se la derivata prima muta il suo segno da << + >> a << - >>, si tratta di un punto di minimo relativo se la derivata prima muta il suo segno da << - >> a << + >>.

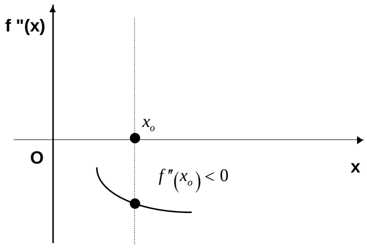
La dimostrazione di questo teorema è evidente se si tiene presenta che il segno della derivata prima ci dice se una funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente.>>

Teorema 28.4: << $f'(x_o) = 0$, $f''(x_o) < 0$ [$f'(x_o) = 0$, $f''(x_o) > 0$] sono C.N.S. perché $x_o \in \text{dom} f$ sia un punto di massimo (**minimo**) **relativo** per la funzione $f(x)$ derivabile due volte nel punto x_o >> .

Dimostrazione della sufficienza

$Hp: \{ f'(x_o) = 0 \ ; \ f''(x_o) < 0$ $\qquad$ $Th: \{ x_0 = punto \ \ di \ \ massimo \ \ relativo$

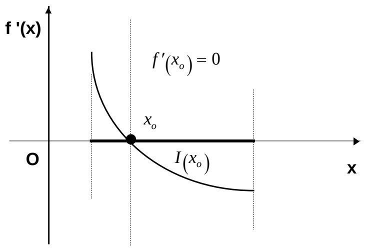
Considero i grafici delle funzioni $f(x)$, $f'(x)$; $f''(x)$. $f''(x)$. Il segno di $f''(x)$, che è la derivata prima della funzione $f'(x)$, ci fornisce informazioni sulla crescenza e sulla decrescenza della funzione $f'(x)$.



$f''(x_o) < 0 \ \Rightarrow \ \exists I(x_o): f''(x) < 0 \ \ \forall x \in I(x_o)$

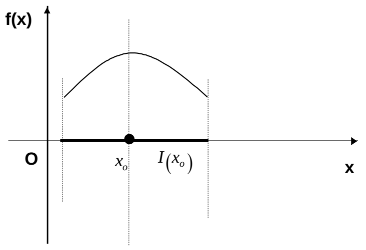
(**teorema della permanenza del segno**)

Questo ci consente di affermare che la funzione $f'(x)$ è **strettamente decrescente** nell'intorno $I(x_o)$.



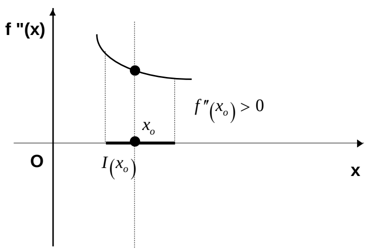
Per ipotesi sappiamo che $f'(x_o) = 0$. Questo ci consente di affermare che : $f'(x) > 0$ per $x < x_o$, $f'(x) < 0$ per $x > x_o$

$f(x)$ è strettamente crescente (decrescente) per $x < x_o$ ($x > x_o$)



Per un teorema dimostrato in precedenza diciamo che x_o è un **punto di massimo relativo** per la funzione $f(x)$

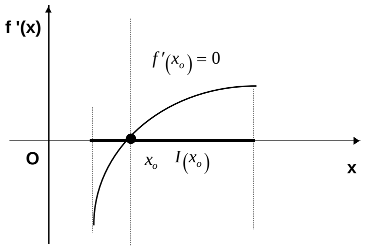
Dimostrazione della necessità



$f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \exists I(x_o) : f''(x) > 0 \ \ \forall x \in I(x_o)$

(**teorema della permanenza del segno**)

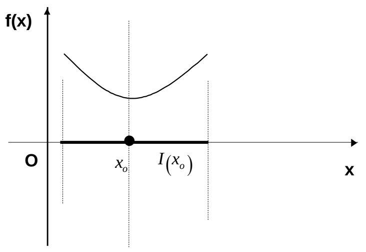
Questo ci consente di affermare che la funzione $f'(x)$ è **strettamente crescente** nell'intorno $I(x_o)$.



Per ipotesi sappiamo che $f'(x_o) = 0$. Questo ci consente di affermare che : $f'(x) > 0$ per $x > x_o$, $f'(x) < 0$ per $x < x_o$

$f(x)$ è strettamente crescente (decrescente) per $x > x_o$ ($x < x_o$)

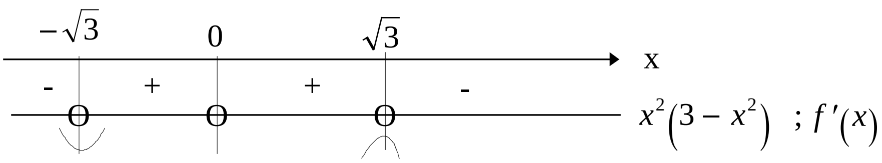
Per un teorema dimostrato in precedenza diciamo che x_o è un **punto di minimo relativo** per la funzione $f(x)$



ESEMPI

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2} \qquad \text{dom f} = R - \{\pm 1\} \qquad f'(x) = \frac{x^2(3 - x^2)}{(1 - x^2)^2} \qquad f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad , \quad x = \pm\sqrt{3} \quad , \quad f(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad , \quad f(\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$



$x = -\sqrt{3}$ punto di minimo relativo , $f(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ minimo relativo

$N\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ immagine geometrica del minimo relativo

$x = \sqrt{3}$ punto di massimo relativo , $f(\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ massimo relativo

$M\left(\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ immagine geometrica del massimo relativo

$f''(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\sqrt{3}$ punto di minimo relativo

$f''(\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}$ punto di massimo relativo

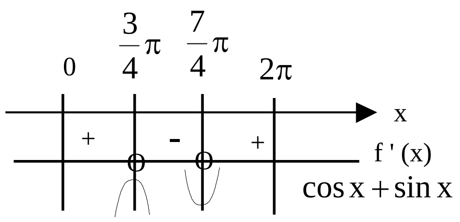
$\mathbf{f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin 2x}}$ con $x \in]0;2\pi[$ e $x \neq \left\{\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3}{2}\pi\right\}$

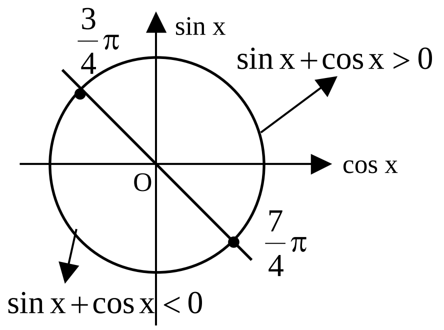
$$f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)\cdot \sin 2x - 2\cos 2x \cdot (\sin x - \cos x)}{\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)\cdot \sin 2x - 2(\cos x + \sin x)\cdot(\sin x - \cos x)^2}{\sin^2 2x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)\cdot(\sin 2x + 2\cos^2 x + 2\sin^2 x - 2\sin 2x)}{\sin^2 2x} = \boxed{f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)\cdot(2 - \sin 2x)}{\sin^2 2x}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x + \sin x = 0 \quad tg\, x = -1 \quad \Rightarrow \quad , \; x_2 = \frac{7}{4}\pi \qquad 2 - \sin 2x > 0 \quad \forall x \in [0;2\pi]$





$x_1 = \frac{3}{4}\pi$ punto di **massimo relativo** $M\left(\frac{3}{4}\pi;-\sqrt{2}\right)$ **immagine geometrica** del massimo relativo

$x_2 = \frac{7}{4}\pi$ punto di **minimo relativo** $N\left(\frac{7}{4}\pi;\sqrt{2}\right)$ **immagine geometrica** del minimo relativo

Proprietà degli estremi delle funzioni f(x)

01) **Gli eventuali punti** di **massimo** e di **minimo** della funzione $y = \frac{1}{f(x)}$ coincidono coi **gli eventuali punti** di **minimo** e di **massimo** della funzione $f(x)$.

Infatti: $y'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ cioè il segno della derivata prima della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$ è l'opposto del segno della derivata prima della funzione $f(x)$ ed inoltre gli **zeri** di $y'(x)$ coincidono con quelli di $f'(x)$.

$$\mathbf{y = \frac{50}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60}}$$

Calcoliamo gli eventuali **punti estremanti** della funzione $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60$

$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x = 12x(x^2 + 2x - 3)$, $f''(x) = 12(3x^2 + 4x - 3)$

$f''(-3) = 144 > 0 \Rightarrow x = -3$ **punto di minimo** per $f(x)$ e di **massimo** per $y(x)$

$f''(0) = -36 < 0 \Rightarrow x = 0$ **punto di massimo** per $f(x)$ e di **minimo** per $y(x)$

$f''(1) = 48 > 0 \Rightarrow x = 1$ **punto di minimo** per $f(x)$ e di **massimo** per $y(x)$

$y(-3) = -\dfrac{2}{3}$ = **minimo relativo** di $y(x)$ $y(1) = \dfrac{50}{51}$ = **massimo relativo** di $y(x)$

$y(0) = \dfrac{5}{6}$ = **minimo relativo** di $y(x)$

02) **Gli eventuali punti** di **massimo** e di **minimo** della funzione $f(x) = \dfrac{k}{g(x)}$ coincidono

a) coi **gli eventuali punti** di **massimo** e di **minimo** della funzione $g(x)$ se risulta $k < 0$

b) coi **gli eventuali punti** di **minimo** e di **massimo** della funzione $g(x)$ se risulta $k <> 0$

03) Gli eventuali **punti di massimo** e di **minimo** della funzione non negativa $f(x)$ [$f(x) \geq 0$] coincidono con quelli della funzione $[f(x)]^n$ e viceversa .

Infatti: $D[f(x)]^n = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

Il segno e gli zeri della derivata prima di $f(x)$ coincidono rispettivamente col segno e gli zeri della derivata prima della funzione $[f(x)]^n$.

$y(x) = \sqrt{-x^2 + 10x}$ con $0 \leq x \leq 10$, $y(0) = y(10) = 0$

Si tratta di una funzione non negativa e quindi i suoi eventuali **punti estremanti** coincidono con quelli della funzione:

$f(x) = [y(x)]^2 = -x^2 + 10x$, $f'(x) = -2x + 10$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$, $f''(x) = -2 < 0$

$x = 5$ è un **punto di massimo assoluto** per la funzione data

$y(5) = \sqrt{-25 + 50} = 5$ = **massimo assoluto** della funzione $y(x)$

04) Consideriamo la funzione $\mathbf{f(x) = a \cdot g(x) + b}$ con a , b costanti reali .

Se risulta $a > 0$, allora gli eventuali **punti di massimo** e di **minimo** di $f(x)$ coincidono con gli eventuali **punti di massimo** e di **minimo** di $g(x)$. Questo significa che , ai fini del calcolo dei **punti estremanti** di una funzione , si possono trascurare le costanti additive di qualsiasi segno e le costanti moltiplicative positive .

Se risulta $a < 0$ allora gli eventuali **punti di massimo e di minimo** della funzione $f(x)$ coincidono con gli eventuali punti di **minimo e di massimo** della funzione $g(x)$.

Quindi anche le costanti moltiplicative negative possono essere trascurate , ma l'eventuale **massimo** (minimo) di $g(x)$ diventa l ' eventuale **minimo** (massimo) di $f(x)$.

Estremi assoluti delle funzioni f(x)

Se la f unzione $f(x)$ è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ essa ammette, per il teorema di Weierstrass, il massimo assoluto M ed il minimo assoluto m .

Vediamo come possiamo calcolare questi valori:

- $f(x)$ **è** derivabile $\forall\ x \in [a,b]$

Si calcolano i massimi (minimi) relativi e supponiamo che siano:

$$f(x_1)\ ,\ f(x_2)\ ,\ f(x_3) \qquad [\ f(x_4)\ ,\ f(x_5)\ ]$$

Poi calcoliamo $f(a)$, $f(b)$. Il massimo (minimo) assoluto di $f(x)$ in $[a,b]$ coincide col più grande (piccolo) dei seguenti valori: $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(b)$ $[\ f(a), f(x_4),\ f(x_5),\ f(b)]$

Concavità e convessità di una curva piana

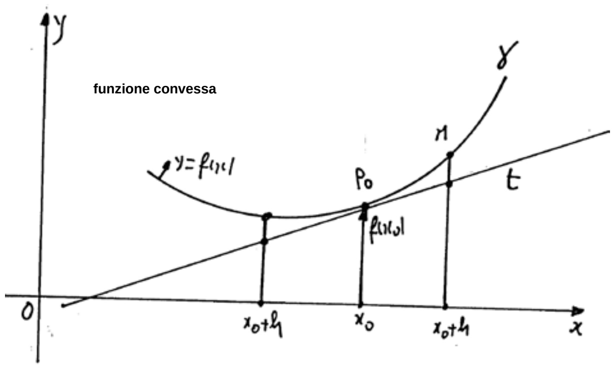
Sia $P_o[x_o, f(x_o)]$ un punto della curva piana γ avente equazione $y = f(x)$, con $f(x)$ definita in $[a,b]$ ed ivi derivabile quanto occorre. Sia **t** la retta tangente a γ in P_o. Diciamo che la curva γ volge la concavità verso l'alto o nel **verso positivo delle y** (verso il basso o nel **verso negativo** delle y) se è possibile trovare un intorno completo $I(x_o)$ del punto x_o tale che ogni punto P di γ avente ascissa $x \in I(x_o) - \{x_o\}$ si trovi al di sopra (al **di sotto**) della retta t.

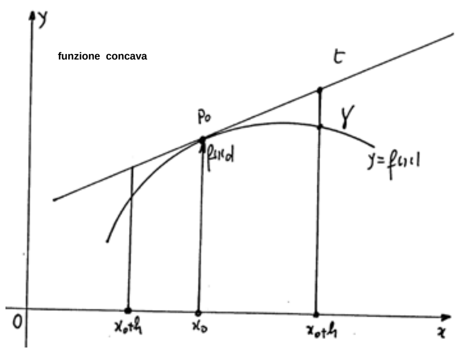
Quindi la curva γ volge nel punto P_o la concavità verso l'alto (verso il basso) se essa giace localmente (cioè in un opportuno intorno di x_o) al di sopra (**al di sotto**) della tangente a γ in P_o.

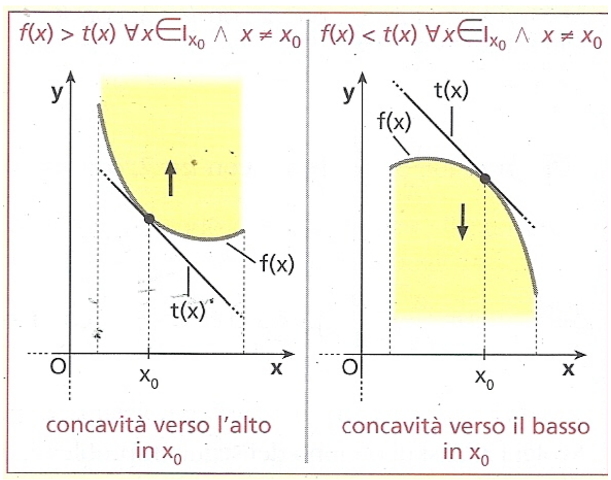
Se la suddetta proprietà si verifica $\forall\ x_o \in [a,b]$, allora diciamo che la curva volge la concavità verso l'alto (il **basso**) in tutto l'intervallo $[a,b]$. Se il $G(f)$ in $[a,b]$ volge la concavità verso l'alto (il **basso**), diciamo pure che la funzione $f(x)$ è in $[a,b]$ convessa (**concava**). Il punto in cui la curva γ cambia la propria concavità da verso il basso a verso l'alto e viceversa è detto punto di flesso o **punto di inflessione**.

Teorema N°1: $f''(x_o) > 0 \quad [\ f''(x_o) < 0\ ]$ è C.N.S. perché il grafico $G(f)$ della funzione, derivabile due volte nel punto $x_o \in d\,\mathrm{om}\, f$, volga nel punto $P_o[x_o, f(x_o)]$ la concavità verso l'alto (verso il basso).

Corollario: $f''(x) > 0 \quad [\ f''(x) < 0\ ] \quad \forall\ x \in [a,b]$ è condizione necessaria e sufficiente perché il grafico $G(f)$ della funzione $f(x)$, derivabile due volte nell'intervallo $[a,b]$, volga la concavità verso l'alto (il basso) in tutto l'intervallo $[a,b]$.



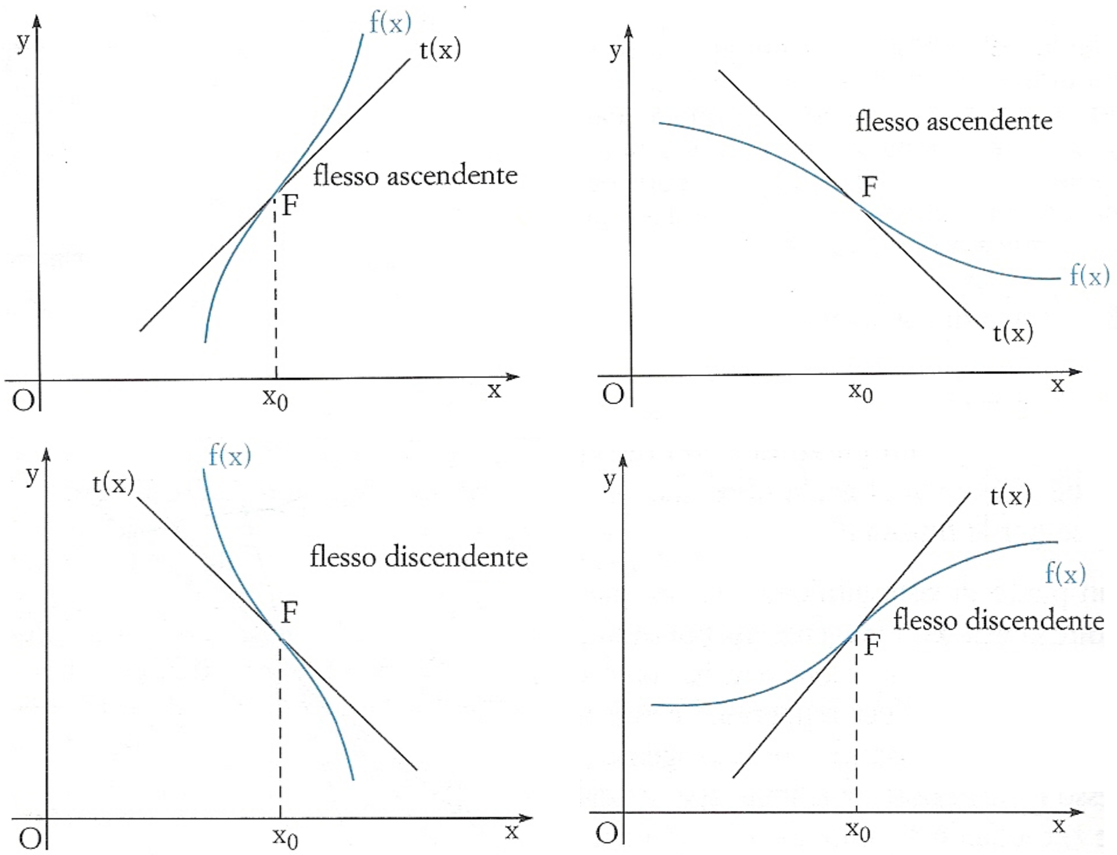




Punti di flesso

Il punto in cui la curva γ cambia la sua concavità da verso il basso a verso l'alto e viceversa è detto **punto di flesso** o **punto d'inflessione**. La tangente a γ in un punto di flesso è detta **tangente inflessionale** ed attraversa la curva. Viceversa se la tangente a γ in P_o attraversa la curva allora questa presenta in P_o un **punto di flesso**.

Definizione: La curva γ di equazione $y = f(x)$ ha in $P_o[x_o, f(x_o)]$ un **punto di flesso** (o un **punto di inflessione** o un flesso) se volge la concavità verso l'**alto** (il **basso**) alla sinistra di x_o (cioè per $x < x_o$) e verso il **basso** (l'**alto**) alla destra di x_o (cioè per $x > x_o$).



Il flesso è detto **ascendente** (**discendente**) se il $G(f)$ è sotto (sopra) la tangente alla sinistra di P_o e sopra (sotto) la tangente alla destra di P_o. Con parole diverse possiamo dire che un flesso è **ascendente** (**discendente**) se la concavità passa da verso il basso (l'alto) a verso l'alto (il basso).

Se risulta $f'(x_o) = 0$ il flesso dicesi a tangente orizzontale, altrimenti dicesi a **tangente obliqua**

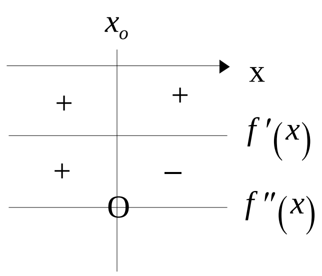
- Un punto P_o del grafico γ di una funzione $f(x)$ è un punto di flesso (o di **inflessione**) quando determina il cambiamento della concavità della curva stessa.
- Se la derivata seconda $f''(x)$ cambia di segno quando la x passa attraverso x_o (dalla sinistra alla destra) allora x_o è l'ascissa di un punto di flesso. Precisamente un flesso ascendente se passa da valori negativi a valori positivi, **discendente** se passa da valori positivi a valori negativi

Teorema: $f''(x_o) = 0 \quad , \quad f''(x_o-) < 0 \quad , \quad f''(x_o+) > 0$

$$[\, f''(x_o) = 0 \quad , \quad f''(x_o-) > 0 \quad , \quad f''(x_o+) < 0\,]$$

sono **C.N.S.** perché il grafico γ della funzione $f(x)$, derivabile due volte nel punto x_o, presenti nel punto $P_o[x_o, f(x_o)]$ un flesso ascendente (**discendente**).

Teorema: $f''(x_o)=0 \quad , \quad f'''(x_o) \neq 0$ sono **C.N.S.** perché il grafico γ della funzione $f(x)$, derivabile tre volte nel punto x_o, presenti nel punto $P_o[x_o, f(x_o)]$ un punto di flesso che è ascendente (**discendente**) se risulta $f'''(x_o) > 0$ [$f'''(x_o) < 0$] .



$\begin{cases} \text{Flesso discendente a tangente} \\ \text{obliqua con funzione crescente} \end{cases}$ Fig. (1)

$\vartheta = \widehat{xt} < \frac{\pi}{2}$, t = retta tangente a γ in P_o , n = retta normale a γ in P_o

ESEMPI

Calcolare gli eventuali punti di flesso del grafico della funzione $f(x) = x^4(1-x)^3$

$f'(x) = x^3(1-x)^2(4-7x) \quad , \quad f''(x) = 6x^2(1-x)(7x^2 - 8x + 2)$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2(1-x)(7x^2 - 8x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \, , \, x = 1 \, , \, x = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{7}$$

		0		$x=\frac{4-\sqrt{2}}{7}$		$x=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$		1		x
	+	O	+		+		+		+	x^2
	+		+		+		+	O	−	$1-x$
	+		+	O	−	O	+		+	$7x^2-8x+2$
	+	O	+	O	−	O	+	O	−	$f''(x)$

$x=\frac{4-\sqrt{2}}{7}$ punto di flesso discendente,

$x=\frac{4+\sqrt{2}}{7}$ punto di flesso ascendente

$x=1$ punto di flesso discendente

Calcolare gli eventuali punti di flesso del grafico della funzione $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x-2}$

$$d\text{om } f=R-\{-2,1\}\ ,\ f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2+x-2\right)-(2x+1)x^3}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+2x-6\right)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(4x^3+6x^2-12x\right)\left(x^2+x-2\right)^{\cancel{2}\,1}-2\cancel{\left(x^2+x-2\right)}(2x+1)\left(x^4+2x^3-6x^2\right)}{\left(x^2+x-2\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(x)=\frac{6x\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3}\ ,\ f''(x)=0\ \Rightarrow 6x\left(x^2-2x+4\right)\ \Rightarrow\ x=0\ ,\ x^2-2x+4=0$$

L'equazione di secondo grado ammette radici complesse e coniugate $x^2-2x+4>0\ \ \forall\ x\in d\text{om } f$

$x=0$ punto di flesso discendente

		-2		0		1		x
	−		−	O	+		+	x
	+	O	−		−	O	+	$\left(x^2+x-2\right)^3$
	−	∞	+	O	−	∞	+	$f''(x)$

$$\mathbf{f(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}} \qquad dom\, f =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\quad , \quad f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x + 1 - x + 1}{(x+1)^2}$$

$$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}}} \qquad f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot (x+1)}{(x+1)^2 (x^2 - 1)} =$$

$$= \frac{-(2x^2 + x - 1)}{(x+1)^3 (x-1)\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \mathbf{f''(x) = \frac{1 - 2x}{(x + 1)^2 (x - 1)\sqrt{x^2 - 1}}}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \notin dom\, f$$

La funzione proposta **non presenta punti di flesso** .

Calcolare gli eventuali punti di flesso del grafico della funzione $\boxed{f(x) = tg\, x - 2\sin x}$

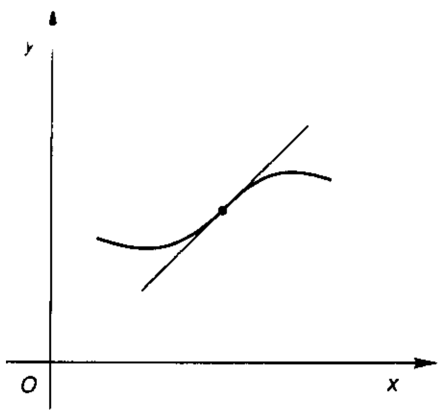
con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ **e** $x \neq \frac{\pi}{2}$

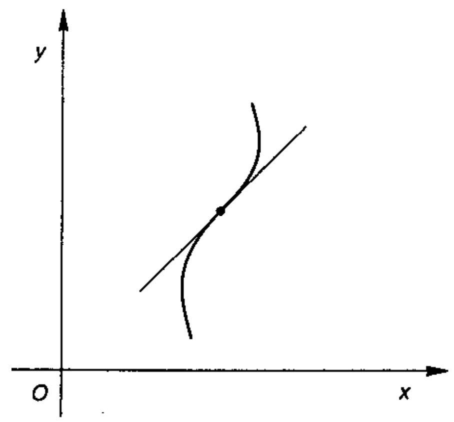
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2\cos x = \frac{1 - 2\cos^3 x}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x - 2\cos x$$

$$f''(x) = 2tg\, x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2\sin x = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + 2\sin x = \frac{2\sin x(1 + \cos^3 x)}{\cos^3 x} = \frac{2tg\, x(1 + \cos^3 x)}{\cos^2 x}$$

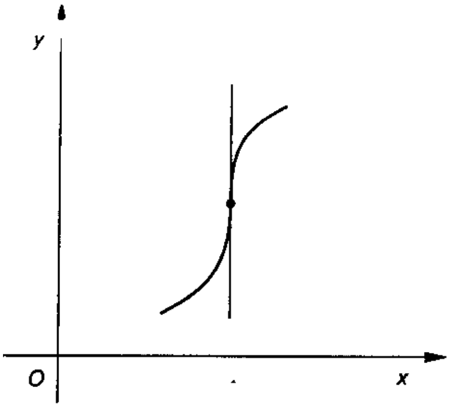
$x = 0$ **Flesso ascendente** $\qquad x = \pi$ **Flesso ascendente**

	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$
x									
$tg\, x$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	∞
$1+\cos^3 x$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$\cos^2 x$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

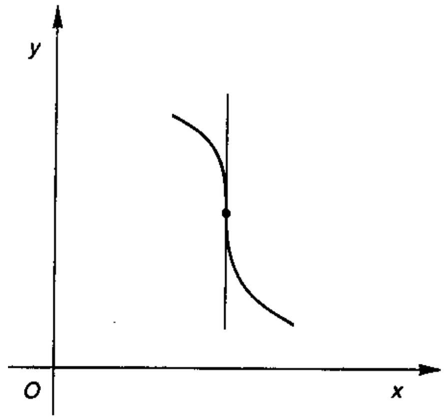




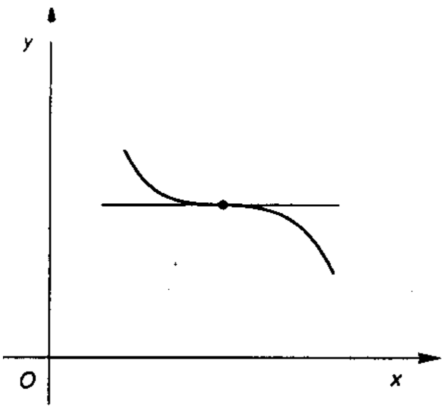
Flesso discendente obliquo



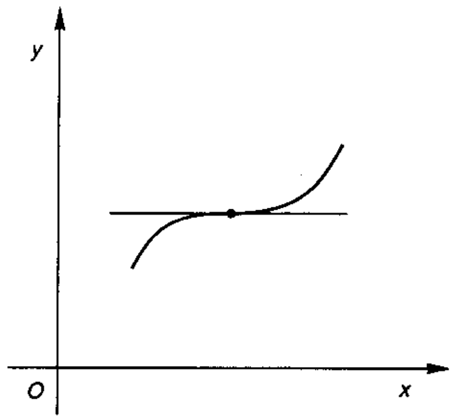
Flesso ascendente obliquo



Flesso discendente verticale

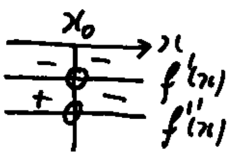


Flesso ascendente verticale

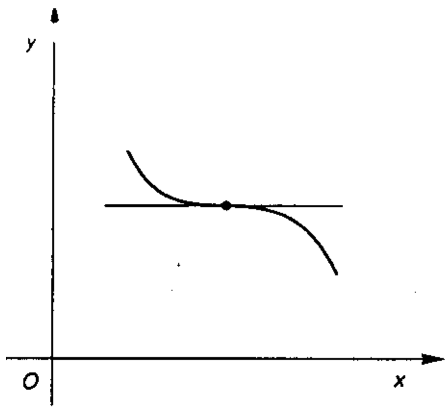


Flesso discendente orizzontale

Flesso ascendente orizzontale



$\vartheta = 0$



Flesso discendente a tangente orizzontale con funzione decrescente

Asintoti di una curva piana

Sia γ una curva piana di equazione $y = f(x)$ o, in termini equivalenti, γ sia il grafico $G(f)$ della funzione f. Se $P(x,y) \in \gamma$ con x ed y coordinate finite, diciamo che P è un punto proprio o un **punto al finito** della curva γ. (*)

(*) Diciamo che P è un punto proprio della curva γ se esso appartiene alla curva ed ha coordinate $(x; y)$ **finite**

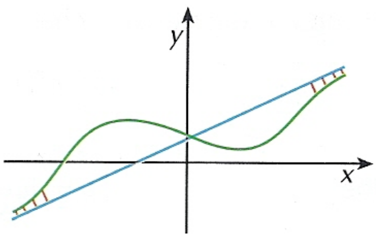
Se $P(x,y) \in \gamma$ ed almeno una delle sue coordinate è infinita diciamo che **P** è un punto improprio o un **punto all'infinito** della curva γ e scriviamo $P \equiv P_\infty$. In quest'ultimo caso diciamo pure che la curva γ ha un ramo che si estende all'infinito o che è una curva aperta. Col termine punti propri (**punti impropri**) intendiamo punti al finito (punti all'infinito). Sia $\overline{PH} = \delta = d(P,r)$ la distanza di un generico punto P della curva γ dalla retta r di equazione $y = mx + n$ e di coefficiente angolare $m = tg\vartheta$. Se risulta:

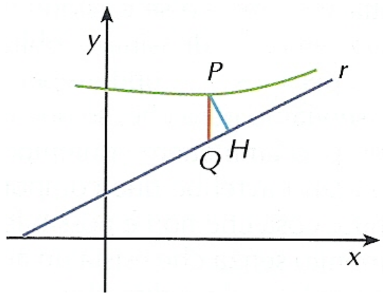
$$\lim_{P \to P_\infty} \overline{PH} = 0 \qquad \textbf{[1]}$$

la retta r dicesi asintoto della curva γ o del grafico della funzione f. In particolare l'asintoto dicesi:

1) obliquo se **m** è un numero finito non nullo ($\vartheta \neq 0$, $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$). In questo caso il punto improprio P_∞ della curva γ ha entrambe le coordinate infinite $P_\infty = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} P(x,y)$

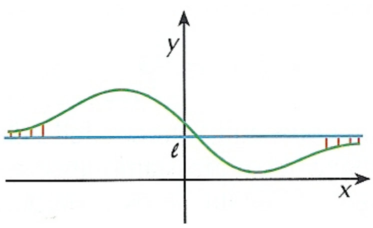
L'asintoto obliquo ha equazione del tipo: $y = mx + n$





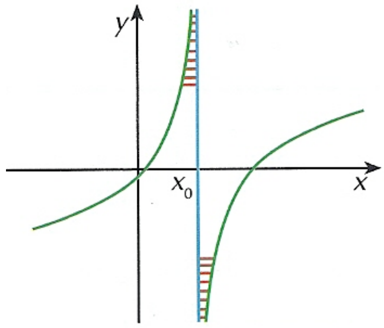
2) orizzontale se $m = 0$ ($\vartheta = 0$). In questo caso il punto improprio P_∞ della curva γ ha scissa infinita ed ordinata finita. $P_\infty = \lim_{x \to \infty} P(x,n)$

L'**asintoto orizzontale** (che può essere considerato un asintoto obliquo particolare, cioè un asintoto obliquo avente coefficiente angolare nullo) ha equazione: $y = n$



3) **verticale** se $m = \infty$ $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$. In questo caso il punto improprio P_∞ della curva γ ha ascissa finita ed ordinata infinita. $P_\infty = \lim_{y\to\infty} P(k, y)$

L'**asintoto verticale** ha equazione del tipo: $x = k$



TEOREMA N° 1

C.N.S. perché la curva γ di equazione $y = f(x)$ ammetta come asintoto obliquo la retta r di equazione $y = mx + n$ è che esista finito e non nullo il limite $\mathbf{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$ [2]

e che esista finito il limite: $\mathbf{n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]}$ [3]

ALTRA FORMULAZIONE

$\mathbf{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$ ed $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$ [4] sono **C.N.S.** perché il grafico γ della funzione f ammetta come asintoto obliquo la retta r di equazione $y = mx + n$.

Se i limiti [2] e [3] esistono soltanto per $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) allora la retta r dicesi asintoto obliquo destro (**asintoto obliquo sinistro**) della curva γ.

Quando l'asintoto obliquo destro coincide con l'asintoto obliquo sinistro allora l'asintoto dicesi asintoto obliquo completo. Una curva piana γ di equazione $y = f(x)$ non può avere più di un asintoto obliquo. Questo significa che la curva γ:

1) **ha un asintoto obliquo destro diverso dal sinistro** , oppure

2) **ha solo asintoto obliquo destro o solo asintoto obliquo sinistro** , oppure

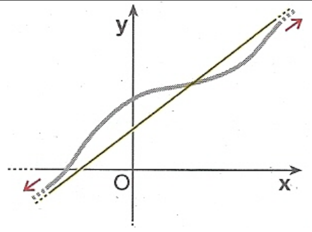
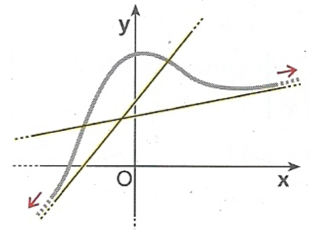
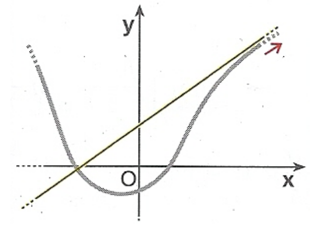
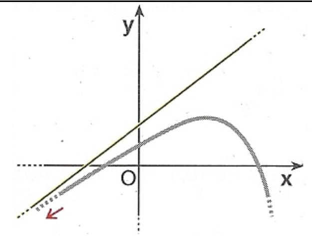
3) **ha un solo asintoto obliquo completo** che , in particolare , può essere orizzontale , oppure

4) **non ha alcun asintoto obliquo**

TEOREMA N° 2

$\lim_{x\to\infty} f(x) = n$ (con n numero reale finito) è **C.N.S.** perché la curva γ di equazione $y = f(x)$ ammetta la retta r di equazione $y = n$ come asintoto orizzontale (che è un caso particolare di asintoto obliquo).

Anche in questo caso si può parlare di asintoto orizzontale sinistro, asintoto orizzontale destro, asintoto orizzontale completo. Valgono le stesse considerazioni fatte per gli asintoti obliqui.

			
Il grafico della funzione ha lo stesso asintoto obliquo per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$	Il grafico della funzione ha asintoto obliquo sinistro per $x \to -\infty$ diverso da quello destro per $x \to +\infty$	Il grafico della funzione ha soltanto l'asintoto obliquo destro per $x \to +\infty$	Il grafico della funzione ha soltanto l'asintoto obliquo sinistro per $x \to -\infty$

Teorema N°3: $\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty$ è **C.N.S.** perché la curva γ di equazione $y = f(x)$ ammetta la retta di equazione $x = x_o$ come **asintoto verticale**.

Gli asintoti verticali di una curva piana , quando esistono , vanno ricercati in corrispondenza degli eventuali punti di divergenza della f , cioè nei punti in cui $f(x)$ **diverge**.

Una curva piana può non ammettere asintoti verticali , ne può ammettere uno solo , ne può ammettere più di uno , ne può ammettere infiniti come avviene per alcune funzioni goniometriche .

$\lim_{x \to x_o+} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale destro**

$\lim_{x \to x_o-} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale sinistro**

$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale in alto**

$\lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale in basso**

$\lim_{x \to x_o+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale destro in alto**

$\lim_{x \to x_o+} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale destro in basso**

$\lim_{x \to x_o-} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale sinistro in alto**

$\lim_{x \to x_o -} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **asintoto verticale sinistro in basso**

Osservazione N°1: La retta di equazione $y = mx + n$ è asintoto obliquo della curva γ di equazione $y = f(x)$ se $f(x)$ può essere scritta nella forma: $\mathbf{f(x) = mx + n + g(x)}$ con:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Osservazione N°2: Spesso l'analisi del comportamento della funzione agli estremi del dominio ci consente di trovare:

1) l'**asintoto orizzontale** che, se esiste, ci evita la ricerca dell'eventuale asintoto obliquo

2) gli eventuali asintoti verticali

Osservazione N°3: I limiti [2] e[3] , presentandosi rispettivamente nelle forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $+\infty - \infty$ possono essere calcolati applicando le regole di De L'Hospital. In particolare avremo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} f'(x)$$

Esistono funzioni dotate di asintoto obliquo il cui coefficiente angolare **m** non può essere calcolato come il limite della derivata prima.

Osservazione N°4: L'asintoto obliquo (orizzontale) può incontrare al finito la curva γ in uno o più punti

Osservazione N°5: Se il punto improprio P_∞ della curva γ ha entrambe le coordinate infinite allora l'eventuale asintoto di γ è sicuramente **asintoto obliquo**. In questo caso risulta:

$$\vartheta \neq 0 \, , \quad \vartheta \neq \frac{\pi}{2}$$

Se P_∞ ha ascissa infinita ed ordinata finita l'asintoto dicesi orizzontale. In questo caso abbiamo:

$$\vartheta = 0 \quad , m = 0$$

Se P_∞ ha ascissa finita ed ordinata infinita l'asintoto dicesi verticale. In questo caso abbiamo:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad m = tg\,\vartheta = tg\frac{\pi}{2} = \infty$$

Calcolare l'equazione dell'asintoto obliquo della curva piana γ avente equazione

$$y = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$$

$$f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1} \quad , \qquad dom\, f =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x + 3\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x} + 3\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} =$$

$$= 5 + 3\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = 5 + 3\lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$m_1 = 5 + 3\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = 5 + 3 = 8$$

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - m_1 x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[5x + 3\sqrt{x^2 - 1} - 8x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[3\sqrt{x^2 - 1} - 3x\right] =$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2 - 1} - x\right] = 3\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2 - 1} - x\right]\cdot\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} =$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \qquad y = 8x \qquad \text{asintoto obliquo destro}$$

$$m_2 = 5 + 3\lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = 5 - 3 = 2$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - m_1 x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[5x + 3\sqrt{x^2 - 1} - 2x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[3\sqrt{x^2 - 1} + 3x\right] =$$

$$= 3\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2 - 1} + x\right] = 3\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2 - 1} + x\right]\cdot\frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 3\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} =$$

$$= 3\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0 \qquad y = 2x \qquad \text{asintoto obliquo sinistro}$$

$$f(x) = \frac{-2x^4 + x^3 + 2x}{x^3 - 1} = -2x + 1 + \frac{1}{x^3 - 1} \qquad dom\, f = R - \{1\}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3 - 1} = 0 \;\Rightarrow\; y = -2x + 1 \qquad \text{asintoto obliquo completo}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty \;\Rightarrow\; x = 1 \qquad \text{asintoto verticale completo}$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{3x^2 + 1} = \frac{2}{3}x - \frac{2x}{3(3x^2 + 1)} \qquad dom\, f = R$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[-\frac{2x}{3(3x^2+1)} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x \qquad \text{asintoto obliquo completo}$$

$$\mathbf{f(x) = -x + 1 + e^{-x}} \qquad dom\, f = R$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1 \qquad \text{asintoto obliquo destro}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}} \qquad dom\, f = R - \{0\}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \qquad \text{asintoto orizzontale completo}$$

La presenza dell'asintoto orizzontale ci evita la ricerca dell'asintoto obliquo.

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{x-1} \ln \frac{x}{x-1}} \qquad dom\, f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} \ln \frac{x}{x-1} = 1 \cdot \ln 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \text{asintoto orizzontale completo}$$

La presenza dell'asintoto orizzontale ci evita la ricerca dell'asintoto obliquo.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x}{x-1} \ln \frac{x}{x-1} = (+\infty) \cdot \ln(+\infty) = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ asintoto verticale destro in alto}$$

$$\mathbf{f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}} \qquad dom\, f =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \pm 1$$

$$m = 1 \quad \Rightarrow \quad n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} + x \right)} = 0$$

$$y = x \qquad \text{asintoto obliquo destro}$$

$$m = -1 \quad \Rightarrow \quad n = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} + x \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x \right)} = 0$$

$y = -x$ asintoto obliquo sinistro

$$\lim_{x \to 0-} \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} = \pm\infty \Rightarrow x = 0$$ asintoto verticale sinistro in alto

$$\mathbf{f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2} \qquad d\,om\, f = R - \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\}$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \ln \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \ln 4 \Rightarrow y = \ln 4$$ **asintoto orizzontale completo**

La presenza dell'asintoto orizzontale ci evita la ricerca dell'asintoto obliquo .

$$\lim_{x \to -2} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = +\infty \Rightarrow x = -2$$ asintoto verticale completo in alto

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = -\infty \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$ asintoto verticale completo in basso

Indicazioni generali per lo studio e la rappresentazione grafica delle funzioni $f(x)$

Studiare una funzione significa individuare tutte le sue proprietà e ricercare tutti gli elementi utili per la costruzione del suo grafico. Di solito conviene analizzare le seguenti questioni:

01) dominio o campo di esistenza o insieme di esistenza

02) intersezioni con gli assi cartesiani

03) segno della funzione

04) condizioni agli estremi, cioè comportamento della funzione agli estremi del suo dominio

05) continuità e **discontinuità** della funzione

06) asintoti

07) intervalli di monotonia, cioè calcolo della derivata prima e studio del suo segno per la determinazione degli intervalli in cui la funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente e degli eventuali punti estremanti (relativi ed assoluti)

08) discontinuità della derivata prima, cioè determinazione dei punti in cui la funzione è continua ma non derivabile: **punti angolosi, cuspidi di prima specie, flessi a tangente verticale**

09) intervalli di convessità, cioè calcolo della **derivata seconda** e studio del suo segno per la determinazione degli intervalli in cui la funzione è **convessa** o **concava** e degli eventuali **punti di flesso**

10) simmetrie evidenti

11) eventuale periodicità della funzione

12) codominio

13) calcolo di particolari valori di $f(x)$ e di $f'(x)$

14) **tabella riepilogativa** dei risultati , utile per avere una visione globale delle proprietà della funzione

15) costruzione del **grafico** della funzione.

E' appena il caso di ricordare che, nello studio delle funzioni $f(x)$, non è necessario seguire l'ordine sopraindicato o trattare tutte le questioni elencate

Dominio di una funzione

Quando dobbiamo studiare una data funzione conosciamo il suo insieme di definizione [1], che di solito è l'insieme **R** ,. La prima cosa da fare è calcolare il suo dominio cioè l'insieme dei valori **x** che hanno una immagine $f(x)$ reale e finita .

Spesso la funzione è data mediante una espressione analitica nella variabile reale **x** , costruita mediante un certo numero di operazioni da eseguire sulla x (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza , logaritmi , funzioni goniometriche) . In questo caso occorre determinare il più ampio insieme di numeri reali dove hanno significato tutte le operazioni sintetizzate dal simbolo f , insieme che rappresenta il dominio della funzione e che noi indicheremo con uno dei seguenti simboli: << dom f , **D** , D_f , **E** , $\mathcal{I}$, C_e >>

Il dominio di una funzione f è l'insieme di tutti i valori reali che possiamo attribuire alla variabile indipendente x affinché esistano finite e reali le corrispondenti immagini $f(x)$.

---

(1) L ' **insieme di definizione** di una funzione è l'insieme dove si stabilisce di studiarla . Di solito è l'insieme R , ma potrebbe anche essere un suo sottoinsieme .

Il dominio di una funzione , in generale , è costituito da un intervallo o dall'unione di due o più intervalli limitati o illimitati , chiusi o aperti . Qualche volta il dominio di una funzione coincide con l'insieme **R** .

Le condizioni cui deve soddisfare la variabile indipendente **x** perché la sua immagine $f(x)$ sia reale e finita dipende dalle funzioni elementari presenti nella funzione f .

Per la individuazione del **dominio** di una funzione f possono essere utili le seguenti considerazioni di carattere pratico:

01) L ' insieme ambiente da cui partire è l ' insieme **R**

02) Se nella funzione f figura qualche logaritmo allora bisogna imporre che ogni argomento sia maggiore di zero . Il dominio di f è un sottoinsieme delle soluzioni del sistema di inequazioni precedentemente ricavato .

03) Se nella funzione f figura qualche radice ad indice pari allora bisogna imporre che ogni radicando risulti ≥ 0 . Il dominio di f è un sottoinsieme delle soluzioni del sistema di inequazioni ottenuto .

04) Nella funzione f figura qualche denominatore . Gli **zeri** di tali denominatori non fanno parte del dominio della funzione .

05) Se nella funzione f figura qualche arcoseno o qualche arcoseno, allora bisogna imporre che gli argomenti di queste funzioni elementari siano compresi tra i numeri -1 e 1 (estremi compresi) .

06) Se la funzione f è una potenza avente come esponente un numero reale o una qualsiasi altra funzione , allora bisogna imporre che la base di tale potenza sia una quantità positiva .

Elenchiamo i domini di alcune funzioni elementari presenti , di solito , in altre più complesse . Indichiamo con $P(x)$ e $A(x)$ due generici polinomi in x .

01) $$\text{dom}\, P(x) = R =]-\infty,+\infty[$$

02) $f(x) = \dfrac{P(x)}{A(x)}$ = funzione razionale fratta ridotta ai minimi termini

Il dominio di f è l'insieme **R** privato degli eventuali zeri del polinomio $A(x)$. Se questi zeri sono i numeri x_1 , x_2 abbiamo: $$\text{dom}\, f = \text{dom}\frac{P(x)}{B(x)} = R - \{x_1, x_2\}$$

03) $f(x) = \sqrt[2n]{P(x)}$ con $n \in N$. Le soluzioni dell'inequazione $P(x) \geq 0$ costituiscono il dominio della funzione $f(x)$.

04) $f(x) = \sqrt[2n+1]{P(x)}$ con $n \in N$ dom $f = R$

05) $f(x) = \ln P(x)$ Le soluzioni dell'inequazione $P(x) > 0$ costituiscono il **dominio** della funzione $f(x)$.

06) $f(x) = \begin{cases} \sin P(x) \\ \cos P(x) \end{cases}$ dom $f = R$

07) $f(x) = tg\, P(x)$ dom $f = R$ esclusi i valori della x che verificano l'equazione

$P(x) = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$ con $k \in Z$

08) $f(x) = [A(x)]^{P(x)}$ Le soluzioni dell'inequazione $A(x) > 0$ rappresentano il dominio della funzione $f(x)$.

09) $f(x) = [A(x)]^{\alpha}$ con $\alpha \in R$ Le soluzioni dell'inequazione $A(x) > 0$ rappresentano il dominio della funzione $f(x)$.

10) $f(x) = a^{P(x)}$ con $a > 0$ dom $f = R$

11) $f(x) = \begin{cases} \arcsin P(x) \\ \arccos P(x) \end{cases}$ le soluzioni del sistema di inequazioni

$-1 \leq P(x) \leq +1$ costituiscono il dominio di $f(x)$

12) $f(x) = \text{arctg}\, P(x)$ dom $f = R$

In generale la funzione f risulterà costituita da una opportuna combinazione di funzioni elementari e di funzioni del tipo sopraelencate e , quindi , il suo **dominio** coinciderà con le soluzioni di un opportuno sistema di inequazioni .

Ad esempio , il **dominio** della funzione $f(x) = \sqrt{P(x)} + \arcsin A(x)$

coincide con le soluzioni del seguente sistema di inequazioni: $\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ -1 \leq A(x) \leq +1 \end{cases}$

Intersezioni con gli assi cartesiani

Intersezione con l'asse delle ordinate o asse delle y

Basta porre $x = 0$ nell'equazione $y = f(x)$ se questo valore appartiene al dominio della funzione. Il punto P, se esiste, comune al grafico della funzione ed all'asse y, ha coordinate: $(0, f(0))$. Risulta pertanto: $P(0, f(0))$

Intersezione con l'asse delle ascisse o asse x

Basta porre $y = 0$ nell'equazione $y = f(x)$ che è l'equazione del grafico della funzione f che noi indicheremo con uno dei due seguenti simboli: $G(f)$ oppure G_f. Otteniamo l'equazione $f(x) = 0$. Se, ad esempio, le radici di questa equazioni sono i numeri x_1 , x_2 , x_3 allora i punti comuni al grafico della funzione ed all'asse delle ascisse sono: $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, 0)$.
Spesso l'equazione $f(x) = 0$ è risolubile applicando i metodi dell'algebra elementare; altre volte, invece, è opportuno ricorrere ai metodi dell'analisi numerica o a procedimenti di natura grafica.
Possono risultare utili per il calcolo di una radice approssimata dell'equazione $f(x) = 0$ le seguenti regole:

- se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e se risulta $f(a)\cdot f(b) < 0$ almeno una radice x_1 dell'equazione $f(x) = 0$ appartiene all'intervallo $]a, b[$, cioè : $a < x_1 < b$, $f(x_1) = 0$.
- se poi $f(x)$ è anche strettamente monotona (cioè strettamente crescente o strettamente decrescente) in tutto l'intervallo $[a, b]$, allora esiste una sola radice dell'equazione $f(x) = 0$ appartenente all'intervallo $]a, b[$, cioè tale che : $a < x_1 < b$, $f(x_1) = 0$.

ESEMPIO

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x + 3 = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 10x - 6 > 0$ per $x < \dfrac{5 - \sqrt{43}}{3} \approx -0,519$

e per $x > \dfrac{5 + \sqrt{43}}{3} \approx 3,85$

$f(-0,58)\cdot f(-0,52) < 0 \quad \Rightarrow \quad -0,58 < x_1 < -0,52$

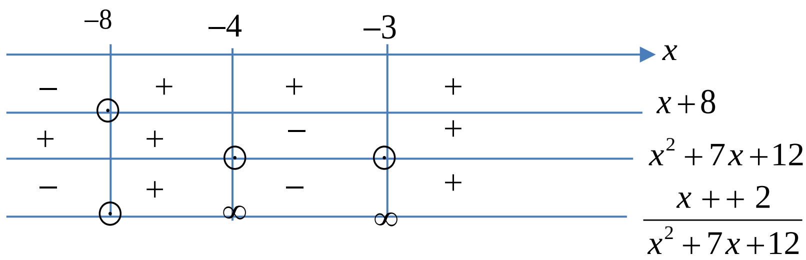
$f(0)\cdot f(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x_2 < 1$, $\quad f(5)\cdot f(6) < 0 \quad \Rightarrow \quad 5 < x_3 < 6$

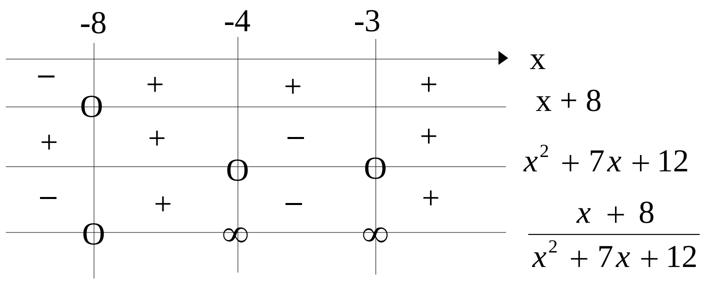
Segno della funzione

Esso serve per individuare i quadranti dove si sviluppa il grafico della funzione. Studiare il segno della funzione significa stabilire per quali valori della x la funzione $f(x)$ è positiva, negativa , nulla.

Il segno di $f(x)$ si deduce risolvendo prima l'equazione $f(x) = 0$ e poi una delle due inequazioni $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.

Per lo studio del segno di una funzione può convenire l'utilizzazione di uno schema tabellare come quello indicato nell'esempio seguente.





La funzione $\mathbf{f(x) = \dfrac{x + 8}{x^2 + 7x + 12}}$ è positiva negli intervalli]-8,-4[, $]-3,+\infty[$, negativa negli intervalli $]-\infty,-8[$, $]-4,-3[$.

Dalla precedente tabella deduciamo quanto segue:

$\lim\limits_{x\to -4-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -4+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3+} f(x) = +\infty$

Questo significa che le rette di equazioni $x = -4$ ed $x = -3$ sono due asintoti verticali per il grafico della funzione.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$, cioè la retta di equazione $y = 0$ è l'asintoto orizzontale del grafico della funzione .

Condizioni agli estremi, cioè comportamento della funzione agli estremi del suo dominio

Imporre le condizioni agli estremi significa studiare il comportamento della funzione agli estremi del suo dominio e questo significa esaminare il comportamento della funzione $f(x)$

1) a $\pm\infty$ se il dominio della funzione è illimitato inferiormente e superiormente

2) nei suoi eventuali punti di discontinuità .

Tale questione viene risolta mediante il calcolo di opportuni limiti . Se risulta:

$$\text{dom } f =]-\infty, x_1[\cup [x_2, +\infty[- \{x_3\}$$

imporre le condizioni agli estremi significa calcolare i seguenti limiti :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to x_1} f(x) \qquad \lim_{x\to x_3} f(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Spesso le condizioni agli estremi ci consentono di trovare:

- l'asintoto orizzontale che, se esiste, ci evita la ricerca dell'asintoto obliquo
- gli eventuali **asintoti verticali**

ESEMPI

$$\boxed{f(x) = \frac{5-4x}{2x+3}} \qquad \text{dom } f = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5-4x}{2x+3} = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2$$ **asintoto orizzontale completo**

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} \frac{5-4x}{2x+3} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$$ **asintoto verticale completo**

$$\boxed{f(x) = e^{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}}} \qquad \text{dom } f =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}} = e \quad \Rightarrow \quad y = e$$ asintoto orizzontale destro

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}} = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad y = e^{-1} = \frac{1}{e}$$ asintoto orizzontale sinistro

$\lim_{x\to -2-} e^{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}} = e^{-\infty} = 0$ La funzione presenta nel punto $x = -2$ una discontinuità di seconda specie in quanto non esiste il limite destro. Tuttavia la funzione è prolungabile per continuità dalla sinistra se poniamo:

$$f(-2-) = \lim_{x\to -2-} e^{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}} = e^{-\infty} = 0$$

$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}} = e^{+\infty} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ asintoto verticale destro

Continuità e discontinuità della funzione f(x)

Consiste nella ricerca degli intervalli parziali del dominio di $f(x)$ in cui la funzione risulta **continua** e dei punti nei quali la $f(x)$ risulta **discontinua** . Particolare importanza ha la **discontinuità di terza specie eliminabile** . Essa si presenta quando esiste il limite $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell$ ma non esiste $f(x_o)$ o , se esiste , è diverso da ℓ . La **discontinuità si elimina** ponendo:

$$f(x_o) = \lim_{x\to x_o} f(x) = \ell$$

In tal caso , per definizione , la funzione è continua anche nel punto x_o . Si dice anche che la funzione è **prolungata per continuità** nel punto x_o .

Si ha la **discontinuità di prima specie** quando esistono finiti , ma sono fra loro diversi , i limiti sinistro e destro .

Si ha una **discontinuità di seconda specie** quando almeno uno dei limiti destro o sinistro è infinito o non esiste .

Asintoti

Una retta r di equazione **y = mx + n** si dice **asintoto** per il grafico della funzione $f(x)$ quando la retta ed il grafico hanno lo stesso punto improprio . Questo significa che deve essere **infinitesima** la distanza $\delta = \overline{PH}$ di un generico punto del $G(f)$ dalla retta r , cioè quando risulta :

$$\lim_{P\to P_\infty} \overline{PH} = 0$$

Asintoto è una retta tangente al grafico della funzione nel suo **punto improprio** .
Gli asintoti possono essere **verticali** , **obliqui** , **orizzontali** . Un asintoto orizzontale è un caso particolare di asintoto obliquo . Il grafico di una funzione univoca (o monodroma o ad un solo valore) $f(x)$ ha al massimo un solo asintoto obliquo che , al limite , può presentarsi in posizione orizzontale .
Per la determinazione degli asintoti occorre ricordare quanto segue :

- $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale completo

  $\lim\limits_{x \to x_o+} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale destro

  $\lim\limits_{x \to x_o-} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale sinistro

  $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale in alto

  $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale in basso

  $\lim\limits_{x \to x_o+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale destro in alto

  $\lim\limits_{x \to x_o+} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale destro in basso

  $\lim\limits_{x \to x_o-} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale sinistro in alto

  $\lim\limits_{x \to x_o-} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ Asintoto verticale sinistro in basso

- Se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = n$ (con n numero reale finito) allora la retta di equazione $y = n$ è un **asintoto orizzontale completo** . Se , invece , il limite si verifica solo per $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) allora abbiamo l ' **asintoto orizzontale destro** (sinistro) . La presenza dell'asintoto orizzontale esclude quella dell ' asintoto obliquo .

Lo studio del segno della funzione $d(x) = f(x) - n$ ci dà informazioni sulla posizione del grafico della funzione rispetto all'asintoto orizzontale .

- Se risulta $\mathbf{m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} f'(x)}$ $\quad \mathbf{n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]}$ allora la retta di equazione $y = mx + n$ è l ' **asintoto obliquo completo** del grafico della funzione $f(x)$.

La retta di equazione $y = mx + n$ è **asintoto obliquo** della curva γ di equazione $y = f(x)$ se $f(x)$ può essere scritta nella forma: $\mathbf{f(x) = mx + n + g(x)}$ con: $\mathbf{\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0}$.

Quest'ultimo procedimento si presta bene per la ricerca dell ' **asintoto obliquo completo** delle funzioni razionali fratte .

Se i sopra citati limiti si verificano solo per $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) allora si parla di **asintoto obliquo destro** (sinistro) .

Intervalli di monotonia, cioè calcolo della derivata prima e studio del suo segno per la determinazione degli intervalli in cui la funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente e degli eventuali punti estremanti (relativi ed assoluti)

Si calcola la derivata prima della funzione $f(x)$ applicando le note regole di derivazione . Gli eventuali **punti di massimo e di minimo relativi** della funzione $f(x)$ vanno ricercati tra gli **zeri** (detti **punti stazionari della funzione**) della derivata prima che si ottengono risolvendo l ' equazione $f'(x) = 0$.

Lo studio del segno della derivata prima $f'(x)$ in opportuni intorni degli zeri della derivata prima ci consente di stabilire in quali intervalli parziali la funzione è **strettamente crescente** o strettamente decrescente e quindi in quali punti la funzione presenta **massimi e minimi relativi** .

Se risulta $f'(x_o) = 0$ abbiamo:

	x_o		x		
$+$	0	$-$	$f'(x)$	$x = x_o$	punto di massimo relativo
$-$	0	$+$	$f'(x)$	$x = x_o$	punto di minimo relativo
$+$	0	$+$	$f'(x)$		probabile punto di flesso a
$-$	0	$-$	$f'(x)$		tangente orizzontale

Quando lo studio del segno della derivata prima presenta qualche difficoltà , allora potremo fare riferimento al valore assunto dalla derivata seconda nel punto x_o , utilizzando il seguente teorema:

$[\ f'(x_o) = 0,\ \ f''(x_o) > 0\ ] \Rightarrow\ x = x_o$ **punto di minimo relativo**

$[\ f'(x_o) = 0\ ,\ f''(x_o) < 0\ ] \Rightarrow\ x = x_o$ **punto di massimo relativo**

Se x_o è un **punto di massimo** (minimo) **relativo** , allora il numero $f(x_o)$ rappresenta il **massimo** (minimo) **relativo** della funzione .

Per la determinazione degli **estremi assoluti** della funzione $f(x)$ bisogna tenere presente le seguenti considerazioni . Per il teorema di Weierstrass , una funzione che sia continua in un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ e derivabile nei suoi punti interni è certamente dotata di **estremi assoluti** .

Per calcolarli si confrontano gli estremi relativi ed i valori che la funzione acquista agli estremi dell'intervallo $[a,b]$: il **più piccolo** (grande) tra tutti questi valori è il **minimo** (massimo) **assoluto** della funzione .

Se poi la funzione $f(x)$ è continua in $[a,b]$ ma non è derivabile in qualche punto interno ad $[a,b]$ allora , ai precedenti valori , vanno aggiunti quelli che la funzione assume in corrispondenza dei valori della x dove la $f(x)$ è continua ma non derivabile .

$M(x_o, f(x_o))$ è l ' **immagine geometrica** del massimo relativo se x_o rappresenta un **punto di massimo relativo** ed $f(x_o)$ rappresenta il corrispondente **massimo relativo** .

$N(x_o, f(x_o))$ è l ' **immagine geometrica** del minimo relativo se x_o rappresenta un **punto di minimo relativo** ed $f(x_o)$ rappresenta il corrispondente **minimo relativo** .

Quando il teorema di Weierstrass non ci assicura l'esistenza degli estremi assoluti (cioè la funzione è continua ma in un intervallo non chiuso o illimitato ; oppure è discontinua in qualche punto indipendentemente dal fatto che l'intervallo sia limitato o no , chiuso o aperto) ci si dovrà regolare in maniera opportuna , cioè caso per caso ed a seconda della particolare funzione che si considera .

Di solito le **condizioni agli estremi**, cioè il calcolo di opportuni limiti , ci consentono di risolvere la questione proposta .

Discontinuità della derivata prima

Ricerca dei punti x dove la funzione è continua ma non derivabile

Può accadere che una funzione f(x) sia nel punto x_o continua ma non derivabile . Questo si verifica quando il grafico della funzione f presenta nel punto di ascissa x_o un punto angoloso (tangente sinistra diversa dalla tangente destra) oppure una *cuspide di prima specie* (tangente sinistra verticale diversa dalla tangente destra verticale ; la tangente sinistra è una semiretta coincidente con la tangente destra) o un *flesso a tangente verticale* (tangente inflessionale verticale)

Analizziamo tutti i casi che si possono presentare ricordando,innanzitutto , che una funzione non è derivabile in un punto x_o se non esiste il limite del suo rapporto incrementale relativo al punto x_o , oppure se tale limite esiste ma non è finito .

Quindi f(x) non è derivabile nel punto x_o se : 1) $f'(x_o)$ non esiste 2) $f'(x_o) = \infty$

3) $f'(x_o -) \neq f'(x_o +)$.

Ricordando che $f'(x_o)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al G(f) nel punto $P_o[x_o, f(x_o)]$, possiamo affermare quanto segue :

1) $f'(x_o)$ non esiste , il G(f) non ammette la retta tangente in $P_o[x_o, f(x_o)]$

2) $f'(x_o) = \infty$, la tangente al G(f) in $P_o[x_o, f(x_o)]$ è verticale .

Se f(x) è nel punto x_o **continua ma non derivabile** allora vale quanto segue :

3) se $f'(x_o -) \neq f'(x_o +)$,con almeno una delle due derivate, destra o sinistra, diversa da ∞, allora il grafico della funzione presenta nel punto di ascissa x_o un punto angoloso . Il G(f) non ammette retta tangente nel punto $P_o[x_o, f(x_o)]$. La tangente sinistra al G(f) esiste ma è diversa dalla tangente destra .(Una delle due tangenti , destra o sinistra , può essere verticale mentre l'altra tangente deve essere obliqua oppure orizzontale) . In questo caso la funzione $f'(x)$ presenta :

a) una ***discontinuità di prima specie*** se la derivata sinistra e quella destra esistono finite ma sono fra loro diverse

b) una ***discontinuità di seconda specie*** se una delle due derivate destra o sinistra è finita e l ' altra è infinita .

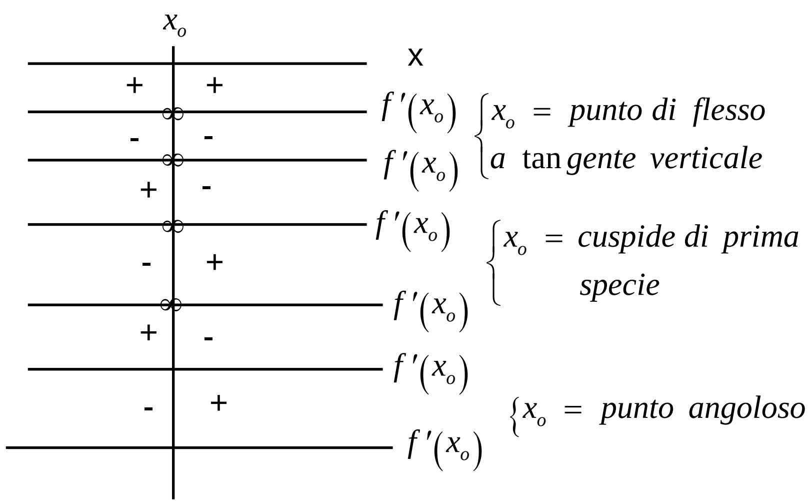
2) se $f'(x_o) = \infty$ allora il G(f) presenta nel punto di ascissa x_o :

a) un ***flesso a tangente verticale*** se $f'(x_o -) = +\infty$ $f'(x_o +) = +\infty$ oppure se $f'(x_o -) = -\infty$ $f'(x_o +) = -\infty$, cioè se il segno di $f'(x_o) = \infty$ non cambia quando la x passa da valori minori di x_o a valori più grandi di x_o In questo caso la tangente destra e la tangente sinistra al G(f) sono semirette opposte e costituiscono una retta tangente verticale (tangente inflessionale) .

b) una cuspide di prima specie se $f'(x_o -) = +\infty$ $f'(x_o +) = -\infty$ oppure se $f'(x_o -) = -\infty$ $f'(x_o +) = +\infty$, cioè se il segno di $f'(x_o) = \infty$ cambia quando la x passa da valori minori di x_o a valori più grandi di x_o . In questo caso la tangente sinistra e la tangente destra al G(f) sono semirette coincidenti e verticali .

In entrambi i casi la derivata prima della funzione f(x) , cioè la funzione $f'(x)$,presenta nel punto x_o una **discontinuità di seconda specie** .

Le cose sopraddette possono essere riassunte nel seguente prospetto :



Intervalli di convessità, cioè calcolo della derivata seconda e studio del suo segno per la determinazione degli intervalli in cui la funzione è convessa o concava e degli eventuali punti di flesso

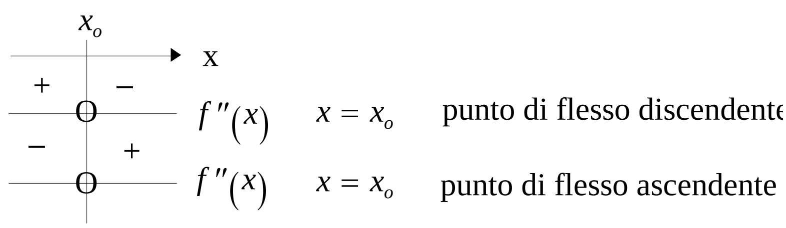
Si calcola la derivata seconda applicando le note regole di derivazione. Ricordando che il grafico di una funzione volge:

- nel punto x_o la **concavità verso l'alto** (il basso) se risulta: $f''(x_o) > 0 \quad [\quad f''(x_o) < 0 \quad]$
- nell'intervallo $[a,b]$ la **concavità verso l'alto** (il basso) se risulta :

$$f''(x_o) > 0 \qquad \forall\ x \in [a,b] \qquad\qquad [\quad f''(x_o) < 0 \qquad \forall\ x \in [a,b]\ ]$$

deduciamo che gli eventuali **flessi** (o *punti di inflessione*) vanno ricercati tra gli zeri della derivata seconda che coincidono con le radici dell'equazione $f''(x) = 0$.

Se risulta: $f''(x_o) = 0$ abbiamo:



Quando lo studio del segno della derivata seconda presenta qualche difficoltà , potremo fare riferimento al valore assunto dalla derivata terza nel punto x_o .

$[\ f''(x_o) = 0 \ , \ f'''(x_o) > 0 \ ] \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **punto di flesso ascendente**

$[\ f''(x_o) = 0 \ , \ f'''(x_o) < 0 \ ] \quad \Rightarrow \quad x = x_o$ **punto di flesso discendente**

Se $f(x)$ è una funzione non costante , continua e derivabile con derivata prima sempre continua , allora tra un massimo ed un minimo consecutivi la funzione $f(x)$ ammette almeno un punto di flesso .

Se $f(x)$ è **derivabile** n volte in x_o $(n > 2)$, se risulta :

$$f'(x_o) = f''(x_o) = f'''(x_o) = \cdots\cdots = f^{(n-1)}(x_o) = 0 \quad , \quad f^{(n)}(x_o) \neq 0 \quad \text{allora :}$$

- **n è pari** , $f(x)$ ha nel punto x_o un **massimo** (minimo) relativo se risulta

$$f^{(n)}(x_o) < 0 \qquad [\ f^{(n)}(x_o) > 0\ ]$$

- **n è dispari** Il grafico della funzione presenta nel punto x_o un **flesso ascendente** (discendente) se :

$$f^{(n)}(x_o) > 0 \qquad [\ f^{(n)}(x_o) < 0\ ]$$

Simmetrie evidenti

Per simmetrie evidenti intendiamo le simmetrie rispetto agli assi cartesiani ed alla loro origine , le simmetrie rispetto alle bisettrici degli angoli formati dagli assi cartesiani e le simmetrie rispetto alle rette orizzontali ed alle rette verticali .

A volte può essere utile sapere se il **G(*f*)** è simmetrico rispetto ad una generica retta del piano o rispetto ad un generico punto del piano .

- $f(-x) = f(x) \Rightarrow G(f)$ simmetrico rispetto all'asse delle ordinate $f(x)$ è una funzione pari**.**

In questo caso basta studiare la funzione nell'intervallo $[0,+\infty[$ ed estendere per simmetria i risultati ottenuti al resto del dominio.

- $f(-x) = -f(x) \Rightarrow G(f)$ **simmetrico rispetto all'asse delle ascisse** $f(x)$ è una **funzione dispari . Anche** in questo caso basta studiare la funzione nell'intervallo $[0,+\infty[$ ed estendere per simmetria i risultati ottenuti al resto del dominio .

- La funzione univoca $f(x)$ non può mai essere simmetrica rispetto all'asse y in quanto la variabile y si presenta ad esponente 1 . Infatti una funzione è **simmetrica rispetto all'asse x** se la variabile x non muta quando cambiamo la y in -y , cioè se : $F(x,-y) = F(x,y)$. Si deve trattare , in ogni caso , di una funzione a più valori .

- $f(2a - x) = f(x) \Rightarrow G(f)$ **simmetrico rispetto alla retta** di equazione $x = a$

- La curva di equazione $y = f(x)$ è **simmetrica rispetto alla retta** $y = x$ quando , scambiando al secondo membro la x con la y ed al primo membro la y con la x, l'equazione $y = f(x)$ non muta.

L'iperbole equilatera $y = \dfrac{1}{x}$ è simmetrica rispetto alla retta $y = x$.

- La curva di equazione $y = f(x)$ è **simmetrica rispetto alla retta** $y = -x$ (cioè rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante) quando , mutando nel secondo membro dell'equazione $y = f(x)$ x in $-y$ e nel primo membro y in $-x$, l'equazione $y = f(x)$ rimane invariata .

L'iperbole equilatera $y = \dfrac{1}{x}$ è simmetrica rispetto alla retta $y = -x$.

- Il $G(f)$ è **simmetrico rispetto al punto** $P(\alpha,\beta)$, detto **centro di simmetria** , quando la traslazione $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ [*] genera una funzione $Y = Y(X)$ [$Y + \beta = f(X + \alpha)$, $Y = f(X + \alpha) - \beta$] il cui grafico è simmetrico rispetto alla nuova origine $P(\alpha,\beta)$.

Perché ciò si verifichi deve sussistere l'identità: $Y(-X) = -Y(X)$ cioè l'uguaglianza :

$$-\beta + f(-X + \alpha) = \beta - f(X + \alpha)$$

deve essere una **identità** .

Imponendo che la suddetta uguaglianza sia identicamente verificata ci ricaviamo (se esistono) i valori di α e β . Il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ è **simmetrico** rispetto al punto $P(2;3)$. Infatti la traslazione [*] trasforma la funzione assegnata nella funzione :

$$Y = (X + \alpha)^3 - 6(X + \alpha)^2 + 12(X + \alpha) - 5 - \beta$$

$$Y(-X) = -Y(X) \quad \Rightarrow \quad 3(2 - \alpha)X^2 - \alpha^3 + 6\alpha^2 - 12\alpha + \beta + 15 = 0$$

Tale uguaglianza è identicamente verificata quando : $\begin{cases} 2 - \alpha = 0 \\ -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 12\alpha + \beta + 15 = 0 \end{cases}$

cioè per: $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$

Codominio

Il codominio (o campo di variabilità) di una funzione $f(x)$ è l'insieme di tutti i valori reali e finiti assunti dalla funzione quando la variabile indipendente assume tutti i valori del dominio di $f(x)$. [(*)]

Il codominio di una funzione (codom f) f è sicuramente noto se conosciamo il suo grafico $G(f)$.

Per calcolare il codominio di una funzione bisogna conoscere quanto segue :

- gli **estremi superiore ed inferiore** , cioè: $\sup f$ e $\inf f$
- la **monotonia** di $f(x)$
- gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti di $f(x)$
- il comportamento della funzione agli estremi del dominio

Il codominio di una funzione può essere calcolato con procedimenti elementari se essa è il rapporto di due polinomi di secondo grado (o di uno di primo grado e l'altro di secondo grado) , cioè se la funzione è del tipo:

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$$

Riducendo a forma intera ed ordinando secondo le potenze decrescenti della x otteniamo:

$$A(y)\cdot x^2 + B(y)\cdot x + C(y) = 0$$

La x è reale se : $\Delta y = B^2 - 4AC = p\cdot y^2 + q\cdot y + r \geq 0$

Le soluzioni di questa inequazione di secondo grado in y ci forniscono il codomino (o campo di variabilità) della funzione $f(x)$.

ESEMPIO

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}} \quad ; \quad x^2 - (y + 5)x + 5y + 4 = 0 \quad [1]$$

$\Delta = y^2 - 10y + 9 \geq 0$ per $y \leq 1$, $y \geq 9$ codom $f =]-\infty,1] \cup [9,+\infty[$

In questo caso i valori << 9 >> e << 1 >> sono rispettivamente il **minimo** ed il **massimo** (relativi) della funzione . Questo procedimento ci consente di calcolare anche i **punti di massimo** e di **minimo** (relativi) della funzione . Basta sostituire nelle [1] i valori << 1 >> e << 9 >> .

$y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ **punto di massimo relativo**

(*) Il **codominio** di una funzione è l'insieme delle sue immagini . Se **A** è il dominio della funzione f allora il suo codominio può essere indicato col simbolo $f(A)$

$y = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} = \frac{14}{2} = 7$ **punto di minimo relativo**

Concludendo possiamo affermare che la conoscenza del codominio ci consente di individuare gli estremi (relativi ed assoluti) della funzione $f(x)$.

Calcolo di particolari valori di $f(x)$ e di $f'(x)$

Servono per rendere più agevole la costruzione del grafico della funzione $f(x)$. Trovata l'ascissa di un punto di massimo , di minimo , di flesso è opportuno calcolare la corrispondente ordinata . Per avere punti particolari del grafico di $f(x)$ si danno alla x valori particolari $x_1, x_2, x_3, \cdots$ e si calcolano $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots$. Conoscere il valore $f'(x_1)$ significa conoscere il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $P[x_1, f(x_1)]$.

Equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_1 :

$$y - f(x_1) = f'(x_1)\cdot(x - x_1)$$

Periodicità

La funzione $f(x)$ è **periodica** di periodo **T** quando risulta: $\boxed{f(x + kT) = f(x)}$ con $k \in Z$

Per calcolare **T** si procede come segue:

1) si impone che l'uguaglianza $\boxed{f(x + N) = f(x)}$ sia una **identità**

2) otteniamo una o più equazioni nell'incognita **N** . Queste equazioni , in generale , ammettono infinite soluzioni comuni la più piccola delle quali rappresenta il periodo **T** della funzione $f(x)$.

Calcolare il periodo della funzione $f(x) = sin\, x$

$$sin(x + N) = sin\, x \Rightarrow \boxed{(\cos N - 1)\cdot sin\, x + (sin\, N)\cdot \cos x = 0}$$

Questa uguaglianza è una identità se: $\begin{cases} \cos N = 1 \\ sin\, N = 0 \end{cases}$ Questo sistema di equazioni goniometriche ammette come soluzioni : $\boxed{N = k\cdot 2\pi}$ La più piccola di queste soluzioni si ottiene per $k = 1$, per cui possiamo affermare che il **periodo** della funzione è $\boxed{T = 2\pi}$

Se una funzione $f(x)$ ha periodo **T** allora basta studiarla in un intervallo di ampiezza **T** .

- $f(x)$ funzione periodica di periodo **T** $\Rightarrow$ $f(nx)$ funzione periodica di periodo $\frac{T}{n}$

La funzione $f(x) = sin 2x$ è una funzione periodica avente come periodo $T = \pi$

- $f(x)$ funzione periodica di periodo **T** $\Rightarrow$ $f\left(\frac{x}{n}\right)$ funzione periodica di periodo nT

La funzione $f(x) = sin\frac{x}{2}$ è una funzione periodica avente come periodo $T = 4\pi$

- il quoziente , il prodotto o la somma algebrica di funzioni periodiche è ancora una funzione periodica avente come periodo il *m.c.m.* dei periodi delle funzioni componenti o un suo sottomultiplo .
- la funzione periodica $f(x)$ **non può avere asintoto obliquo** in quanto non esiste finito nessuno

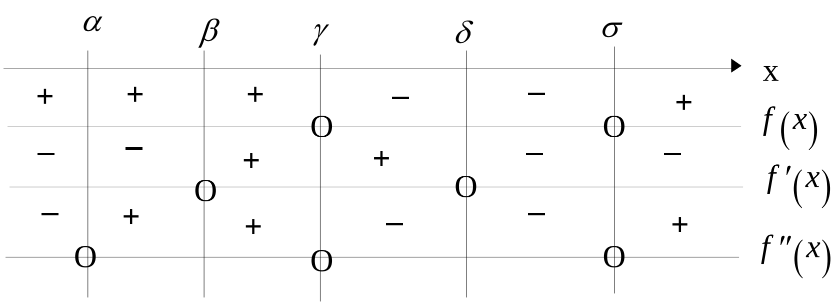
dei due seguenti limiti : $\underset{x\to\infty}{Lim} f(x)$, $\underset{x\to\infty}{Lim} \frac{f(x)}{x}$

ed anche perché , essendo f periodica , dovrebbe avere infiniti asintoti obliqui e ciò è in contraddizione col fatto che le funzioni univoche $f(x)$ possono al massimo avere un solo asintoto obliquo .

Tabella riepilogativa dei risultati

Consiste nella compilazione di una tabella dalla quale risulti con chiarezza ma sinteticamente il segno di $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, gli zeri di $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, i punti in cui $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ risultano divergenti o indeterminate .

Quanto segue può essere la **tabella riepilogativa** di una data funzione .



Costruzione del grafico

Si tratta di visualizzare mediante un disegno le proprietà della funzione messe in evidenza dall'analisi precedentemente effettuata.

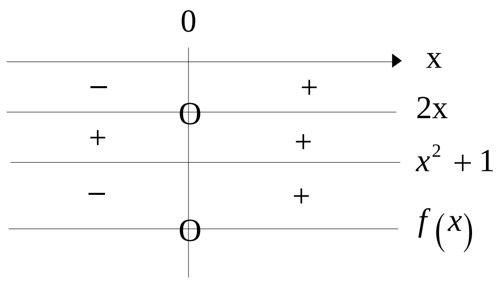
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x^2+1}}$$

Dominio della funzione $\qquad \mathrm{dom}\, f = R$

Intersezioni con gli assi cartesiani

$x = 0 \iff y = 0$ Il grafico della funzione incontra gli assi cartesiani nell'origine

Segno della funzione



Condizioni agli estremi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$ Asintoto orizzontale completo (In questo caso non è necessaria la ricerca dell'asintoto obliquo)

Continuità e discontinuità della funzione

La funzione proposta è continua in tutto il suo dominio

Simmetrie evidenti

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x)$$

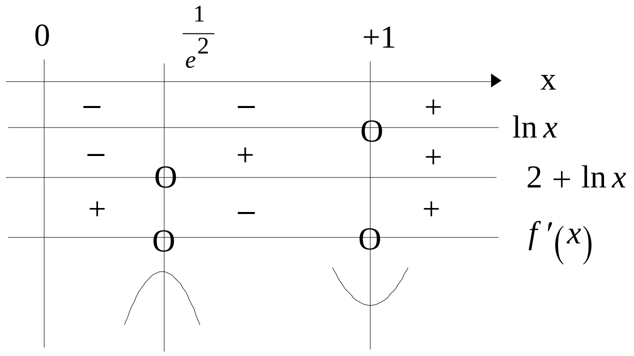
La funzione è dispari e, quindi, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani

Intervalli di monotonia

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$



$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x = -1$ **punto di minimo assoluto** $f(-1) = -1$ **minimo assoluto**

$N(-1,-1)$ **immagine geometrica del minimo assoluto**

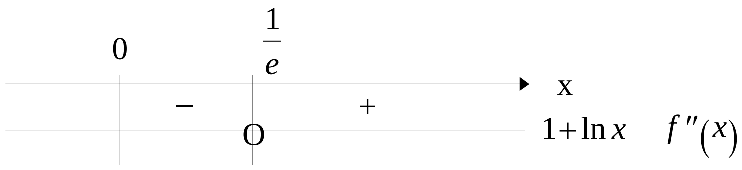
$x = 1$ **punto di massimo assoluto** $f(1) = 1$ **massimo assoluto**

$M(1,1)$ **immagine geometrica del massimo assoluto**

Intervalli di convessità

$$f''(x) = \frac{-4x\left(x^2 + 1\right)^2 - 2\left(x^2 + 1\right)\cdot 2x\cdot\left(-2x^2 + 2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^4} = \frac{-4x\left(x^2 + 1\right) - 4x\cdot\left(-2x^2 + 2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^3} =$$

$$= \frac{-4x\left(x^2 + 1 - 2x^2 + 2\right)}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \frac{4x\left(x^2 - 3\right)}{\left(x^2 + 1\right)^3} \qquad f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;,\; x = \pm\sqrt{3}$$



$x = -\sqrt{3}$ punto di flesso ascendente $\quad x = \sqrt{3}$ punto di flesso ascendente

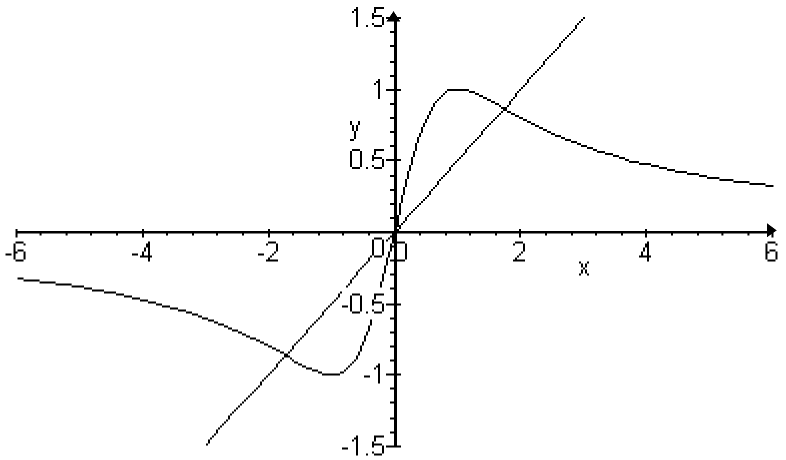
$x = 0$ punto di flesso discendente

Le ordinate dei punti di flesso sono: $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3+1} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$f(0) = 0$ Le immagini geometriche dei tre flessi sono:

$$F_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;,\; O(0,0) \;,\; F_2\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Si può dimostrare che i tre flessi sono allineati e si trovano sulla retta di equazione $y = \dfrac{1}{2}x$



$$\mathbf{y = f(x) = x \cdot \ln^2 x}$$

Dominio della funzione $\quad \text{dom } f = R^+ =]0,+\infty[$

Intersezioni con gli assi cartesiani

$y = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ Il grafico della funzione incontra l'asse delle ascisse nel punto $N(1,0)$

Segno della funzione $\quad f(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in \text{dom } f$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x\ln^2 x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}\cdot 2\ln x}{-\frac{1}{x^2}} = -2\cdot \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= -2\cdot \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\cdot \lim_{x\to 0+} x = 0+$$

La funzione presenta nel punto di ascissa $x = 0$ una discontinuità di seconda specie in quanto non esiste il limite sinistro . Se poniamo $f(0+) = \lim_{x\to 0+} x\ln^2 x = 0+$ allora prolunghiamo per continuità dalla destra la funzione proposta nel punto di ascissa $x = 0$.

Quindi la funzione data è continua in tutto l'intervallo $[0,+\infty[$

Eventuale asintoto obliquo

$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \ln^2 x = +\infty$ Il grafico della funzione non presenta asintoto obliquo .

Intervalli di monotonia

$\boxed{f'(x) = \ln x \cdot (2 + \ln x)}$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x \cdot (2 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0$ cioè $x = 1$ e

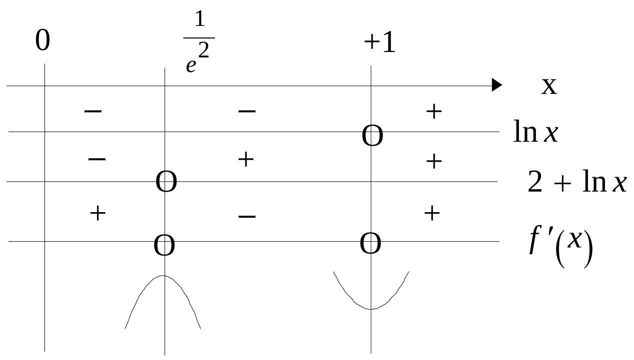
$2 + \ln x = 0$ cioè $x = \dfrac{1}{e^2}$

$x = 1$ punto di minimo assoluto $\qquad f(1) = 0$ minimo assoluto

$\boxed{N(1,0)}$ immagine geometrica del minimo assoluto

$x = \dfrac{1}{e^2}$ punto di massimo relativo $\qquad f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$ massimo relativo

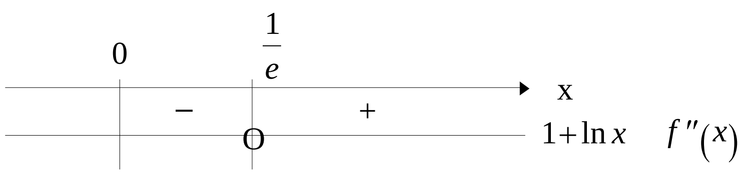
$M\left(\dfrac{1}{e^2}, \dfrac{4}{e^2}\right)$ immagine geometrica del massimo relativo



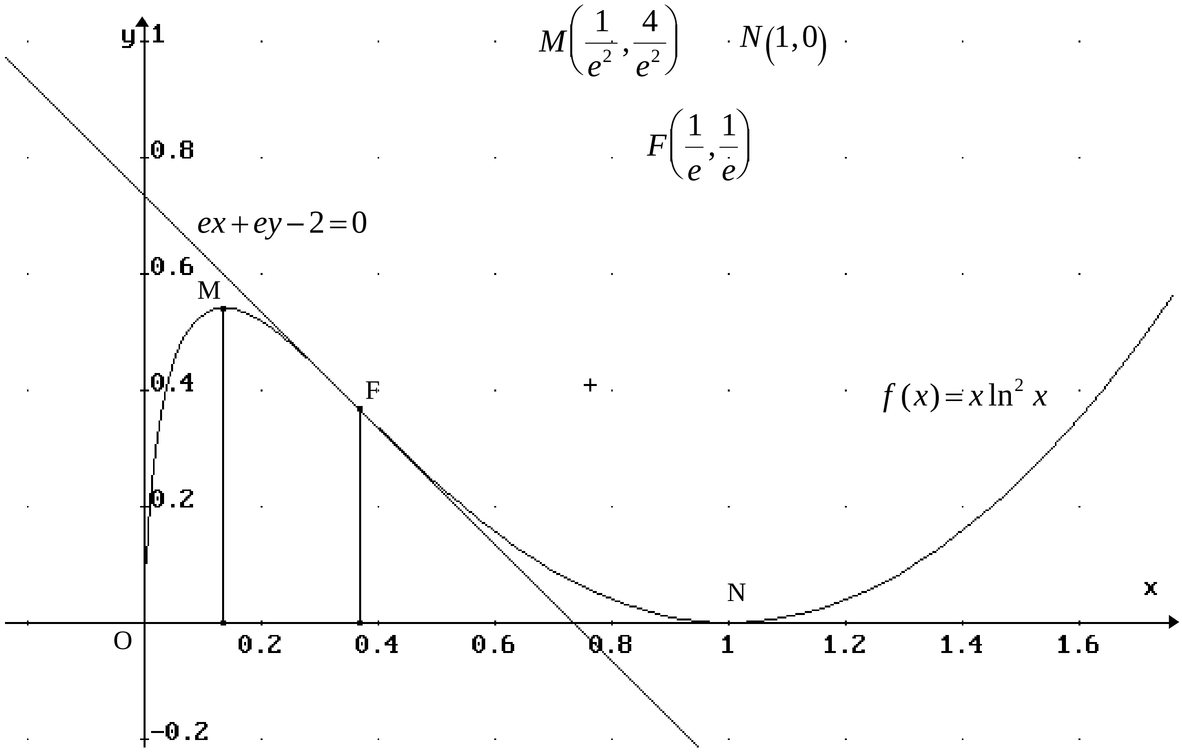
$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ La tangente destra al grafico della funzione è verticale e coincide con l'asse delle y .

Intervalli di convessità

$f''(x) = \dfrac{2(1 + \ln x)}{x}$ $\qquad f''(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$



$x = \dfrac{1}{e}$ punto di flesso ascendente $\quad f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}$ $\qquad \boxed{F\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)}$ immagine geometrica del flesso ascendente $\qquad \boxed{ex + ey - 2 = 0}$ equazione della tangente inflessionale



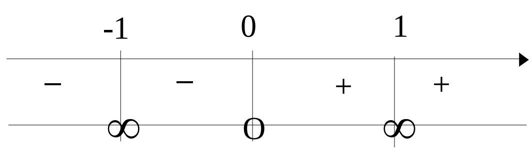
$$f(x) = \frac{x^3}{|x^2 - 1|} = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} & \text{se} \quad x < -1 \ , \ x > 1 \\[2ex] \dfrac{x^3}{1 - x^2} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

Dominio della funzione $\qquad \text{dom} f = R - \{\pm 1\}$

Intersezioni con gli assi cartesiani

$x = 0 \iff y = 0$ Il grafico della funzione passa per l'origine degli assi cartesiani

Segno della funzione



$$f(x) = \frac{x^3}{|x^2 - 1|}$$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{|x^2 - 1|} = \pm\infty \qquad \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^3}{|x^2 - 1|} = -\infty \Rightarrow x = -1$$ **asintoto verticale completo in basso**

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3}{\left|x^2 - 1\right|} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = 1$$ **asintoto verticale completo in alto**

Eventuale asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

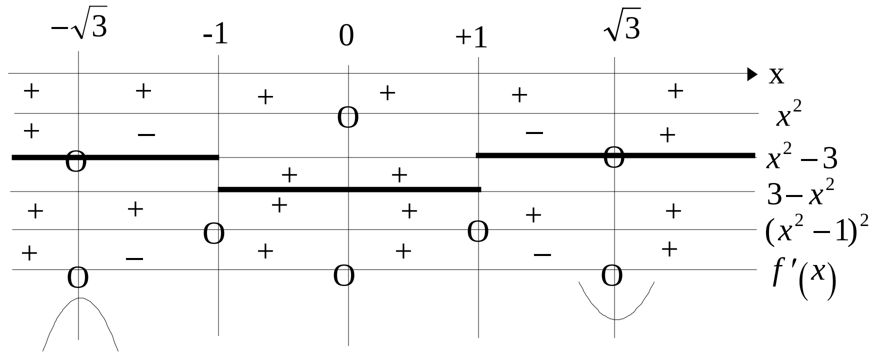
$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2 - 1} \right] = 0$$

$y = x$ **asintoto obliquo completo**

Intervalli di monotonia

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{\left(x^2 - 1\right)^2} & se \quad x < -1 \ , \ x > 1 \\[2ex] \dfrac{x^2(3 - x^2)}{\left(x^2 - 1\right)^2} & se \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \qquad x = \pm\sqrt{3}$$



$x = -\sqrt{3}$ **punto di massimo relativo** $\quad f\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **massimo relativo**

$M\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ **immagine geometrica del massimo relativo**

$x = \sqrt{3}$ **punto di minimo relativo** $\quad f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **minimo relativo**

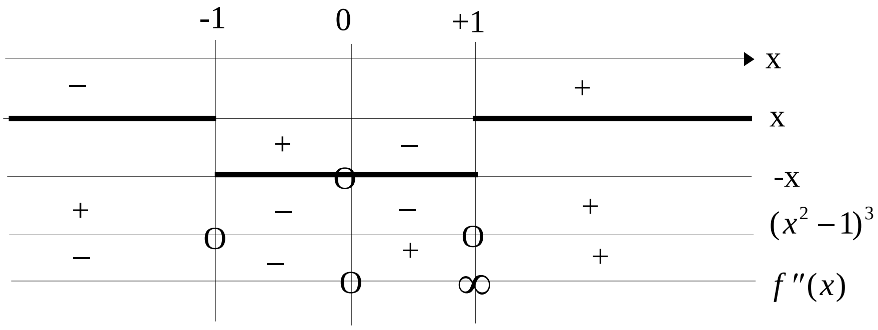
$N\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ **immagine geometrica del minimo relativo**

Simmetrie evidenti

$f(-x) = -\dfrac{x^3}{\left|x^2 - 1\right|} = -f(x)$ La funzione proposta è **dispari** ed il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani.

Intervalli di convessità

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(x^2 + 3)}{\left(x^2 - 1\right)^3} & se \quad x < -1 \ , \ x > 1 \\ \dfrac{-2x(x^2 + 3)}{\left(x^2 - 1\right)^3} & se \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

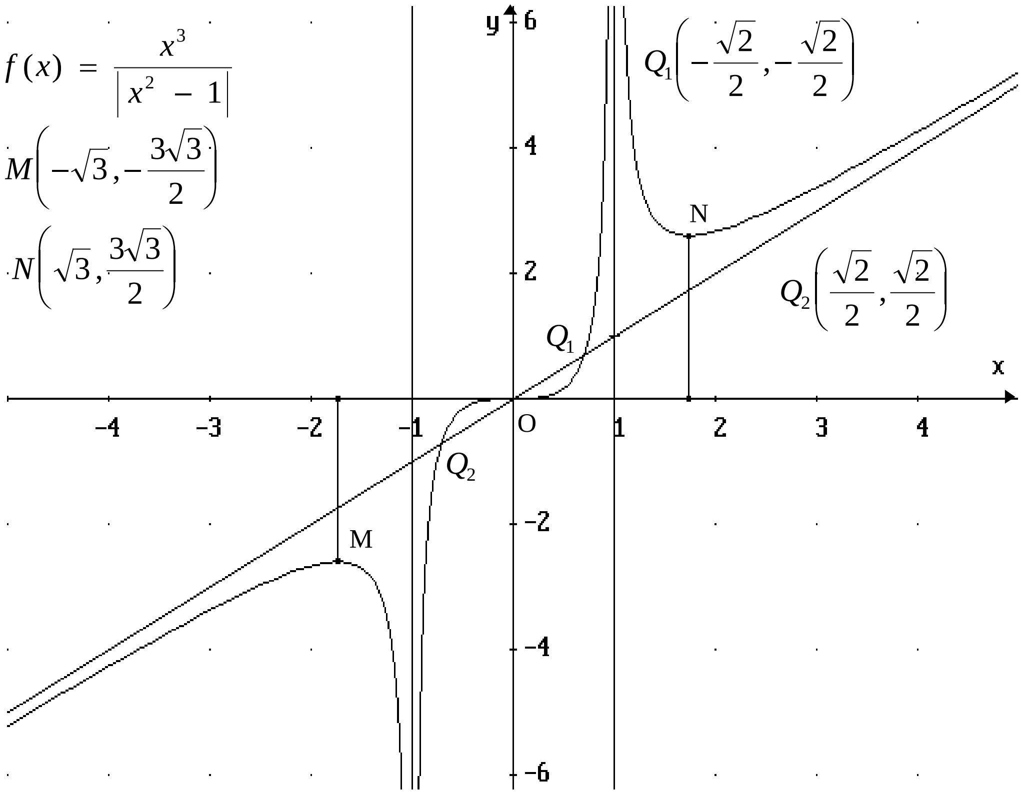


$x = 0$ punto di flesso ascendente

Eventuali intersezioni dell'asintoto obliquo col grafico della funzione

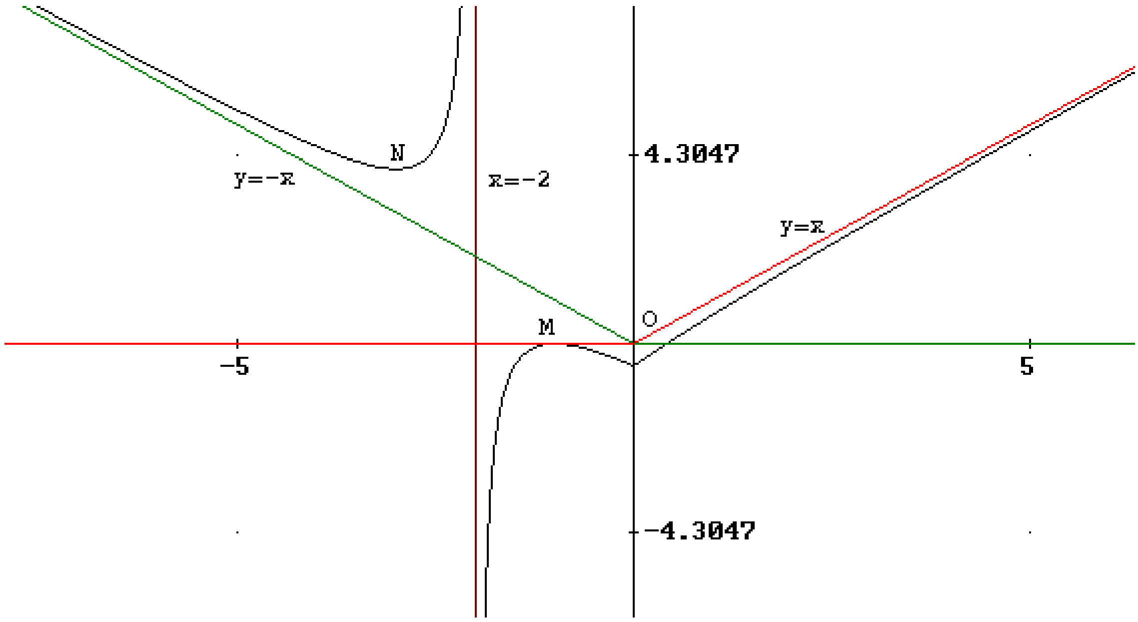
$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} \end{cases} \qquad \frac{x^3}{1 - x^2} = x \qquad x^3 = x - x^3 \qquad 2x^3 - x = 0 \qquad x(2x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad O(0,0) \qquad Q_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad Q_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



(*)

Studiare e disegnare il grafico della seguente funzione: $f(x) = |x| - \frac{1}{x + 2}$



$f''(x) = -\frac{2}{(x + 2)^3}$ **Il grafico della funzione non presenta punti di flesso**

(*) Dodero Baroncini Toscano

$$f(x) = |x| - \frac{1}{x+2} = \begin{cases} -x - \frac{1}{x+2} = -\frac{x^2+2x+1}{x+2} = \frac{-(x+1)^2}{x+2} & \text{se } x < 0 \\ x - \frac{1}{x+2} = \frac{x^2+2x-1}{x+2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ $\quad A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$y = 0 \Rightarrow$ $\quad x+1 = 0$ $\quad x = -1$ $\quad B(-1, 0)$ $\quad x^2+2x-1 = 0$ $\quad x_1 = -1-\sqrt{2}$ (NA) $\quad x_2 = -1+\sqrt{2}$ (A)

$C(-1+\sqrt{2}; 0)$

x		$-1-\sqrt{2}$		-2		-1		0		$-1+\sqrt{2}$	
$-(x+1)^2$	$-$		$-$		$-$	0	$-$				
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2+2x-1									$-$	0	$+$
$y(x)$	$+$		$+$	∞	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$

$\lim_{x \to \infty} \left(|x| - \frac{1}{x+2}\right) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = -2$ As. ve. completo

$$m_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2-2x-1}{x^2+2x} = -1$$

$$n_1 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \to -\infty} \left(\cancel{-x} - \frac{1}{x+2} \cancel{+x}\right) = 0$$

$y = -x$ As. Ob. sinistro

$$m_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-1}{x^2+2x} = 1$$

$$n_2 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - m_2 x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\cancel{x} - \frac{1}{x+2} \cancel{-x}\right) = 0$$

$y = x$ As. Ob. destro

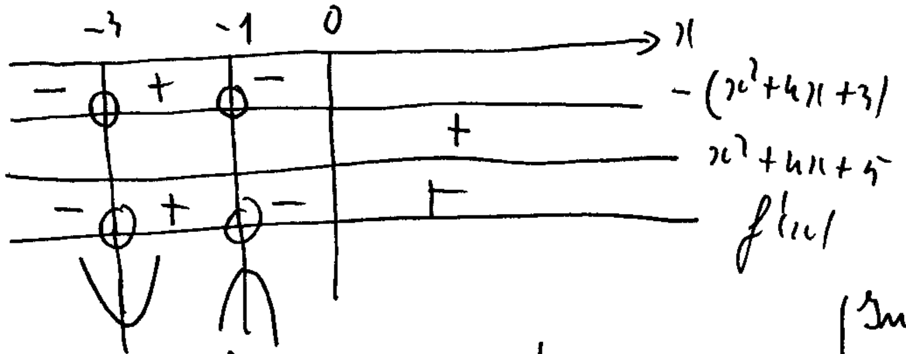
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} & \text{se } x<0 \\[2mm] \dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$\boxed{x<0}$ $$f'(x) = -\frac{(2x+2)(x+2)-(x^2+2x+1)}{(x+2)^2} = -\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$\boxed{x>0}$ $$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+2)-(x^2+2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=0 \Longrightarrow x^2+4x+3=0 \qquad x_1=-3 \qquad x_2=-1$

$x^2+4x+5=0 \qquad \Delta<0$



$x=-3$ punto di minimo relativo $\quad N\left(-3, \frac{4}{5}\right)$ Immagine geometrica del minimo relativo

$f(-3)=\frac{4}{5}$ minimo relativo

$x=-1$ punto di massimo relativo $\quad M(-1,0)$ max relativo

$f(-1)=0$ massimo relativo

$$f'(0-)=\lim_{x\to 0-} -\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = -\frac{3}{4}\;; \quad f'(0+)=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}=\frac{5}{4}$$

La funzione, nel punto $x=0$, è continua ma non derivabile.

$\text{dom } f' = \mathbb{R}-\{-2, 0\}$

$x=0$ punto angoloso