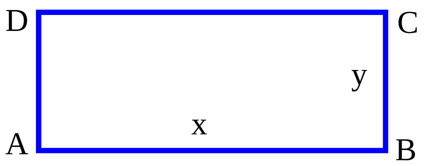
Problemi da massimo e di minimo: il metodo elementare delle proprietà note

Sono metodi che ci consentono di calcolare gli estremi assoluti di una funzione senza l'uso delle derivate.

01) **Il prodotto di due variabili numeriche positive x ed y, avente somma s costante, è massimo quando le variabili sono uguali tra loro**, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=s=\text{costante} \\ x,y,s\in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad p = xy \text{ è massimo quando risulta } \boxed{x=y}$$

Tra tutti i rettangoli di dato perimetro $2p$**, determinare quello avente area massima**.



$Hp\ \{p(ABCD) = 2p$ Pongo: $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$

$p(ABCD) = 2p \Rightarrow 2x + 2y = 2p \Rightarrow x + y = p \Rightarrow$

$y = p - x$

$S(ABCD) = \overline{AB}\cdot\overline{BC} = x(p - x)$, $(x) + (p - x) = p = \text{costante} \Rightarrow S_{\max}$ per $x = p - x$

cioè per: $x = \dfrac{1}{2}p = y$ Si tratta del quadrato di lato $\ell = \dfrac{p}{2}$

$\boxed{S(x) = -x^2 + px}$ Si tratta di una parabola avente la concavità rivolta verso il basso . Il **massimo** di S coincide con l'ordinata del vertice di tale parabola . $V\left(\dfrac{p}{2},\dfrac{p^2}{4}\right)$, $S_{\max} = \dfrac{p^2}{4}$ e si ottiene per $x = \dfrac{p}{2}$.

02) **Il prodotto di tre variabili numeriche positive x ed y, z, avente somma s costante, è massimo quando le variabili sono uguali tra loro**, cioè:

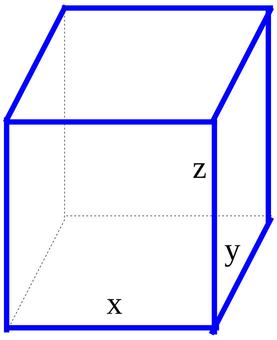
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=s=\text{costante} \\ x , y , z , s \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad p = xyz \text{ è massimo quando risulta } x = y = z$$

Fra tutti i parallelepipedi rettangoli aventi la stessa superficie totale a^2**, qual è quello di volume massimo?**

$$Hp = \{S_t = a^2 \Rightarrow S_t = 2xy + 2xz + 2yz = 2(xy + xz + yz) = a^2 \ , \ (xy + xz + yz) = \frac{1}{2}a^2$$

Il massimo del volume $V = xyz$ coincide col massimo di: $V^2 = x^2y^2z^2 = (xy)\cdot(xz)\cdot(yz)$

Tale massimo si ottiene quando: $xy = xz = yz$ cioè quando: $x = y = z$



$$3x^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad , \; x^2 = \frac{a^2}{6} \quad , \; x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Il parallelepipedo richiesto è il **cubo** di volume:

$$V = x^3 = \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{x^2}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$$

02A) Metodo delle costanti indeterminate

Se la somma di quattro addendi positivi è costante allora il loro prodotto è massimo quando i quattro numeri sono uguali.

$$\begin{cases} x+y+z+t = \text{costante} \\ \text{x,y,z,t} \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \cdot y \cdot z \cdot t \text{ è massimo quando risulta } x = y = z = t$$

Tra i coni circolari inscritti in una sfera di raggio r, determinare quello per il quale è massina l'area della superficie totale, dopo averne trovata l'espressione in funzione della semiapertura x di un generico cono.

$C\hat{A}H = x$ = semiapertura del cono+

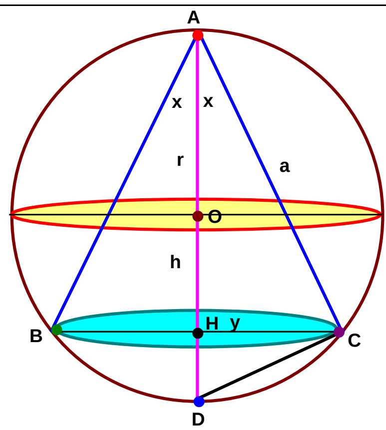
$AH = h$ altezza del cono

$AC = a$ = apotema del cono

$AO = OD = r$ = raggio della sfera

$HC = HB = y$ = raggio della base del cono

$$S_t = \pi CH^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi CH \cdot AC = \pi CH\left(CH + AC\right)$$



$$AC = AD \cdot \cos x = 2r\cos x \qquad HC = AC \cdot \sin x = 2r\sin x \cdot \cos x = r \cdot \sin 2x$$

$$S_t = \pi \cdot 2r\sin x \cdot \cos x\left(2r\sin x \cdot \cos x + 2r\cos x\right) = 4\pi r^2 \sin x \cdot \cos^2 x\left(1+\sin x\right)$$

$$\mathbf{S_t = 4\pi r^2 \cdot \sin x \cdot (1 - \sin x)(1+\sin x)(1+\sin x)}$$

Il massimo di S_t coincide col massimo della funzione

$$\mathbf{f(x) = \frac{S_t}{4\pi r^2} = \sin x \cdot (1 - \sin x)(1+\sin x)(1+\sin x)}$$

Ad un primo esame superficiale sembra che la somma della funzione $f(x)$ non sia costante. Allora cerco due costanti α,β in modo che tale somma sia costante. Moltiplico il primo fattore della funzione $f(x)$ per α ed il secondo fattore per β; ottengo:

$$\alpha\beta f(x)=\alpha\sin x\cdot(\beta-\beta\sin x)(1+\sin x)(1+\sin x)$$

Il massimo della funzione $f(x)$ coincide col massimo della funzione $\alpha\beta f(x)$ in quanto α,β sono delle costanti positive.

Impongo che la somma dei 4 fattori sia costante, cioè non dipenda da $\sin x$.

$$\alpha\sin x+\beta-\beta\sin x+1+\sin x+1+\sin x=(\alpha-\beta+2)\sin x+\beta+2$$

Tale somma è costante se: $\alpha-\beta+2=0$ $[A]$ sotto questa ipotesi $\alpha\beta f(x)$ e quindi $f(x)$ è massima quando i 4 fattori sono uguali: $\alpha\sin x=\beta-\beta\sin x=1+\sin x=1+\sin x$

$$\alpha\sin x=1+\sin x \Rightarrow \alpha=\frac{1+\sin x}{\sin x} \qquad \beta-\beta\sin x=1+\sin x \Rightarrow \beta=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

Sostituendo nella $[A]$ otteniamo: $\dfrac{1+\sin x}{\sin x}-\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}+2=0$

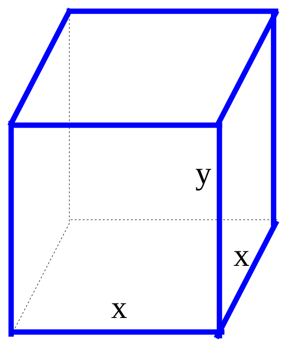
$$1-\sin^2 x-\sin x-\sin^2 x+2\sin x-2\sin^2 x=0 \qquad 4\sin^2 x-\sin x-1=0 \qquad \sin x=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

$$\mathbf{S_t\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)=\frac{\pi r^2}{128}\left(107+52\sqrt{17}\right)}$$

03) Se la somma s di due variabili numeriche positive x, y è costante, il prodotto di loro opportune potenze $p=x^n y^q$ (con $n,q,\in R$) è massimo quando le variabili x ed y sono proporzionali ai rispettivi esponenti n e q, cioè:

$$\left.\begin{matrix} x+y=s=\text{costante} \\ x,y,s,n,q\in R^+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow p=x^n y^q \text{ è massimo quando risulta } \frac{n}{x}=\frac{y}{q}$$

Fra tutti i parallelepipedi retti a base quadrata e superficie totale a^2, qual è quello di volume massimo?



$$S_t=2x^2+4xy=a^2 \quad , \quad y=\frac{a^2-2x^2}{4x}$$

$$V=yx^2=x^2\cdot\frac{a^2-2x^2}{4x}=\frac{x\left(a^2-2x^2\right)}{4} \qquad V=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{a^2}{2}-x^2\right)$$

$$\left(x^2\right)+\left(\frac{a^2}{2}-x^2\right)=\frac{a^2}{2}=\text{costante} \Rightarrow V_{\max} \text{ per } \left(x^2\right)=\left(\frac{a^2}{2}-x^2\right)$$

cioè per: $2x^2 + x^3 = \frac{a^2}{2}$ cioè per: $x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $y = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $V_{max} = x^3 = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$

Il parallelepipedo a base quadrata di volume massimo è il cubo.

$$V(x) = \frac{1}{4}\left(-2x^3 + a^2x\right) \ , V'(x) = \frac{1}{4}\left(-6x^2 + a^2\right) \ , V'(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$V''(x) = -3x$, $V''\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) < 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ **punto di massimo assoluto** per la funzione $V(x)$

$$y = \frac{a^2 - \frac{a^2}{3}}{\frac{4a}{\sqrt{6}}} = \frac{2\sqrt{6}}{12}a = \frac{a\sqrt{6}}{6} = x \ , V_{max} = \frac{a\sqrt{6}}{24}\left(a^2 - 2\frac{a^2}{6}\right) = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{36}a^3$$

04) **Se la somma s di tre variabili numeriche positive x, y, z è costante, il PRODOTTO di loro potenze ad esponenti reali e positivi $p = x^n y^q z^r$ è massimo quando le variabili sono proporzionali ai rispettivi esponenti**, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = s = \text{costante} \\ x, y, z, s, n, q, r \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \ p = x^n y^q z^r \ \text{è } \textbf{massimo} \text{ quando risulta } \ \frac{x}{n} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

05) **La somma s di due variabili numeriche positive x ed y, avente prodotto $p = a^2$ costante, è minima quando esse assumono valori uguali**, cioè:

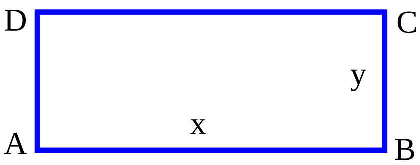
$$\left.\begin{array}{l} xy = p = \text{costante} \\ x, y, p \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \ s = x + y \ \text{ è minima per } \ \boxed{x = y}$$

Dimostrazione elementare

Consideriamo la seguente identità: $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy \quad (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4p$

Poiché la quantità $4p$ è costante la variabile $(x + y)^2$ è minima quando è minima la quantità $(x - y)^2$ e questo si verifica quando $x = y$, come volevasi dimostrare.

Fra tutti i rettangoli di area data a^2, trovare quello di perimetro p minimo.



$$Hp \left\{ S(ABCD) = a^2 \right. \ , S = xy = a^2 \ \Rightarrow \ y = \frac{a^2}{x}$$

$$p = x + y = x + \frac{a^2}{x} \quad , (x)\cdot\left(\frac{a^2}{x}\right) = a^2 = \text{costante} \quad \Rightarrow$$

$x + \dfrac{a^2}{x}$ minimo quando $x = \dfrac{a^2}{x}$ cioè quando: $x = a \quad , \quad y = a$

Si tratta del **quadrato** di lato **a** .

- $p(x) = x + \dfrac{a^2}{x} \quad , \quad p'(x) = 1 - \dfrac{a^2}{x^2} \quad , \quad p'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = a \; , \; p''(x) = \dfrac{4a^2}{x^3} \quad p''(a) = \dfrac{4}{a} > 0$

$x = a$ **punto di** minimo **assoluto** per la funzione p(x)

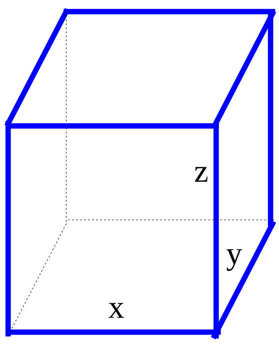
- $x^2 - px + a^2 = 0 \quad , \quad \Delta = p^2 - 4a^2 = (p + 2a)(p - 2a) \geq 0$ se $x \geq 2a$

$p_{\min} = 2a$ e si ottiene per $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{p}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

06) Se il prodotto p di tre variabili numeriche positive x, y, z è costante, la somma di tali variabili è minima quando esse assumono valori uguali, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} xyz = p = \text{costante} \\ x , y , p , z \in R^+ \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad s = x + y + z \quad \text{è minima per} \quad x = y = z$$

Di tutti i parallelepipedi rettangoli aventi lo stesso volume $V = a^3$ **qual è quello di superficie totale minima?**



$$Hp \; \{V = xyz = a^3 = \text{costante} \quad , \quad S_t = 2(xy + xz + yz) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{S_t}{2} = xy + xz + yz \quad , \quad (xy)\cdot(xz)\cdot(yz) = (xyz)^2 = a^2 = \text{costante}$$

Allora S_t è minima se: $xy = xz = yz$ cioè se: $x = y = z$

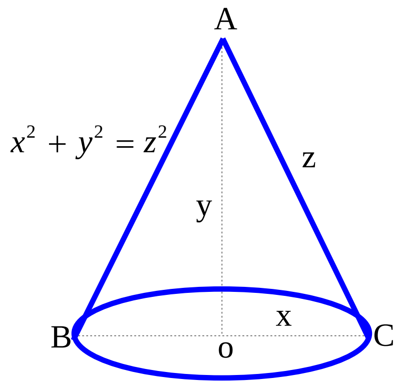
Il parallelepipedo (di dato volume) di **superficie totale** minima è il cubo

$$S_t = 6x^2 = 6a^2 \quad , \quad x = y = z = a$$

07) Se il prodotto p di opportune potenze di due variabili numeriche positive x ed y è costante, allora la somma s delle due variabili è minima quando le variabili sono proporzionali ai rispettivi esponenti, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} p = x^n y^q = \text{costante} \\ x , y , p , q , n , \in R^+ \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad s = x + y \quad \text{è minima quando} \quad \frac{x}{n} = \frac{y}{q}$$

Fra tutti i coni aventi lo stesso volume $V = \frac{\pi}{3} a^2$ **determinare quello avente superficie laterale S** minima



Siano x, y, z rispettivamente il raggio , l'altezza e l'ipotenusa del cono.

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 y = \frac{\pi}{3} a^3 \Rightarrow x^2 y = a^3 = \text{costante} \quad , \; S = \pi x y$$

Il minimo di S coincide col minimo di:

$$f(x,y) = \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = x^2 y^2 = x^2\left(x^2 + y^2\right) = x^4 + x^2 y^2$$

Tale funzione è la somma di due termini $\left(x^4\right)$ e $\left(x^2 y^2\right)$ il cui prodotto di opportune potenze è costante . Infatti :

$\left(x^4\right)^1 \cdot \left(x^2 y^2\right)^2 = \left(x^2 y\right)^4 = a^{12} = \text{costante}$ Quindi $f(x,y)$ è minima quando risulta:

$$x^4 = \frac{x^2 y^2}{2} \quad , \; y^2 = 2x^2 \quad , \; y = x\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} y = x\sqrt{2} \\ x^2 y = a^3 \end{cases} \qquad x^3\sqrt{2} = a^3 \quad , \quad x = \frac{a}{\sqrt[6]{2}} \quad , \quad y = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = a \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$S_{\max} = \frac{\pi a^2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\pi a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2} = \pi a^2 \cdot \sqrt[6]{2}$$

ALTRA RISOLUZIONE

Ricordando che $y = \frac{a^3}{x^2}$ possiamo scrivere:

$$S = \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi x \sqrt{x^2 + \frac{a^6}{x^4}} = \pi \sqrt{x^4 + \frac{a^6}{x^2}}$$

Il **minimo** di S coincide col minimo di: $g(x) = \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = x^4 + \frac{a^6}{x^2}$

Osservando che : $\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{a^6}{x^2}\right) = a^6 = \text{costante}$ possiamo dire che la somma $x^4 + \frac{a^6}{x^2}$ è minima quando risulta : $\frac{x^4}{\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{x^2} \quad , \quad 2x^6 = a^6 \quad , \quad x = \frac{a}{\sqrt[6]{2}}$

08) **Se il prodotto p di opportune potenze di tre variabili numeriche positive x, y, z è costante, allora la somma s delle tre variabili è minima quando le variabili sono proporzionali ai rispettivi esponenti**, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} p = x^n y^q z^r = \text{costante} \\ x, y, z, p, q, r, n, \in R^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad s = x + y + z \quad \text{è minima quando} \quad \frac{x}{n} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

09) **Se il prodotto (la somma) di due variabili numeriche positive x ed y è costante, la somma dei loro quadrati è minima quando esse sono uguali fra loro**, cioè:

$$\begin{cases} xy = \text{costante}\,(x + y = \text{costante}) \\ x, y \in R^+ \end{cases} \Rightarrow \quad s = x^2 + y^2 \quad \text{è minima per} \quad x = y$$

10) **Se è costante la somma dei quadrati di due variabili numeriche positive x ed y , allora il loro prodotto (o la loro somma) è MASSIMO quando esse risultano uguali fra loro**, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \text{costante} \\ x, y \in R^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p = xy \text{ è } \textbf{massimo per } x = y \text{ , } s = x + y \text{ è massima per } x = y$$