Unità Didattica N° 29

L'integrale indefinito

1) La definizione di integrale indefinito

2) Proprietà dell'integrale indefinito

3) Integrali indefiniti immediati

4) Integrazione per decomposizione

5) Integrazione per parti

6) Integrazione per sostituzione

7) Integrazione delle funzioni razionali fratte:

a) Metodo di Heaviside

b) Metodo di Hermite-Levi

8) Integrazione di alcune funzioni irrazionali

9) Integrazione di alcune funzioni trascendenti

Definizione di differenziale di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in ogni punto del suo dominio $[a,b]$. Definiamo differenziale della funzione $f(x)$ relativo al punto **x** ed all'incremento $\Delta x = h$ il prodotto:

$$f'(x)\cdot\Delta x = f'(x)\cdot h$$

In simboli abbiamo: $$d\,f(x) = d\,y = f'(x)\cdot\Delta x = f'(x)\cdot h \qquad \textbf{[A]}$$

Calcoliamo il differenziale della funzione : $f(x) = x$. Sapendo che $Dx = 1$, possiamo scrivere:

$$d\,f(x) = d\,x = f'(x)\cdot\Delta x = 1\cdot\Delta x = \Delta x \quad , \qquad d\,x = \Delta x$$

cioè <<il differenziale della variabile indipendente coincide col suo incremento $\Delta x = h$>>.

Questo ci consente di scrivere la formula [A] nella seguente maniera:

$$d\,y = d\,f(x) = f'(x)\cdot d\,x$$

cioè << **il differenziale di una funzione è uguale alla sua derivata prima per il differenziale della sua variabile indipendente** >>

Risulta giustificata la seguente scrittura: $$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,x}$$

Definizione di integrale indefinito

Siano $f(x)$ e $F(x)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. Se risulta: [1] $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ oppure $d\,F(x) = f(x)dx \quad \forall x \in [a,b]$ [2]

diciamo che la funzione $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$.

Definizione: Una primitiva di una data funzione $f(x)$ in un dato intervallo $[a,b]$ è una qualsiasi funzione $F(x)$ la cui derivata è uguale alla funzione data.

$$D\sin x = \cos x \;\Rightarrow\; \sin x \text{ è una primitiva di } \cos x$$

$$D\,tg\,x = 1 + tg^2 x \;\Rightarrow\; tg\,x \text{ è una primitiva di } 1 + tg^2 x$$

Teorema: **Ogni funzione continua ammette infinite primitive e due di esse differiscono fra loro per una costante additiva**.

Definizione: Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. L'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ in $[a,b]$ prende il nome di **integrale indefinito** di $f(x)$ e viene indicato col simbolo $\int f(x)dx$. Se $F(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$ e **C** è una costante qualsiasi, possiamo scrivere:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad [3]$$

$f(x)$ è detta funzione integranda, x variabile di integrazione, $\int$ è il simbolo di integrazione, $f(x)dx$ è l'elemento di integrazione.

L'operazione di integrazione indefinita consiste nel calcolo di tutte le primitive di una data funzione. L'integrazione indefinita è l'operazione inversa della derivazione. Il grafico di una primitiva della funzione $f(x)$ viene detto curva integrale della funzione $f(x)$.[1]

Teorema: **La derivata dell'integrale indefinito di una funzione è uguale alla funzione integranda** $f(x)$.

Infatti:

$$D\int f(x)dx = D[F(x) + C] = DF(x) + DC = f(x) \qquad [4]$$

In forma equivalente possiamo dire che << **il differenziale di un integrale indefinito è uguale all'elemento di integrazione**>> , cioè:

$$d\int f(x)dx = d[F(x) + C] = F'(x)dx = f(x)dx \qquad [5]$$

Teorema: L'**integrale del differenziale di una funzione** $f(x)$ **coincide , a meno di una costante additiva , con la funzione** $f(x)$. Infatti:

$$\int d\,f(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C \qquad [6]$$

Dalle formule [5] e [6] deduciamo che (a meno di una costante additiva), se scritti consecutivamente, i simboli di differenziale e di integrale indefinito si cancellano reciprocamente . Concludiamo affermando che le operazioni di integrazione e di differenziazione si annullano reciprocamente in quanto l'integrazione è l'operazione inversa della differenziazione.

Osservazione N°1: Una funzione continua non è sempre derivabile, ma è sempre integrabile. Questo significa che esistono funzioni continue integrabili ma non derivabili .

---

[1] Vedremo in seguito che l'integrale definito rappresenta un numero reale mentre l'integrale indefinito rappresenta una famiglia di funzioni

Osservazione N°2 Sono sicuramente integrabili: 1) tutte le funzioni continue 2) tutte le funzioni aventi un numero finito di discontinuità di prima specie **e di** terza specie**.**

A determinate condizioni, una funzione con qualche **discontinuità di seconda specie** può essere integrabile (in senso generalizzato) .

Quindi una funzione con un discontinuità di seconda specie , in generale , non è integrabile .

Proprietà dell'integrale indefinito

Una costante moltiplicativa **k** della funzione integranda può essere portata fuori dal simbolo di integrale indefinito, cioè:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Infatti , derivando membro a membro, otteniamo:

$$D\int k\, f(x)dx = Dk\int f(x)d\,x = kD\int f(x)d\,x \quad , \quad k \cdot f(x) = k \cdot f(x)$$

***Teorema*:** L'integrale della somma algebrica di un numero finito di funzioni è uguale alla somma algebrica delle singole funzione date, cioè:

$$\int [\,f(x) + g(x) + p(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + \int p(x)dx$$

Infatti , derivando ambo i membri , otteniamo:

$$D\int [\,f(x) + g(x) + p(x)]dx = D\int f(x)dx + D\int g(x)dx + D\int p(x)dx$$

$$f(x) + g(x) + p(x) = f(x) + g(x) + p(x)$$

Integrali indefiniti immediati

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1 \qquad \int [\,f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \int [\,f(x)]^n \cdot df(x) = \frac{[\,f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \frac{1}{f(x)} \cdot d\,f(x) = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C \qquad \int f'(x)\cos f(x) \cdot dx = \int \cos f(x) \cdot df(x) = \sin f(x) + C$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C \qquad \int f'(x)\sin f(x) \cdot dx = \int \sin f(x) \cdot df(x) = -\cos f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tg\,x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \int \frac{d\,f(x)}{\cos^2 f(x)} = tg\,f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x}dx = -\cot g\,x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{sin^2 f(x)}dx = \int \frac{d\,f(x)}{sin^2 f(x)} = -\cot g\,f(x) + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int f'(x)e^{f(x)}dx = \int e^{f(x)}d\,f(x) = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int f'(x)a^{f(x)}dx = \int a^{f(x)}d\,f(x) = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \int \frac{d\,f(x)}{1+[f(x)]^2} = \operatorname{arctg} f(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \int \frac{d\,f(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} = arcsin\,f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x}d\,x = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C \qquad \int \frac{1}{\sin f(x)}d\,f(x) = \ln\left|tg\frac{f(x)}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}d\,x = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C \qquad \int \frac{1}{\cos f(x)}d\,f(x) = \ln\left|tg\left[\frac{f(x)}{2}+\frac{\pi}{4}\right]\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}d\,x = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{[f(x)]^2 \pm a^2}}d\,f(x) = \ln\left|x+\sqrt{[f(x)]^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}d\,x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{1}{a^2+[f(x)]^2}d\,f(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{a} + C$$

$$\int \sinh x \cdot d\,x = \cosh x + C \qquad \int \sinh f(x) \cdot d\,f(x) = \cosh f(x) + C$$

$$\int \cosh x \cdot d\,x = \sinh x + C \qquad \int \cosh f(x) \cdot d\,f(x) = \sinh f(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d\,x = \operatorname{settsinh} x + C = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}d\,f(x) = \operatorname{settsinh} f(x) = \ln\left|x+\sqrt{1+[f(x)]^2}\right|$$

$$\int sin5x\,dx = \frac{1}{5}\int sin5x\,d5x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C, \quad \int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$\int (2x-1)^{100}dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{100}d(2x+1) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{101}}{101} + C = \frac{(2x+1)^{101}}{202} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{-1/2} d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

$$\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot g\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$$

Integrazione per decomposizione in somma

Il metodo di integrazione per decomposizione in somma consiste nell'esprimere la funzione integranda $f(x)$ mediante la somma algebrica di due o più funzioni delle quali sappiamo calcolare l'integrale indefinito.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\cot g\,x + tg\,x + C$$

$$\int \frac{x}{1+x}dx = \int \frac{1+x-1}{1+x}dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x}dx = x - \ln|1+x| + C$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = -\cot g\,x - tg\,x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx + \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} - \int \frac{d\cos x}{\cos x} =$$

$$= \ln\sin x - \ln\cos x + C = \ln tg\,x + C \qquad \text{oppure :}$$

$$\int \frac{1}{\sin x\cdot\cos x}dx = \int \frac{1}{tg\,x\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{d\,tg\,x}{tg\,x} = \ln tg\,x + C$$

$$\int \left(3x^4 - 2x^3 + 5\right)dx = 3\int x^4\,dx - 2\int x^3\,dx + 5\int dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$$

$$\int sin^3 x\,dx = \int sin\,x \cdot sin^2 x\,dx = \int sin\,x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right)dx = \int sin\,x\,dx - \int sin\,x \cdot \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\cos x + \int \cos^2 x\,d\cos x = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cdot \left(1 - sin^2 x\right)dx = \int \cos x\,dx - \int \cos x \cdot sin^2 x\,dx =$$

$$= sin\,x - \int sin^2 x\,d\,sin\,x = sin\,x - \frac{1}{3}sin^3 x + C$$

$$\int \frac{d\,x}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x + sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(1 + tg^2 x\right)d\,tg\,x = \int d\,tg\,x + \int tg^2 x\,d\,tg\,x =$$

$$= tg\,x + \frac{1}{3}tg^3 x + C$$

$$\int sin\,4x \cdot \cos 2x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}sin\,6x + \frac{1}{2}sin\,2x\right)dx = \frac{1}{2}\int sin\,6x dx + \frac{1}{2}\int sin\,2x dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int sin\,6x\,d\,6x + \frac{1}{4}\int sin\,2x\,d\,2x = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Integrazione per parti

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni definite e continue assieme alle loro derivate prime nell'intervallo $[a,b]$, abbiamo:

$$\int \varphi(x)dx = \int f(x) \cdot \underline{g'(x)dx} = \int f(x)\underline{d\,g(x)} = f(x)g(x) - \int g(x)df(x) =$$

$$= f(x)g(x) - \int g(x)\,f'(x)dx \qquad \textbf{[7]}$$

Dimostrazione

$$d[f(x) \cdot g(x)] = [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]d\,x = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

(differenziale del prodotto di due funzioni) Da questa uguaglianza deduciamo :

$$f(x)g'(x)dx = f(x)d\,g(x) = d[f(x) \cdot g(x)] - f'(x)g(x)dx = d[f(x) \cdot g(x)] - g(x)df(x)$$

Integrando ambo i membri otteniamo :

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)d\,g(x) = \int d[f(x) \cdot g(x)] - \int g(x)df(x) = f(x) \cdot g(x) - \int g(x)df(x) + C$$

Osservazione N°1

- Il fattore $\underline{d\,g(x)} = \underline{g'(x)d\,x}$ è detto fattore differenziale; $f(x)$ si chiama **fattore finito**; $\varphi(x) = f(x)g'(x)$ è la funzione integranda; $g'(x)$ è la derivata prima di una funzione $g(x)$ da determinare mediante il calcolo di un integrale
- La formula [7] è utile se , determinata la funzione $g(x)$, l'integrale $\int g(x)d\,f(x)$ è più semplice dell'integrale $\int f(x)d\,g(x)$ o se questi due integrali sono legati tra loro da qualche relazione .
- La [7] può essere applicata all'integrale $\int g(x)d\,f(x)$ con l'unica avvertenza di non scegliere come fattore differenziale il termine $d\,f(x) = f'(x)dx$. Così facendo si perverrebbe ad una identità .

Osservazione N°2

Noi sappiamo che l'integrale di una somma algebrica di funzioni è uguale alla somma algebrica delle singole funzioni; non possiamo invece affermare che l'integrale di un prodotto di funzioni è uguale al prodotto delle singole funzioni. Quando si presenta una situazione del genere può essere utile applicare la formula d'integrazione per parti .

$$\int x\cdot\underline{\sin x\,dx} = -\int x\cdot\underline{d\cos x} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\int x\cdot\underline{\cos x\,dx} = \int x\cdot\underline{d\sin x} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

$$\int x^2\cdot\underline{\sin x\,dx} \quad -\int x^2\,\underline{d\cos x} = -x^2\cos x + \int \cos x\,d\,x^2 = -x^2\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,d\,x =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x d\sin x = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

$$\int x^3\cdot\underline{\cos x\,dx} = \int x^3\cdot\underline{d\sin x} = x^3\sin x - \int \sin x\,d\,x^3 = x^3\sin x - 3\int x^2\cdot\sin x\,d\,x =$$

$$= x^3\sin x + 3\int x^2\cdot d\cos x = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 3\int \cos x d\,x^2 =$$

$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6\int x\cos x d\,x = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6\int x\,d\sin x =$$

$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x + 6\int \sin x\,d\,x = x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + C$$

$$\int x\cdot\underline{e^x\,d\,x} = \int x\cdot\underline{d\,e^x} = xe^x - \int e^x\,d\,x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

$$\int x\cdot \underline{e^{3x}dx} = \frac{1}{3}\int x\cdot \underline{d\,e^{3x}} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}\int e^{3x}\,d3x =$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C = \frac{1}{9}e^{3x}(3x - 1) + C$$

$$\int \underline{x}\cdot \ln x\cdot \underline{dx} = \frac{1}{2}\int \ln x\cdot \underline{d\,x^2} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x\cdot \underline{\frac{1}{\cos^2 x}dx} = \int x\cdot \underline{d\,tg\,x} = x\,tg\,x - \int tg\,x\,dx = x\,tg\,x - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx =$$

$$= x\,tg\,x + \int \frac{1}{\cos x}d\cos x = x\,tg\,x + \ln|\cos x| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\underline{dx} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\,d\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a} \qquad 2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + k$$

Integrazione per sostituzione

Sia $F(x)$ una primitiva della funzione $f(x)$ definita e continua nell'intervallo compatto $[a,b]$. Siano $g(t)$ e $g'(t)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo $[p,q]$. Se, al variare di t nell'intervallo $[p,q]$, la funzione $g(t)$ varia nell'intervallo $[a,b]$ cioè se il codominio di $g(t)$ coincide col dominio di $f(x)$ (o con un suo sottoinsieme) allora è lecita la sostituzione:

$$x = g(t) \qquad dx = g'(t)dt \qquad [H]$$

Otteniamo : $F(x) + C = \int f(x)dx = \int f[g(t)]\cdot g'(t)\cdot dt = F[g(t)] + C$ **[M]**

REGOLA: Si effettua la sostituzione $x = g(t)$. Si calcola il differenziale $dx = g'(t)dt$. Si sostituisce nell'integrale da calcolare $\int f(x)dx$, $g(t)$ al posto di x e $g'(t)dt$ al posto di dx .

La principale difficoltà consiste nella scelta della funzione $g(t)$ da porre uguale ad x . Per tornare alla variabile x occorre trovare la funzione inversa della funzione $x = g(t)$, cioè bisogna trovare la funzione $t = g^{-1}(x) = \varphi(x)$.

Questo è possibile quando la funzione $g(t)$ è strettamente crescente (decrescente) nel suo dominio . Questo si verifica sicuramente quando risulta $g'(t) > 0$ [$g'(t) < 0$] $\forall x \in [p,q]$. In tal caso risulta: $x = g(t) \Leftrightarrow t = g^{-1}(x) = \varphi(x)$

La [M] è giustificata dalle seguenti considerazioni:

La derivata prima rispetto a t della funzione composta $F(x) = F[g(t)]$ è .

$$\frac{dF[g(t)]}{dt} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = F'(x)\cdot g'(t) = f(x)\cdot g'(t) = f[g(t)]\cdot g'(t)$$

essendo per ipotesi: $F'(x) = f(x)$, $dF[g(t)] = f[g(t)]\cdot g'(t)\cdot dt$

Integrando ambo i membri rispetto a t otteniamo : $\int dF[g(t)] = \int f[g(t)]\cdot g'(t)\cdot dt$ cioè :

$$F[g(t)] + C = \int f[g(t)]\cdot g'(t)\cdot dt = F(x) + C = \int f(x)dx$$

ESEMPI

Pongo: $x^2 - 1 = t^2$, $x = \sqrt{t^2+1}$, $t = \sqrt{x^2-1}$, $dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$ (1)

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\cdot dt = \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt = t - \operatorname{arctg} t + C = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + C$$

Pongo : $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, $t = \arcsin x$, $dx = \cos t\cdot dt$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t$

$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\cdot dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

(1) Davanti ai radicali mettiamo solo il segno + perché la corrispondenza tra le due variabili x e t deve essere biunivoca altrimenti la sostituzione non è lecita . Davanti ai radicali , al posto del segno + , avremmo potuto mettere il segno -

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2\,dx} = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\cdot dt = a^2\cdot\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\cdot dt = a^2\cdot\int\cos^2 t\cdot dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left[\int dt + \frac{1}{2}\int\cos 2t\,d(2t)\right] = \frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}a^2\left(t+\sin t\cdot\cos t\right) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + k$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2\,dx} = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + k$$

Pongo: $x = a\cdot\sin t$, $dx = a\cdot\cos t\cdot dt$, $\sin t = \frac{x}{a}$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-x^2}$$

Integrazione per sostituzione: metodi generali

$\int R\left(x,\sqrt{\frac{x}{a-x}}\right)dx$ $\quad x = a\cdot\sin^2 t \quad dx = 2a\cdot\sin t\cdot\cos t\cdot dt \quad \sqrt{\frac{x}{a-x}} = tg\,t$

$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ $\quad x = a\cdot\sin t \quad dx = a\cdot\cos t\cdot dt \quad a^2-x^2 = a^2\cdot\cos^2 t$

$\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x},\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{x}^2}\right)\mathbf{dx}$ $\quad x = a\cdot\mathrm{tg}\,t \quad x = a\cdot\mathrm{settsh}\,t$

$\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x},\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}\right)\mathbf{dx}$ $\quad x = \frac{a}{\cos t} \quad x = a\cdot\mathrm{settch}\,t$

$\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x},\sqrt{\mathbf{x}},\sqrt{\mathbf{1-x}}\right)\mathbf{dx}$ $\quad x = \sin^2 t \quad dx = 2\sin t\cdot\cos t\cdot dt$

$\int\sqrt{\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2}\,\mathbf{dx}$ $\quad x = a\cdot\sin t \quad dx = a\cdot\cos t\cdot dt \quad a^2-x^2 = a^2\cdot\cos^2 t$ oppure $x = \mathrm{tgh}\,x$

$\int\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{a}^2-\mathbf{x}^2}}\mathbf{dx}$ $\quad x = a\cdot\sin t \quad dx = a\cdot\cos t\cdot dt \quad a^2-x^2 = a^2\cdot\cos^2 t$

$\int\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}\,\mathbf{dx}$ $\quad x = \frac{a}{\cos t} \quad x = a\cdot\cosh t$

$\int\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{x}^2-\mathbf{a}^2}}\mathbf{dx}$ $\quad x = \frac{a}{\cos t} \quad x = a\cdot\cosh t$

$\int\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{x}^2}\,\mathbf{dx}$ $\quad x = a\cdot\mathrm{tg}\,t \quad x = a\cdot\sinh t$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx \quad x = a \cdot \mathrm{tg}\, t \quad x = a \cdot \sinh t$

$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx \quad \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ possiamo utilizzare una delle tre seguenti **sostituzioni di Eulero**.

Le tre sostituzioni di Eulero in sintesi

$a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$ oppure $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot (t \pm x)$
$c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t$

Prima sostituzione di Eulero

1° caso $a > 0$ c **qualsiasi** $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$

L'integrale si risolve utilizzando una delle seguenti sostituzioni:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a} \cdot x & \text{oppure} \\ \sqrt{a} \cdot (t \pm x) & \text{oppure} \\ (x - \alpha)t \end{cases}$$

sostituzione algebrica

$$D\left(ax^2 + bx + c\right) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{\Delta} \cdot \sec t = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\cos t} & \text{oppure} \\ \sqrt{\Delta} \times \mathrm{cosec}\, t = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\sin t} \end{cases}$$

sostituzione goniometrica

Seconda sostituzione di Eulero

2° caso $a > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a} \cdot x & \text{oppure} \\ \sqrt{a} \cdot (t \pm x) & \text{oppure} \\ tx \pm \sqrt{c} & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

sostituzione algebrica

$$D\left(ax^2 + bx + c\right) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{-\Delta} \cdot \mathrm{tg}\, t & \text{oppure} \\ \sqrt{-\Delta} \cdot \mathrm{cotg}\, t \end{cases}$$

sostituzione goniometrica

Terza sostituzione di Eulero

3° caso $a < 0$ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} (x-\alpha)t & \text{oppure} \\ (\beta - x)t \end{cases}$$ sostituzione algebrica

$$D(ax^2+bx+c) = 2ax+b = \begin{cases} \sqrt{\Delta}\times\sin t & \text{oppure} \\ \sqrt{\Delta}\times\cos t \end{cases}$$ sostituzione goniometrica

$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, tg\, x)\cdot dx$ $\quad tg\, x = t \quad x = \operatorname{arctg} t \quad d\,x = \frac{1}{1+t^2}dt \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

$\int R(\sin x, \cos x, tg\, x)\, dx$ $\quad tg\frac{x}{2} = t \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad x = 2\operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad tg\, x = \frac{2\cdot tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

- $\int \sin^{2n} x\cdot d\,x = \int (\sin^2 x)^n \cdot d\,x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n \cdot d\,x$
- $\int \sin^{2n+1} x\cdot d\,x = \int (\sin^2 x)^n \cdot \sin x\cdot d\,x = -\int (1-\cos^2 x)^n \cdot d\cos x$
- $\int \cos^{2n} x\cdot d\,x = \int (\cos^2 x)^n \cdot d\,x = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n \cdot d\,x$
- $\int \cos^{2n+1} x\cdot d\,x = \int (\cos^2 x)^n \cdot \cos x\cdot d\,x = \int (1-\sin^2 x)^n \cdot d\sin x$
- $\int R(e^{\alpha x})\,dx$ $\quad \int R(e^{\alpha x})\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{R(t)}{t}dt \quad e^{\alpha x} = t, \quad x = \frac{\ln t}{\alpha}, \quad dx = \frac{d\,t}{\alpha\, t}$
- $\int P(x)\cdot \underline{e^{\alpha x}\,dx} = \frac{1}{\alpha}P(x)e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\int P'(x)\underline{e^{\alpha x}\,dx}$ $\quad P(x)$ polinomio razionale intero di grado n
- $\int R(\ln x)\,dx$ $\quad \ln x = t \quad x = e^t \quad dx = e^t\, dx$

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Vogliamo calcolare il seguente integrale $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ [1] dove $N(x)$ e [$D(x)$] è un polinomio di grado m (n). Se risulta $m \geq n$ possiamo scrivere:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \qquad [2]$$

L'integrale [1] diventa:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right] dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx \qquad [3]$$

Se $R(x)$ e $D(x)$ non hanno fattori comuni allora la funzione $f(x) = \frac{R(x)}{D(x)}$ dicesi **funzione razionale fratta propria**. Quindi l'integrale di una funzione razionale fratta è sempre riconducibile all'integrale di una funzione razionale fratta propria .

Metodo di Heaviside

Questo metodo va applicato quando il denominatore della funzione integranda è il prodotto di n fattori di primo grado aventi tutti esponenti uno , cioè se:

$$D(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)$$

Il metodo di **Heaviside** ci permette di trasformare rapidamente la frazione $\frac{R(x)}{D(x)}$ nella somma algebrica di **n fratti semplici**:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + \frac{D}{x - x_4}$$

Eliminando i denominatori abbiamo :

$$R(x) = A(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + B(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) +$$
$$+ C(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + D(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x = x_1 \Rightarrow A = \frac{R(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}, \quad x = x_2 \Rightarrow B = \frac{R(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$x = x_3 \Rightarrow C = \frac{R(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \ , \ x = x_4 \Rightarrow D = \frac{R(x_4)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

$$\frac{15x^2 - 4x - 81}{x^3 - 13x + 12} = \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-1)(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+4} =$$

$$= \frac{7}{x-1} + \frac{3}{x-3} + \frac{5}{x+4}$$

$$15x^2 - 4x - 81 = A(x-3)(x-4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x-3)$$

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad -70 = A(1-3)(1+4) \quad \Rightarrow \quad A = 7$

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad 42 = B(3-2)(3+4) \quad \Rightarrow \quad B = 3$

$x = -4 \quad \Rightarrow \quad 175 = C(-4-1)(-4-3) \quad \Rightarrow \quad C = 5$

$$\int \frac{15x^2 - 4x - 81}{x^3 - 13x + 12} dx = \int \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-1)(x-3)(x+4)} dx =$$

$$= 7\int \frac{1}{x-1} dx + 3\int \frac{1}{x-3} dx + 5\int \frac{1}{x+4} dx = 7\ln|x-1| + 3\ln|x-3| + 5\ln|x+4| + C$$

Possiamo calcolare il valore delle costanti A , B , C applicando il principio di identità dei polinomi:

$$15x^2 - 4x - 81 = (A + B + C)x^2 + (A + 3B - 4C)x - 12A - 4B + 3C$$

$$\begin{cases} A + B + C = 15 \\ A + 3B - 4C = -4 \\ -12A - 4B + 3C = -81 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 7 \\ B = 3 \\ C = 5 \end{cases}$$

Metodo tradizionale

Voglio Calcolare l'integrale $\int \frac{R(x)}{D(x)} dx$ sapendo che: $D(x) = (mx + n)^h \cdot (ax^2 + bx + c)^k$

La prima cosa da fare è di trasformare la frazione $\frac{R(x)}{D(x)}$ nella somma di un numero finito di fratti semplici.

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \cdots + \frac{A_h}{(mx+n)^h} + \frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_kx + C_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

$D(x)$ = polinomio in x decomponibile in fattori di primo grado e fattori di secondo grado non ulteriormente decomponibili ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$) .

Per calcolare il valore delle costanti A_i , B_i , C_i si procede come segue:

1) Si libera l'uguaglianza [1] dai denominatori

2) Si applica il principio di identità dei polinomi in una delle due forme con le quali solitamente viene enunciato .

Ne derivano i due seguenti procedimenti :

a) si uguagliano i coefficienti dei termini di uguale grado presenti nei due membri dell'uguaglianza e si risolve il sistema lineare così ottenuto .

b) Si attribuiscono alla variabile x valori arbitrari, precisamente tanti quante sono le costanti A_i, B_i, C_i e si risolve il sistema lineare ottenuto .

In particolare può essere conveniente , una volta determinata una costante , sostituirla e semplificare l'uguaglianza trasformata che si ricava .

Caso particolare: $\mathbf{D(x) = (mx + n)^2 \cdot (ax^2 + bx + c)}$

$$\frac{N(x)}{(mx+n)^2 \times (ax^2+bx+c)} = \frac{A}{mx+n} + \frac{B}{(mx+n)^2} + \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c} = \frac{Ex+F}{(mx+n)^2} + \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}$$

$$N(x) = A\cdot(mx+n)\cdot(ax^2+bx+c) + B\cdot(ax^2+bx+c) + (Cx+D)\cdot(mx+n)^2$$

Applicando il **principio di identità dei polinomi** ci calcoliamo i valori delle costanti A,B, C,D .

A = **B** = **C** = **D** =

Il calcolo dell'integrale $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$ è ricondotto al calcolo di uno dei quattro seguenti integrali indefiniti: $\int \frac{A}{mx+n}dx$, $\int \frac{A}{(mx+n)^2}dx$, $\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^k}dx$

$$\int \frac{A}{mx+n}dx = \frac{A}{mx+n}\int \frac{1}{mx+n}d(mx+n) = \frac{A}{m}\ln|mx+n| + C$$

$$\int \frac{A}{(mx+n)^2}dx = \frac{A}{m}\int (mx+n)^{-2}d(mx+n) = -\frac{A}{m}\times\frac{1}{mx+n} + C$$

- L'integrale $\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}dx$ dà come risultato un logaritmo ed un arcotangente.

- Voglio Calcolare l'integrale $\int \frac{R(x)}{D(x)}dx$ sapendo che: $D(x) = (mx+n)\cdot(ax^2+bx+c)$

La prima cosa da fare è di trasformare la frazione $\frac{R(x)}{D(x)}$ nella somma di DUE fratti semplici.

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A}{mx+n} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \qquad \text{con} \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Per calcolare il valore delle costanti A, B, C si procede come segue:

Eliminati i denominatori dalla precedente uguaglianza otteniamo:

$$R(x) = A\cdot\left(ax^2 + bx + c\right) + \left(Bx + C\right)\cdot\left(mx + n\right)$$

Applicando il principio di identità dei polinomi ci calcoliamo i valori delle costanti A,B, C,. **A** = **B** = **C** =

Il calcolo dell'integrale $\int \frac{R(x)}{D(x)}dx$ è ricondotto al calcolo di uno dei due seguenti integrali indefiniti: $\int \frac{A}{mx+n}dx$, , $\int \frac{Bx + C}{ax^2+bx+c}dx$,

$$\int \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{mx+n}}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{mx+n}}\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{mx+n}}\mathbf{d}\left(\mathbf{mx+n}\right) = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{m}}\mathbf{ln}\left|\mathbf{mx+n}\right| + \mathbf{C}$$

- L 'integrale $\int \frac{Bx + C}{ax^2+bx+c}dx$ dà come risultato un **logaritmo** ed un **arcotangente**.

Otteniamo il seguente risultato: $\int \frac{\mathbf{Bx + C}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2a}}\mathbf{ln}\left(\mathbf{ax^2+bx+c}\right) + \frac{\mathbf{2aB}}{\sqrt{\mathbf{-\Delta}}}\mathbf{arctg}\frac{\mathbf{2ax+b}}{\sqrt{\mathbf{-\Delta}}} + \mathbf{K}$

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B - \frac{bA}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) + \left(B - \frac{bA}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

Poi, mettendo in evidenza $\frac{1}{4a}$, si trasforma il trinomio ax^2+bx+c nella somma di un quadrato e di una opportuna costante e questo genera un arcotangente.

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+4ac\right) = \frac{1}{4a}\left[\left(2ax+b\right)^2+n\right]$$

- Per calcolare l'integrale $\int \frac{\mathbf{Ex + F}}{\left(\mathbf{ax^2 + bx + c}\right)^{\mathbf{k}}}\mathbf{dx}$ bisogna utilizzare una integrazione per ricorrenza ottenendo come risultato finale una frazione, un logaritmo ed un arcotangente.

- Ricordando che $D\left(ax^2 + bx + c\right) = 2ax + b$ possiamo scrivere :

$$Cx + D = C\left(x + \frac{D}{C}\right) = \frac{C}{2a}\left(2ax + \frac{2aD}{C}\right) = \frac{C}{2a}\left(2ax+b+\frac{2aD}{C}-b\right) =$$

$$= \frac{C}{2a}\left(2ax+b\right) + \frac{C}{2a}\cdot\frac{2aD}{C} - \frac{bC}{2a} = \frac{C}{2a}\left(2ax+b\right) + D - \frac{bC}{2a} = \frac{C}{2a}\left(2ax+b\right) + h \qquad \text{con } h = D - \frac{bC}{2a}$$

$$\int \frac{\mathbf{Cx + D}}{\mathbf{ax^2 + bx + c}}\mathbf{dx} = \frac{C}{2a}\cdot\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + h\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{C}{2a}\cdot\ln\left(ax^2+bx+c\right) + h\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+4ac\right) = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4abx+b^2+4ac-b^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-\Delta\right] = -\frac{\Delta}{4a}\left[\frac{(2ax+b)^2}{-\Delta}+1\right] = -\frac{\Delta}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right]$$

$$h\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx = -\frac{4ah}{\Delta}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}dx = -\frac{2h}{\Delta}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}d\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$$

$$\mathbf{h\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx = -\frac{2h}{\Delta}\cdot arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+k}$$

$$\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx = -\frac{4a}{\Delta}\int\frac{1}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}dx = -\frac{2}{\Delta}\int\frac{1}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}d\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = -\frac{2}{\Delta}arctg\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+k$$

$$\int\frac{6x^2+10x+9}{4x^3+10x^2+8x+3}dx = \int\frac{6x^2+10x+9}{(2x+3)(2x^2+2x+1)}dx = \int\frac{3}{2x+3}dx + \int\frac{2}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= 3\int\frac{1}{2x+3}d(2x+3) + \int\frac{4}{4x^2+4x+2}dx = 3\ln|2x+3| + \int\frac{4}{1+(2x+1)^2}dx$$

$$\mathbf{\int\frac{6x^2+10x+9}{4x^3+10x^2+8x+3}dx = 3\ln|2x+3| + 2\int\frac{1}{1+(2x+1)^2}d(2x+1) = 3\ln|2x+3| + 2\,arctg(2x+1) + C}$$

$$\frac{6x^2+10x+9}{(2x+3)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1} = \frac{3}{2x+3} + \frac{2}{2x^2+2x+1}$$

$$6x^2+10x+9 = A(2x^2+2x+1) + (Bx+C)(2x+3) \qquad x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{15}{2} = \frac{5}{2}A \Rightarrow \boxed{A=3}$$

$$6x^2+10x+9 = (2B+6)x^2 + (3B+2C+6)x + 3C + 3$$

$$2B+6 = 6 \Rightarrow \boxed{B=0} \qquad 3C+3 = 9 \Rightarrow \boxed{C=2}$$

$$\int\frac{14x^2+26x+15}{4x^3+10x^2+8x+3}dx = \int\frac{14x^2+26x+15}{(2x+3)(2x^2+2x+1)}dx = \int\frac{3}{2x+3}dx + \int\frac{4x+4}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\ln|2x+3| + \int\frac{4x+2}{2x^2+2x+1}dx + \int\frac{2}{2x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\ln|2x+3|+\ln|2x^2+2x+1|+\int\frac{4}{1+(2x+1)^2}dx = \frac{3}{2}\cdot\ln|2x+3|+\ln|2x^2+2x+1|+2arctg(2x+1)+C$$

$$\int\frac{14x^2+26x+15}{4x^3+10x^2+8x+3}dx = \frac{3}{2}\cdot\ln|2x+3|+\ln|2x^2+2x+1|+2arctg(2x+1)+C$$

$$\frac{14x^2+26x+15}{(2x+3)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{2x+3}+\frac{Bx+C}{2x^2+2x+1} = \frac{3}{2x+3}+\frac{4x+4}{2x^2+2x+1}$$

$$14x^2+26x+15 = A(2x^2+2x+1)+(Bx+C)(2x+3) \qquad x=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{15}{2}=\frac{15}{2}A \Rightarrow \boxed{A=3}$$

$$14x^2+26x+15 = (2B+6)x^2+(3B+2C+6)x+3C+3$$

$$3C+3=15 \Rightarrow \boxed{C=4} \qquad 2B+6=14 \Rightarrow \boxed{B=4}$$

Metodo rapido per trasformare l'integrale $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ nell'integrale

$\int\frac{1}{1+(mx+n)^2}d(mx+n)=arctg(mx+n)+C$ quando $\Delta=b^2-4ac<0$

$$\frac{1}{4a}(4a^2x^2+4abx+4ac)=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+q\right]=\frac{q}{4a}\left[\frac{(2ax+b)^2}{q}+1\right]=\frac{q}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{q}}\right)^2+1\right]=$$

$$\frac{q}{4a}\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{q}}x+\frac{b}{\sqrt{q}}\right)^2+1\right]=\frac{q}{4a}\left[(mx+n)^2+1\right]$$

Metodo di Hermite-Levi

Adesso vediamo come è possibile calcolare l'integrale indefinito di una funzione razionale fratta $\frac{R(x)}{D(x)}$ quando il denominatore $D(x)$ contiene come fattori termini di primo grado o potenze di termini di primo grado o termini di secondo grado a delta minore di zero .

La regola di **Hermite-Levi** ci dice che:

- **un fattore di primo grado del tipo** $mx+n$ **dà come risultato finale il logaritmo di tale fattore, cioè genera un termine del tipo** $A\ln|mx+n|$

- **un fattore del tipo** $(mx+n)^k$ **dà come risultato finale** $A\ln|mx+n|$ **più una frazione avente come denominatore** $(mx+n)^{k-1}$ **e come numeratore un polinomio di grado** $k-2$
- **un fattore di secondo grado** ax^2+bx+c **a delta minore di zero dà come risultato finale la somma di un logaritmo e dell'arcotangente di una frazione che ha come numeratore la derivata prima del fattore di secondo grado e come denominatore la radice quadrata del delta del trinomio cambiato di segno, cioè genera un'espressione del tipo** $A\cdot\ln|ax^2+bx+c|+B\cdot\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$**.**

[4]
$$\int\frac{N(x)}{(mx+n)^3\cdot(ax^2+bx+c)}dx=$$
$$\frac{Ax+B}{(mx+n)^2}+C\cdot\ln|mx+n|+D\cdot\ln|ax^2+bx+c|+E\cdot\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}+k$$

Il metodo di **Hermite-Levi** ci consente di determinare subito la primitiva della funzione integranda , o meglio , ci consente di individuare la qualità dei suoi addendi (cioè ci dice che come risultato finale possiamo trovare frazioni o logaritmi o arcotangenti) lasciando indeterminati alcuni coefficienti delle funzioni componenti la primitiva della funzione integranda .

Per calcolare tali coefficienti si procede come segue:

- **deriviamo membro a membro la [4]**
- **eliminiamo i denominatori ottenendo una identità tra due polinomi in uno dei quali figurano i parametri da determinare**
- **imponiamo che i due polinomi siano identicamente uguali applicando:**

1) il principio di identità dei polinomi 2) oppure assegnando alla x tanti valori arbitrari quanti sono i parametri da determinare .

ESEMPI

$$\int\frac{1}{2x^3+2x^2+x}dx=\int\frac{1}{x(2x^2+2x+1)}dx=A\ln|x|+B\ln(2x^2+2x+1)+C\operatorname{arctg}(2x+1)+k=$$
$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1)-\operatorname{arctg}(2x+1)+k$$

$$\frac{1}{2x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x(2x^2+2x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B(4x+2)}{2x^2+2x+1}+\frac{C}{2x^2+2x+1}$$

$$1 = A(2x^2 + 2x + 1) + Bx(4x + 2) + Cx \ , \quad 1 = (2A + 4B)x^2 + (2A + 2B + C)x + A$$

$$\begin{cases} 2A + 4B = 0 \\ 2A + 2B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = -1 \end{cases} \text{ oppure : } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \Rightarrow C = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x - 4}{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8} dx = \int \frac{x - 4}{(x - 2)^2(x^2 - 2x + 2)} dx =$$

$$= \frac{A}{x - 2} + B\ln|x - 2| + C\ln(x^2 - 2x + 2) + E\,\mathrm{arctg}(x - 1) + k =$$

$$= \frac{1}{x - 2} + \frac{3}{2}\ln|x - 2| - \frac{3}{2}\ln(x^2 - 2x + 2) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x - 1) + k$$

$$\frac{x - 4}{(x - 2)^2(x^2 - 2x + 2)} = \frac{-A}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x - 2} + \frac{2C(x - 1)}{x^2 - 2x + 2} + \frac{E}{x^2 - 2x + 2}$$

$$x - 4 = -A(x^2 - 2x + 2) + B(x - 2)(x^2 - 2x + 2) + 2C(x - 1)(x - 2)^2 + E(x - 2)^2$$

$$x - 4 = (B + 2C)x^3 + (-A - 4B - 10C + E)x^2 + (2A + 6B + 16C - 4E)x + (-2A - 4B - 8C + 4E)$$

$$\begin{cases} B + 2C = 0 \\ A + 4B + 10C - E = 0 \\ 2A + 6B + 16C - 4E = 1 \\ 2A + 4B + 8C - 4E = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{3}{2} \\ C = -\frac{3}{4} \\ E = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Metodo di Hermite-Levi in casi particolari, cioè integrali di fratti semplici col metodo di Hermite-Levi

1) $\dfrac{R(x)}{D(x)} = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \displaystyle\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = A \cdot \mathrm{arctg}\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} + k$

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 2} dx = A \cdot \mathrm{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{7}} + k = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \mathrm{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{7}} + k$$

$$\frac{1}{x^2 + x + 2} = \frac{A \cdot \sqrt{7}}{2(x^2 + x + 2)} \ , \ 2 = A\sqrt{7} \ , \ A = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

2) $\dfrac{R(x)}{D(x)} = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c} = \dfrac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)}$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac > 0$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)}dx = A\cdot\ln|x - x_1| + B\cdot\ln|x - x_2| + k$$

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 2}dx = \int \frac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)}dx = A\cdot\ln|x - x_1| + B\cdot\ln|x - x_2| + k =$$

$$= \qquad = -\frac{1}{4}\cdot\ln|x + 1| + \frac{1}{4}\cdot\ln|x - 3| + k$$

$$\frac{1}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}, \; 1 = Ax - 3A + Bx + B,$$

$$1 = (A + B)x - 3A + B \quad \begin{cases} A + B = 1 \\ -3A + B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

3) $\dfrac{R(x)}{D(x)} = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c} = \dfrac{1}{a(x - x_1)^2}$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x - x_1)^2}dx = \frac{1}{a}\int (x - x_1)^{-2}dx = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x - x_1} + k$$

$$\int \frac{1}{2x^2 - 12x + 18}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x - 3)^2}dx = \frac{1}{2}\int (x - 3)^{-2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x - 3} + k$$

4) $\dfrac{R(x)}{D(x)} = \dfrac{mx + n}{ax^2 + bx + c}$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}dx = A\cdot\ln(ax^2 + bx + c) + B\cdot\operatorname{arctg}\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} + k$$

$$\int \frac{1 - 2x}{x^2 + 2x + 5}dx = A\cdot\ln(x^2 + 2x + 5) + B\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x + 2}{\sqrt{16}} + k =$$

$$= A\cdot\ln(x^2 + 2x + 5) + B\cdot\operatorname{arctg}\frac{x + 1}{2} + k = -\ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{3}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x + 1}{2} + k$$

$$\frac{1 - 2x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{2Ax + 2A}{x^2 + 2x + 5} + \frac{2B}{x^2 + 2x + 5}, \; 1 - 2x = 2Ax + 2A + 2B$$

$$\begin{cases} 2A = -2 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

5) $$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} = \frac{mx + n}{a(x - x_1)(x - x_2)} \qquad \Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\boxed{\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_1)(x - x_2)}dx = A \cdot \ln|x - x_1| + B \cdot \ln|x - x_2| + k}$$

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2}dx = \int \frac{x - 1}{(x + 1)(x + 2)}dx = A \cdot \ln|x + 1| + B \cdot \ln|x + 2| + k =$$

$$= \qquad -2 \cdot \ln|x + 1| + 3 \cdot \ln|x + 2| + k$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x - 1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} \quad , \; x - 1 = A(x + 2) + B(x + 1)$$

$$x - 1 = (A + B)x + 2A + B \qquad \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases}$$

6) $$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} = \frac{mx + n}{a(x - x_1)^2} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$\boxed{\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{mx + n}{a(x - x_1)^2}dx = \frac{A}{x - x_1} + B \cdot \ln|x - x_1| + k}$$

$$\int \frac{3x - 4}{x^2 - 4x + 4}dx = \int \frac{3x - 4}{(x - 2)^2}dx = \frac{A}{x - 2} + B \cdot \ln|x - 2| + k = \frac{2}{x - 2} + 3 \cdot \ln|x - 2| + k$$

$$\frac{3x - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-A}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x - 2} \quad , \; 3x - 4 = -A + Bx - 2B$$

$$\begin{cases} B = 3 \\ -2B - A = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -2 \\ B = 3 \end{cases}$$

7) $$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} = \frac{D(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c}$$

$$\boxed{\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{D(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c}dx = \ln(ax^2 + bx + c) + k}$$

$$\int \frac{14x + 13}{7x^2 + 13x + 5}dx = \int \frac{D(7x^2 + 13x + 5)}{7x^2 + 13x + 5}dx = \ln(7x^2 + 13x + 5) + k$$

8) $\dfrac{R(x)}{D(x)} = \dfrac{R(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \dfrac{R(x)}{a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$

$$\boxed{\int \frac{R(x)}{a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}dx = A\cdot\ln|x - x_1| + B\cdot\ln|x - x_2| + C\cdot\ln|x - x_3| + k}$$

$$x^3 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$$

$$\int \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x - 1)(x - 3)(x + 4)}dx = A\cdot\ln|x - 1| + B\cdot\ln|x - 3| + C\cdot\ln|x + 4| + k =$$

$$= 7\cdot\ln|x - 1| + 3\cdot\ln|x - 3| + 5\cdot\ln|x + 4| + k$$

$$\frac{15x^2 - 4x - 81}{(x - 1)(x - 3)(x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 4}$$

$$15x^2 - 4x - 81 = A(x - 3)(x - 4) + B(x - 1)(x + 4) + C(x - 1)(x - 3)$$

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad -70 = A(1 - 3)(1 + 4) \quad \Rightarrow \quad A = 7$

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad 42 = B(3 - 2)(3 + 4) \quad \Rightarrow \quad B = 3$

$x = -4 \quad \Rightarrow \quad 175 = C(-4 - 1)(-4 - 3) \quad \Rightarrow \quad C = 5$

Possiamo calcolare il valore delle costanti A , B , C applicando il principio di identità dei polinomi :

$$15x^2 - 4x - 81 = (A + B + C)x^2 + (A + 3B - 4C)x - 12A - 4B + 3C$$

$$\begin{cases} A + B + C = 15 \\ A + 3B - 4C = -4 \\ -12A - 4B + 3C = -81 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 7 \\ B = 3 \\ C = 5 \end{cases}$$

9) $\dfrac{R(x)}{D(x)} = \dfrac{R(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \dfrac{R(x)}{a(x - x_1)^2(x - x_2)}$

$$\boxed{\int \frac{R(x)}{a(x - x_1)^2(x - x_2)}dx = \frac{A}{x - x_1} + B\cdot\ln|x - x_1| + C\cdot\ln|x - x_2| + k}$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2(x - 2)}dx = \frac{A}{x - 1} + B\cdot\ln|x - 1| + C\cdot\ln|x - 2| + k =$$

$$= \frac{2}{x - 1} + 3\cdot\ln|x - 1| + 5\cdot\ln|x - 2| + k$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{-A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 2}$$

$$x^2 + 1 = -A(x-2) + b(x-1)(x-2) + c(x-1)^2$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 = A \;;\; x = 2 \Rightarrow 5 = C \;;\; x = 0 \Rightarrow 1 = 2 + 2B + 5 \Rightarrow B = -3$$

10) $$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{R(x)}{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \frac{R(x)}{a(x - x_1)(x^2 + px + q)} \qquad \Delta = p^2 - 4q < 0$$

$$\boxed{\int \frac{R(x)}{a(x - x_1)(x^2 + px + q)}dx = A\cdot\ln|x - x_1| + B\cdot\ln|x^2 + px + q| + C\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x + p}{\sqrt{-\Delta}} + k}$$

$$\int \frac{1}{x(2x^2 + 2x + 1)}dx = A\cdot\ln|x| + B\cdot\ln|2x^2 + 2x + 1| + C\cdot\operatorname{arctg}(2x + 1) + k =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\cdot\ln|2x^2 + 2x + 1| - \operatorname{arctg}(2x + 1) + k$$

$$\frac{1}{x(2x^2 + 2x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B(4x + 2)}{2x^2 + 2x + 1} + \frac{C}{2x^2 + 2x + 1}$$

$$1 = A(2x^2 + 2x + 1) + Bx(4x + 2) + Cx \qquad x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$1 = 2x^2 + 2x + 1 + 4Bx^2 + 2Bx + Cx \;,\; 1 = (2 + 4B)x^2 + (2 + 2B + C)x + 1$$

$$\begin{cases} 2 + 4B = 0 \\ 2 + 2B + C = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ C = -1 \end{cases}$$

L 'integrale $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}dx$ (e simili) può essere calcolato mediante la formula di ricorrenza , oppure applicando il metodo di **Hermite-Levi**. Tuttavia può essere più utile ricorrere alla integrazione per parti utilizzando il seguente accorgimento.

$$\int \frac{1}{1 + x^2}dx = \frac{x}{1 + x^2} - \int x\,d\frac{1}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}dx =$$

$$= \frac{x}{1 + x^2} + 2\int \frac{(1 + x^2) - 1}{(1 + x^2)^2}dx = \frac{x}{1 + x^2} + 2\int \frac{1}{1 + x^2}dx - 2\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}dx$$

$$2\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}dx = \frac{x}{1 + x^2} + \int \frac{1}{1 + x^2}dx \;,\; 2\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}dx = \frac{x}{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} - \int x\, d\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + 4\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3} dx =$$

$$= \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + 4\int \frac{\left(1+x^2\right)-1}{\left(1+x^2\right)^3} dx = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + 4\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx - 4\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^3} dx$$

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^3} dx = \frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx$$

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^3} dx = \frac{1}{4}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C$$