

Integrazione di alcune funzioni irrazionali

• Una funzione della variabile x si dice **irrazionale** quando essa si ottiene con un numero finito di operazioni di somma, differenza, prodotto, quoziente, estrazione di radice su espressioni razionali in x .

• Vogliamo calcolare il seguente integrale:
$$\mathcal{J} = \int \mathbf{R} \left(x, \sqrt[r]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \sqrt[s]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \dots \right) dx$$

dove $\mathbf{R}$ è una funzione razionale degli argomenti indicati.

Se k è il **m.c.m.** fra gli indici $r, s, \dots$ dei radicali presenti, l'integrale si razionalizza mediante la

seguente sostituzione: $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^k \quad k = \text{m.c.m.}(r; s) \quad [\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0]$

$$\alpha x + \beta = \gamma x t^k + \delta t^k, \quad (\gamma t^k - \alpha)x = \beta - \delta t^k \quad \quad x = \frac{\beta - \delta t^k}{\gamma t^k - \alpha}$$

$$dx = \frac{-(\gamma t^k - \alpha)\delta k t^{k-1} - \gamma k t^{k-1}(\beta - \delta t^k)}{(\gamma t^k - \alpha)^2} dt = \frac{k(\alpha\delta - \beta\gamma)t^{k-1}}{(\gamma t^k - \alpha)^2} dt$$

$$dx = \frac{k(\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot t^{k-1}}{(\gamma t^k - \alpha)} \cdot dt$$

• $\mathcal{J} = \int \mathbf{R} \left(x, \sqrt[s]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \dots \right) dx$ La sostituzione razionalizzante è: $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^s$

$$x = \frac{\beta - \delta t^s}{\gamma t^s - \alpha}$$

$$dx = \frac{s(\alpha\delta - \beta\gamma)t^{s-1}}{(\gamma t^s - \alpha)^2} dt$$

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{R} \left(\frac{\beta - \delta t^k}{\gamma t^k - \alpha}, t^{\frac{k}{r}}, t^{\frac{k}{s}}, \dots \right) \frac{k(\alpha\delta - \beta\gamma)t^{k-1}}{(\gamma t^k - \alpha)^2} dt = \\ &= k(\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot \int \mathbf{R} \left(\frac{\beta - \delta t^k}{\gamma t^k - \alpha}, t^{\frac{k}{r}}, t^{\frac{k}{s}}, \dots \right) \frac{t^{k-1}}{(\gamma t^k - \alpha)^2} dt \end{aligned}$$

• Se risulta $\boxed{\alpha = \delta, \beta = \gamma = 0}$ l'integrale precedente diventa: $\boxed{I = \int \mathbf{R}(x, \sqrt[r]{x}, \sqrt[s]{x}, \dots) dx}$

e la $\mathbf{R}$ dicesi **funzione razionale di irrazionali monomi**. La **sostituzione razionalizzante** è:

$$x = t^k, \quad dx = k t^{k-1} dt, \quad k = \text{m.c.m.}(r, s), \quad \boxed{I = k \cdot \int R\left(t^k, t^{\frac{k}{r}}, t^{\frac{k}{s}}, \dots\right) \cdot t^{k-1} \cdot dt}$$

se **k** è il **m.c.m.** fra gli indici $r, s, \dots$ dei radicali presenti

• $\mathcal{J} = \int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \dots\right) dx$ La sostituzione razionalizzante è: $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^s$

$$\alpha x + \beta = \gamma x t^s + \delta t^s \quad (\gamma t^s - \alpha)x = \beta - \delta t^s$$

$$x = \frac{\beta - \delta t^s}{\gamma t^s - \alpha} \quad dx = \frac{s(\alpha \delta - \beta \gamma) t^{s-1} dt}{(\gamma t^s - \alpha)^2}$$

• $\boxed{I = \int R(x, \sqrt[r]{x^p}, \sqrt[s]{x^q}, \dots) dx}$ Si razionalizza ponendo: $x = t^k$ con: $k = \text{m.c.m.}(r, s)$

$$dx = k t^{k-1} \quad \text{Otteniamo: } \boxed{I = k \cdot \int R(t, t^m, t^n, \dots) dt} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

• $\boxed{I = \int R\left(x, \sqrt[s]{\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^m}, \dots\right) dx}$ con $m, s \in \mathbb{N}$ ed $s > 1$ Si pone: $\boxed{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^s}$

Si ottiene:

$$\boxed{x = \frac{\beta - \delta t^s}{\gamma t^s - \alpha}}$$

$$\boxed{dx = \frac{s(\alpha \delta - \beta \gamma) t^{s-1} dt}{(\gamma t^s - \alpha)^2}}$$

Esempi

$$\int \frac{\sqrt{2+x}}{1+\sqrt{2+x}} dx = \int \frac{t}{1+t} \cdot 2t \cdot dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t} \cdot dt = 2 \int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) \cdot dt =$$

$$= t^2 - 2t + 2\ln|1+t| + k = 2+x - 2\sqrt{2+x} + 2\ln(1+\sqrt{2+x}) + k$$

Ho posto: $2+x = t^2$ ottenendo: $dx = 2t dt$, $x = t^2 - 2$

$$\boxed{\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx} = \int \frac{1-t^3}{t^6-t^4} \cdot 6t^5 \cdot dt = 6 \int \frac{(1-t^3)t^5}{t^4(t^2-1)} \cdot dt = -6 \int \frac{(t-1)(t^2+t+1)t}{(t-1)(t+1)} \cdot dt =$$

$$= -6 \int \frac{t^3+t^2+t}{(t+1)} \cdot dt = -6 \int \left(t^2+1 - \frac{1}{t+1}\right) \cdot dt = -6 \int (t^2+1) \cdot dt + 6 \int \frac{1}{t+1} \cdot dt =$$

$$= -6 \left(\frac{t^3}{3} + t - \ln|t+1|\right) + k = -6 \left[\frac{x^2}{3} + \sqrt[6]{x} - \ln(1+\sqrt[6]{x})\right] + k$$

Ho posto: $x = t^6$ ottenendo: $dx = 6t^5 \cdot dt$, $t = \sqrt[6]{x}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1 - \sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{1 - t^3}{t^6 - t^4} \cdot 6t^5 \cdot dt = \int \frac{(1 - t^3)t^5}{t^4(t^2 - 1)} dt = 6 \int \frac{t^3 + t^2 + t}{t + 1} dt = \\
 &= -6 \int \left(t^2 + 1 - \frac{1}{t + 1} \right) dt = -6 \int (t^2 + 1) dt + 6 \int \frac{1}{t + 1} dt = \\
 &= -6 \left(\frac{1}{3} t^3 + t \right) + 6 \ln(t + 1) + C = -6 \left[\frac{1}{3} t^3 + t - \ln(t + 1) \right] + C = \\
 &= -6 \left[\frac{1}{3} x^2 + \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) \right] + C
 \end{aligned}$$

t^3	$+t^2$	$+t$	t	$+1$
$-t^3$	$-t^2$		t^2	1
$\neq$	$\neq$	t		
		$-t$		-1
		$\neq$		-1

$$\begin{aligned}
 \int x \sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t \cdot dt = 2 \int (t^2 - 1) \cdot t^2 \cdot dt = 2 \int (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C = \\
 &= 2 \left[\frac{\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} \right] = 2 \left[\frac{(x+1)^2 \sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1) \sqrt{x+1}}{3} \right] + C = \\
 &= 2(x+1) \sqrt{x+1} \left(\frac{x+1}{5} - \frac{1}{3} \right) + C = 2(x+1) \sqrt{x+1} \left(\frac{3x+3-5}{15} \right) + C = \frac{2}{15} (x+1)(3x+2) \sqrt{x+1} + C
 \end{aligned}$$

Ho posto: $x + 1 = t^2$ ottenendo: $dx = 2t \cdot dt$ $t = \sqrt{x+1}$

$$\begin{aligned}
 (8) \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx &= -2 \int \frac{(1+t^3)^2}{16t^6} \cdot t \cdot \frac{12t^2}{(1+t^3)^2} \cdot dt = -\frac{3}{2} \int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{t^2} + C = \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2}} + C = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C
 \end{aligned}$$

Ho posto: $\frac{2-x}{2+x} = t^3$ ottenendo: $2 - x = 2t^3 + xt^3$, $x + xt^3 = 2 - 2t^3$

$$x = \frac{2 - 2t^3}{1 + t^3} = \frac{2(1 - t^3)}{1 + t^3}, dx = 2 \cdot \frac{-3t^2(1 + t^3) - 3t^2(1 - t^3)}{(1 + t^3)^2}, dx = \frac{-12t^2}{(1 + t^3)^2} dt$$

$$2 - x = 2 - \frac{2 - 2t^3}{1 + t^3} = \frac{2 + 2t^3 - 2 + 2t^3}{1 + t^3}, 2 - x = \frac{4t^3}{1 + t^3}, (2 - x)^2 = \frac{16t^6}{(1 + t^3)^2}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}}, t^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)^2}$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} dx = \int t \cdot \frac{-6t}{(t^2 - 1)^2} \cdot dt = -6 \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt = -6 \int \frac{t^2}{(t+1)^2(t-1)^2} dt =$$

$$= \frac{At + B}{(t+1)(t-1)} + C \cdot \ln|t+1| + D \cdot \ln|t-1| + K =$$

$$= \frac{3t}{(t+1)(t-1)} + \frac{3}{2} \cdot \ln|t+1| - \frac{3}{2} \cdot \ln|t-1| + K =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}{\frac{x+1}{x-2} - 1} + \frac{3}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 1\right) - \frac{3}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} - 1\right) + K =$$

$$= \sqrt{(x+1)(x-2)} + \frac{3}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 1\right) - \frac{3}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} - 1\right) + K$$

$$\frac{-6t^2}{(t+1)^2(t-1)^2} = \frac{A(t^2 - 1) - 2t(At + B)}{(t+1)^2(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1}$$

$$-6t^2 = At^2 - A - 2At^2 - 2Bt + C(t-1)(t^2 - 1) + D(t+1)(t^2 - 1)$$

$$-6t^2 = At^2 - A - 2At^2 - 2Bt + Ct^3 - Ct - Ct^2 + C + Dt^3 - Dt + Dt^2 - D$$

$$-6t^2 = (C + D)t^3 + (-A - C + D)t^2 + (-C - D - 2B)t - A + C - D$$

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ -A - C + D = -6 \\ -C - D - 2B = 0 \\ -A + C - D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C = -D \\ -A + D + D = -6 \\ B = 0 \\ -A - 2D = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -A + 2D = -6 \\ -A - 2D = 0 \\ \hline -2A = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \\ C = \frac{3}{2} \\ D = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ho posto: } \frac{x+1}{x-2} = t^2 \text{ ottenendo: } x+1 = (x-2)t^2, x+1 = x^2 - 2t^2$$

$$x + 1 = xt^2 - 2t^2, x = \frac{1 + 2t^2}{t^2 - 1}, t = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}, dx = \frac{4t(t^2 - 1) - 2t(1 + 2t^2)}{(t^2 - 1)^2} dt$$

$$dx = \frac{4t^3 - 4t - 2t - 4t^3}{(t^2 - 1)^2} dt, dx = \frac{-6t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

L'integrale del tipo $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$ o, più in generale, del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$,

con R funzione razionale delle variabili x ed $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, può essere risolto utilizzando una delle tre seguenti **sostituzioni di Eulero**.

Le tre sostituzioni di Eulero in sintesi

$a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$ oppure $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot (t \pm x)$
$c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t$

Prima sostituzione di Eulero

1° caso $a > 0$ c qualsiasi $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$

L'integrale si risolve utilizzando una delle seguenti sostituzioni:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a} \cdot x & \text{oppure} \\ \sqrt{a} \cdot (t \pm x) & \text{oppure} \\ (x - \alpha)t \end{cases} \quad \text{sostituzione algebrica}$$

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{\Delta} \cdot \sec t = \frac{\sqrt{\Delta}}{\cos t} & \text{oppure} \\ \sqrt{\Delta} \times \operatorname{cosec} t = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin t} \end{cases} \quad \text{sostituzione goniometrica}$$

Seconda sostituzione di Eulero

2° caso $a > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a} \cdot x & \text{oppure} \\ \sqrt{a} \cdot (t \pm x) & \text{oppure} \\ tx \pm \sqrt{c} & \text{se } c > 0 \end{cases} \quad \text{sostituzione algebrica}$$

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{-\Delta} \cdot \operatorname{tg} t & \text{oppure} \\ \sqrt{-\Delta} \cdot \operatorname{cotg} t \end{cases} \quad \text{sostituzione goniometrica}$$

Terza sostituzione di Eulero

$$3^\circ \text{ caso} \quad a < 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} (x - \alpha)t & \text{oppure} \\ (\beta - x)t \end{cases} \quad \text{sostituzione algebrica}$$

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{\Delta} \times \sin t & \text{oppure} \\ \sqrt{\Delta} \times \cos t \end{cases} \quad \text{sostituzione goniometrica}$$

Prima sostituzione di Eulero

Vediamo come si procede con la sostituzione $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot (t - x)$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo: $ax^2 + bx + c = at^2 + ax^2 - 2atx$

$$x = \frac{at^2 - c}{2at + b} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot \frac{at^2 + bt + c}{2at + b}$$

$$dx = \frac{2at(2ab + b) - 2a(at^2 - c)}{(2at + b)^2} dt = \frac{4a^2t^2 + 2ab t - 2a^2t^2 + 2ac}{(2at + b)^2} dt$$

$$dx = \frac{2a^2t^2 + 2abt + 2ac}{(2at + b)^2} dt \quad t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

Dopo la sostituzione e le opportune semplificazioni otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta.

Si pone $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$ (oppure $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot (t \pm x)$) si ottiene:

Analizziamo la seguente sostituzione: $\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a} \cdot x}$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a} \cdot tx + t^2 \quad x = \frac{c - t^2}{2\sqrt{a} \cdot t - b} \quad t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a} \cdot x$$

$$dx = \frac{2(-\sqrt{a} \cdot t^2 + bt - c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a} \cdot t - b)^2}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a} \cdot \frac{c - t^2}{2\sqrt{a} \cdot t - b} = \frac{\sqrt{a} \cdot t^2 - bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a} \cdot t - b}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx = 2 \int \frac{1}{t^2 - 4} dt = A \cdot \ln(t - 2) + B \cdot \ln(t + 2) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(t - 2) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t + 2) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{t - 2}{t + 2} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 2} + C$$

Ho posto : $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - x \quad x = \frac{t^2 - 4}{2t + 2}$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - \frac{t^2 - 4}{2t + 2} = \frac{t^2 + 2t + 4}{2t + 2} \quad dx = \frac{t^2 + 2t + 4}{2(t + 1)^2} dt$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} = x + t = \frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)}$$

$$\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} \cdot dx = \int \frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)} \cdot \frac{-(t^2 + 2t - 1)}{2(t + 1)^2} \cdot dt = -\frac{1}{4} \int \frac{(t^2 + 2t - 1)^2}{(t + 1)^3} dt =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{[(t + 1)^2 - 2]^2}{(t + 1)^3} dt = -\frac{1}{4} \int (t + 1) dt + \int \frac{dt}{t + 1} - \int \frac{dt}{(t + 1)^3} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t^2 + t \right) + \ln|t + 1| + \frac{1}{2(t + 1)^2} + C - \frac{1}{8} =$$

$$= -\frac{1}{8} (t + 1)^2 + \frac{1}{2(t + 1)^2} + \ln|t + 1| + K =$$

$$= -\frac{1}{8} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - x + 1 \right)^2 + \ln \left| \sqrt{x^2 - 2x - 1} - x + 1 \right| + \frac{1}{2 \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - x + 1 \right)^2} + K$$

Ho posto: $\sqrt{x^2 - 2x - 1} = x + t$ ottenendo: (**)

$$x = -\frac{t^2 + 1}{2(t + 1)} \quad dx = -\frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)^2} dt \quad t = \sqrt{x^2 - 2x - 1} - x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} = x + t = \frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)}$$

Seconda sostituzione di Eulero

Si pone: $\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}}$ si ottiene: $ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2\sqrt{c} \cdot xt + c$ se

consideriamo la sostituzione: $\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}}$ Essendo $x \neq 0$ possiamo scrivere:

$$x = \frac{2\sqrt{c} \cdot t - b}{a - t^2} \quad dx = \frac{2(\sqrt{c} \cdot t^2 - bt + a\sqrt{c})}{(a - t^2)^2} \quad t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2\sqrt{c} \cdot t - b}{a - t^2} \cdot t + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c} \cdot t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= \int \frac{2(1+t)(t^2 + 2t + 2)}{2(t^2 + 4t + 4)(1+t)^2} dt = \int \frac{(t^2 + 2t + 2)}{(t+2)^2(1+t)} dt = \\ &= \int \frac{dt}{t+1} - 2 \int \frac{dt}{(t+2)^3} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C = \\ &= \ln|x+1 + x^2 + 2x + 2| + \frac{2}{x+2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C \end{aligned}$$

Essendo $a = 1 > 0$ possiamo effettuare la **prima sostituzione di Eulero**:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x$$

Elevando al quadrato ambo i membri di questa uguaglianza e semplificando i termini simili

otteniamo: $2x + 2tx = t^2 - 2$ ed anche: $x = \frac{t^2 - 2}{2(1+t)}$, $dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1+t)^2} dt$

$$t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad , \quad 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - \frac{t^2 - 2}{2(1+t)} = \frac{t^2 + 4t + 4}{2(1+t)}$$

Sostituendo nell'integrale proposto otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta che abbiamo risolto.

$$\begin{aligned} (&*) \quad \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x - 1}} = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t-1)(t+1)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - 3 \int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \\ &= 2 \ln|t| - \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{3}{2} \ln|t+1| + \frac{3}{t+1} + C \quad \text{dove } t = \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} + 1}{x} \end{aligned}$$

(*) Maron pag. 222

(&*) Maron pag. 223

Essendo $c = 1 > 0$ possiamo applicare la **seconda sostituzione di Eulero**:

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = tx - 1 \quad x^2 - x - 1 = t^2 x^2 - 2tx + 1$$

$$(2t - 1)x = (t^2 - 1)x^2, \quad x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}, \quad t = \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} + 1}{x}$$

$$dx = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2} dt \quad x + \sqrt{x^2 - x - 1} = \frac{t}{t - 1}$$

Terza sostituzione di Eulero

3° caso $a < 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \sqrt{|a|(x - \alpha)(\beta - x)}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \sqrt{|a|(x - \alpha)(\beta - x)} \quad \text{sostituzione algebrica}$$

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{\Delta} \cdot \sin t & \text{oppure} \\ \sqrt{\Delta} \cdot \cos t \end{cases} \quad \text{sostituzione goniometrica}$$

$\Delta > 0$ (ciò è sicuramente vero se a e c hanno segni discordi)

Se α è uno dei due zeri del trinomio $ax^2 + bx + c$ risulta $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

La razionalizzazione avviene attraverso la sostituzione:

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t}$$

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 t^2, \quad t = \sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}, \quad x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}, \quad dx = \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(a - t^2)^2} dt$$

$$\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2} - \alpha \right) \cdot t = \frac{a(\beta - \alpha)t}{a - t^2}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx &= \int \frac{t^2 + 1}{4t} \cdot \frac{-8t}{(t^2 + 1)^2} \cdot dt = -2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= -2 \arctg t + C = -2 \arctg \sqrt{\frac{1 - x}{x + 3}} + C \end{aligned}$$

Pongo: $\sqrt{-x^2 - 2x + 3} = \sqrt{(1 - x)(x + 3)} = (x + 3)t$ Ottengo:

$$(1 - x)(x + 3) = (x + 3)^2 t^2 \quad (1 - x) = (x + 3)t^2 \quad x = \frac{1 - 3t^2}{t^2 + 1} \quad dx = \frac{-8t}{(t^2 + 1)^2} dt$$

$$\sqrt{-x^2 - 2x + 3} = (x + 3)t = \left(\frac{1 - 3t^2}{t^2 + 1} + 3 \right) t = \frac{4t}{t^2 + 1} \quad t = \sqrt{\frac{1 - x}{x + 3}}$$

Altra sostituzione goniometrica

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} \cdot 2\cos t \cdot dt =$$

$$= \int \frac{2\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t}} \cdot dt = \int dt = t + C = \arcsin \frac{x+1}{2} + C$$

Pongo: $x + 1 = 2\sin t$ ottengo: $dx = 2\cos t \cdot dt$ $\sin t = \frac{x+1}{2}$ $t = \arcsin \frac{x+1}{2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{2}{a - t^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{a}}{t + \sqrt{a}} \right| + C$$

Pongo: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \beta)t = \frac{a(\beta - \alpha)t}{t^2 - a}$ Ottengo:

$$\frac{a(x - \alpha)}{x - \beta} = t^2 \quad t = \sqrt{\frac{a(x - \alpha)}{x - \beta}} \quad x = \frac{a\alpha - \beta t^2}{a - t^2} \quad dx = \frac{2a(\alpha - \beta)t}{(a - t^2)^2} dt$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2} - \alpha \right) \cdot t = \frac{a(\beta - \alpha)t}{a - t^2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 - 3x - 1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{(4x + 1)(x - 1)}} dx = -2 \int \frac{t^2 + 1}{(t^2 - 4)^2} dt =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{t}{t^2 - 4} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{t - 2}{t + 2} + K = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{4x+1}{x-1} - 4} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} - 2}{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} + 2} + K =$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{5}{x-1}} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} - 2 \right)^2}{\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} + 2 \right) \left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}} - 2 \right)} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(4x + 1)(x - 1)} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{\frac{4x+1}{x-1} + 4 - 4\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{4x+1}{x-1} - 4} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{\frac{8x-1}{x-1} - 4\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{5}{x-1}} + K =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{8x - 1 - 4\sqrt{(4x + 1)(x - 1)}}{\frac{x - 1}{5}} + K = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{8x - 1 - 4\sqrt{4x^3 - 3x - 1}}{5} + K = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln(8x - 1 - 4\sqrt{4x^3 - 3x - 1}) + \frac{3}{16} \ln 5 + K = \\
&= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln(8x - 1 - 4\sqrt{4x^3 - 3x - 1}) + C
\end{aligned}$$

Ho posto $\sqrt{(4x + 1)(x - 1)} = (x - 1)t = \frac{5t}{t^2 - 4}$ ottenendo: $4x + 1 = (x - 1)t^2$

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 4} \quad dx = \frac{-10t dt}{(t^2 - 4)^2} \quad t = \sqrt{\frac{4x - 1}{x - 1}}$$

Le tre sostituzioni di Eulero in sintesi

$a > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a} \cdot x$ oppure $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot (t \pm x)$
$c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t$

Gli integrali del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ possono essere calcolati trasformando il trinomio $ax^2 + bx + c$ nella somma o nella differenza di due quadrati. Così facendo si ottengono integrali del tipo sotto indicato, da calcolare mediante le sostituzioni proposte a fianco:

- $\int R(z, \sqrt{m^2 - z^2}) dz$ $z = m \cdot \sin t$ oppure $z = m \cdot \cos t$ $z = m \cdot \operatorname{tg} t$
- $\int R(z, \sqrt{m^2 + z^2}) dz$ $z = m \cdot \operatorname{tg} t$ oppure $z = m \cdot \operatorname{cotg} t$ oppure $z = m \cdot \operatorname{sh} t$
- $\int R(z, \sqrt{z^2 - m^2}) dz$ $z = m \cdot \operatorname{sect}$ oppure $z = m \cdot \operatorname{cosect}$ oppure $z = m \cdot \operatorname{cht}$

Calcolo dettagliato di un integrale del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Adesso affrontiamo nei minimi particolari i vari casi che si possono presentare.

1° caso $a > 0$ c qualsiasi $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$

L'integrale si risolve utilizzando una delle seguenti sostituzioni:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a} \cdot x & \text{oppure} \\ \sqrt{a} \cdot (t \pm x) & \text{oppure} \\ (x - \alpha)t & \end{cases} \quad \text{sostituzione algebrica}$$

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{\Delta} \cdot \sec t = \frac{\sqrt{\Delta}}{\cos t} & \text{oppure} \\ \sqrt{\Delta} \times \operatorname{cosec} t = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin t} & \end{cases} \quad \text{sostituzione goniometrica}$$

Dopo la sostituzione goniometrica e le opportune semplificazioni otteniamo un integrale del tipo :

$$\int R(\sin t, \cos t) dt$$

dove **R** è una funzione razionale intera o fratta delle variabili $\sin t$, $\cos t$.

Vediamo come si procede con la sostituzione $\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot (t - x)}$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo: $ax^2 + bx + c = at^2 + ax^2 - 2atx$

$$\boxed{x = \frac{at^2 - c}{2at + b}} \quad \boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \cdot \frac{at^2 + bt + c}{2at + b}}$$

$$dx = \frac{2at(2ab + b) - 2a(at^2 - c)}{(2at + b)^2} dt = \frac{4a^2t^2 + 2abt - 2a^2t^2 + 2ac}{(2at + b)^2} dt$$

$$\boxed{dx = \frac{2a^2t^2 + 2abt + 2ac}{(2at + b)^2} dt} \quad \boxed{t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}$$

Dopo la sostituzione e le opportune semplificazioni otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta.

$$\boxed{\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx} = 2 \int \frac{1}{t^2 - 4} dt = A \cdot \ln(t - 2) + B \cdot \ln(t + 2) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(t - 2) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t + 2) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{t - 2}{t + 2} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 2} + C$$

Ho posto : $\boxed{\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - x}$ ottenendo : $\boxed{x = \frac{t^2 - 4}{2t + 2}}$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - \frac{t^2 - 4}{2t + 2} = \frac{t^2 + 2t + 4}{2t + 2} \quad dx = \frac{t^2 + 2t + 4}{2(t + 1)^2} dt$$

2° caso $a > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Il trinomio $ax^2 + bx + c$ non è decomponibile in fattori di primo grado aventi coefficienti reali e le precedenti sostituzioni si riducono alle seguenti sostituzioni:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a} \cdot x & \text{oppure} \\ \sqrt{a} \cdot (t \pm x) & \text{oppure} \\ tx \pm \sqrt{c} & \text{se } c > 0 \end{cases} \quad \text{sostituzione algebrica}$$

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{-\Delta} \cdot \operatorname{tg} t & \text{oppure} \\ \sqrt{-\Delta} \cdot \operatorname{cotg} t \end{cases} \quad \text{sostituzione goniometrica}$$

$$(*) \quad \boxed{\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}} = \int \frac{2(1+t)(t^2 + 2t + 2)}{2(t^2 + 4t + 4)(1+t)^2} dt = \int \frac{(t^2 + 2t + 2)}{(t+2)^2(1+t)} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} - 2 \int \frac{dt}{(t+2)^3} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C =$$

$$= \ln|x+1 + x^2 + 2x + 2| + \frac{2}{x+2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C$$

Essendo $a = 1 > 0$ possiamo effettuare la **prima sostituzione di Eulero** : $\boxed{\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x}$

(*) Maron pag. 222

Elevando al quadrato ambo i membri di questa uguaglianza e semplificando i termini simili

otteniamo: $2x + 2tx = t^2 - 2$ ed anche: $x = \frac{t^2 - 2}{2(1 + t)}$, $dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1 + t)^2} dt$

$$t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad , \quad 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - \frac{t^2 - 2}{2(1 + t)} = \frac{t^2 + 4t + 4}{2(1 + t)}$$

Sostituendo nell'integrale proposto otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta che abbiamo risolto .

3° caso $a < 0$ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \sqrt{|a|(x - \alpha)(\beta - x)}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} (x - \alpha)t \\ (\beta - x)t \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \text{sostituzione algebrica}$$

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b = \begin{cases} \sqrt{\Delta} \times \sin t \\ \sqrt{\Delta} \times \cos t \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \text{sostituzione goniometrica}$$

4° caso $a < 0$ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso il calcolo dell'integrale non può essere effettuato nel campo reale.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx} = \int \frac{t^2 + 1}{4t} \cdot \frac{-8t}{(t^2 + 1)^2} \cdot dt = -2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt =$$

$$= -2 \operatorname{arctg} t + C = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{x + 3}} + C$$

Pongo : $\boxed{\sqrt{-x^2 - 2x + 3} = \sqrt{(1 - x)(x + 3)} = (x + 3)t}$ Ottengo :

$$(1 - x)(x + 3) = (x + 3)^2 t^2 \quad , \quad (1 - x) = (x + 3)t^2 \quad , \quad x = \frac{1 - 3t^2}{t^2 + 1} \quad , \quad dx = \frac{-8t}{(t^2 + 1)^2} dt$$

$$\sqrt{-x^2 - 2x + 3} = (x + 3)t = \left(\frac{1 - 3t^2}{t^2 + 1} + 3 \right) t = \frac{4t}{t^2 + 1}$$

Altra sostituzione goniometrica

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} dx} = \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} \cdot 2 \cos t \cdot dt =$$

$$= \int \frac{2 \cos t}{\sqrt{4 \cos^2 t}} \cdot dt = \int dt = t + C = \arcsin \frac{x + 1}{2} + C$$

Pongo : $x + 1 = 2 \sin t$ ottengo : $dx = 2 \cos t \cdot dt$, $\sin t = \frac{x + 1}{2}$, $t = \arcsin \frac{x + 1}{2}$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx} = \int \frac{2}{a - t^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{a}}{t + \sqrt{a}} \right| + C$$

Pongo: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \beta)t = \frac{a(\beta - \alpha)t}{t^2 - a}$ Ottengo :

$$\frac{a(x - \alpha)}{x - \beta} = t^2 \quad t = \sqrt{\frac{a(x - \alpha)}{x - \beta}} \quad x = \frac{a\alpha - \beta t^2}{a - t^2} \quad dx = \frac{2a(\alpha - \beta)t}{(a - t^2)^2} dt$$

4° caso

$$a < 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

In questo caso il calcolo dell'integrale non può essere effettuato nel campo reale.

- Gli integrali del tipo $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}; \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}-\mathbf{x}}}\right) d\mathbf{x}$

si possono risolvere utilizzando la sostituzione :

$$x = a \cdot \sin^2 t \quad , \quad \sin t = \sqrt{\frac{x}{a}} \quad , \quad t = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} \quad , \quad dx = 2a \cdot \sin t \cdot \cos t \cdot dt$$

$$\sqrt{\frac{x}{a - x}} = \sqrt{\frac{a \cdot \sin^2 t}{a - a \cdot \sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$$

- Gli integrali del tipo $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}; \sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{x}^2}\right) d\mathbf{x}$ si possono risolvere utilizzando la seguente sostituzione:

$$x = a \cdot \sin t \quad , \quad t = \arcsin \frac{x}{a} \quad , \quad a^2 - x^2 = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2 \cdot \cos^2 t \quad , \quad dx = a \cdot \cos t \cdot dt$$

- Supponiamo di volere calcolare il seguente integrale: $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}; \sqrt{\mathbf{a}\mathbf{x}^2 + \mathbf{b}\mathbf{x} + \mathbf{c}}\right) d\mathbf{x}$ quando il radicale

$\sqrt{\mathbf{a}\mathbf{x}^2 + \mathbf{b}\mathbf{x} + \mathbf{c}}$ è presente solo nel numeratore .. Per ottenere un integrale di funzione razionale più semplice di quello che si ottiene applicando una delle sostituzioni che conosciamo, occorre procedere come segue.

- si calcola l'integrale utilizzando l'integrazione per parti e scegliendo come fattore differenziale dx

□ attraverso un opportuno artificio si sdoppia l'integrale trovato nella somma di altri due integrali che contengono il radicale $\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Uno di essi è lo stesso integrale di partenza preceduto dal segno meno, cioè $-\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ e l'altro è un integrale che contiene $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ al denominatore.

• Si porta al primo membro $-\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ e si risolve rispetto

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

• l'integrale che figura al secondo membro va risolto con una delle solite sostituzioni col vantaggio di avere un integrale di funzione razionale fratta più semplice

• L'opportunità dell'artificio è dovuto alla circostanza che il radicale $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ non figura al denominatore

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx} = \int \frac{2t}{t^2 + 3} \cdot \frac{t^2 + 3}{2t^2} \cdot dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + k = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) + k$$

$$\text{Pongo: } \sqrt{x^2 + 3} = t - x = t - \frac{t^2 - 3}{2t} = \frac{t^2 + 3}{2t} \quad \text{Ottengo: } t = x + \sqrt{x^2 + 3}$$

$$x^2 + 3 = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2 - 3}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + 3}{2t^2} dt$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2 + 3} dx} = x\sqrt{x^2 + 3} - \int x d\sqrt{x^2 + 3} = x\sqrt{x^2 + 3} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + 3} - \int \frac{x + 3 - 3}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = x\sqrt{x^2 + 3} - \int \sqrt{x^2 + 3} dx + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx =$$

$$2 \int \sqrt{x^2 + 3} dx = x\sqrt{x^2 + 3} + 3 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2 + 3} dx} = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + 3} + \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} dx = \boxed{\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + 3} + \frac{3}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) + C}$$

Altri esempi

$$^{(1)} \boxed{\int \sqrt{2 + x^2} \cdot dx} = \int \frac{t^2 + 2}{2t} \cdot \frac{t^2 + 2}{2t^2} dt = \int \frac{(t^2 + 2)^2}{4t^3} dt = \int \left(\frac{1}{4}t + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt =$$

⁽¹⁾ Dodero

$$= \frac{1}{8}t^2 + \ln|t| - \frac{1}{2t^2} + K = \frac{1}{8}(x + \sqrt{2+x^2}) + \ln|x + \sqrt{2+x^2}| - \frac{1}{2(x + \sqrt{2+x^2})} + K$$

Poniamo: $\boxed{\sqrt{2+x^2} = t - x}$ otteniamo: $2 + x^2 = t^2 + x^2 - 2tx$, $x = \frac{t^2 - 2}{2t}$

$$dx = \frac{t^2 + 2}{2t^2}, \quad \sqrt{2+x^2} = t - \frac{t^2 - 2}{2t} = \frac{t^2 + 2}{2t}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 4}} &= 2 \int \frac{dt}{t^2 - 4} = A \cdot \ln|t - 2| + B \cdot \ln|t + 2| + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln|t - 2| - \frac{1}{2} \cdot \ln|t + 2| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{t - 2}{t + 2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 2} \right| + C \end{aligned}$$

Ho posto: $\boxed{\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - x}$ ottenendo:

$$x = \frac{t^2 - 4}{2t + 2} \quad \sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - x = \frac{t^2 + 2t + 4}{2(t + 1)} \quad dx = \frac{t^2 + 2t + 4}{2(t + 1)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + x}} &= 2 \int \frac{dt}{(t + 1)(t^2 + 1)} = \ln|t + 1| - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \ln \left(\sqrt{\frac{x}{2-x}} + 1 \right) + -\ln|2 - x| + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{x}{2-x}} + 1 \right) + C \end{aligned}$$

Ho posto: $\boxed{\sqrt{-x^2 + 2x} = (2 - x)t}$ ottenendo:

$$x = \frac{2t^2}{1 + t^2} \quad dx = \frac{4t}{(1 + t^2)^2} dt \quad \sqrt{-x^2 + 2x} = (2 - x)t = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}} = \int dt = t + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

Ho posto: $\boxed{\sqrt{1 - x^2} = (1 - x)t}$ ottenendo:

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \quad dx = \frac{4t}{(1 + t^2)^2} dt \quad \sqrt{1 - x^2} = (1 - x)t = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
(*) \quad \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= \int \frac{2(1+t)(t^2 + 2t + 2)}{2(t^2 + 4t + 4)(1+t)^2} dt = \int \frac{(t^2 + 2t + 2)}{(t+2)^2(1+t)} dt = \\
&= \int \frac{dt}{t+1} - 2 \int \frac{dt}{(t+2)^3} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C = \\
&= \ln|x+1+x^2+2x+2| + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C
\end{aligned}$$

Essendo $a = 1 > 0$ possiamo effettuare la **prima sostituzione di Eulero**: $\boxed{\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x}$

Elevando al quadrato ambo i membri di questa uguaglianza e semplificando i termini simili

otteniamo: $2x + 2tx = t^2 - 2$ ed anche: $x = \frac{t^2 - 2}{2(1+t)}$, $dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1+t)^2} dt$

$$t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad , \quad 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - \frac{t^2 - 2}{2(1+t)} = \frac{t^2 + 4t + 4}{2(1+t)}$$

Sostituendo nell'integrale proposto otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta che abbiamo risolto .

$$(**) \quad \int \frac{x}{\sqrt{(-x^2 + 7x - 10)^2}} = -\frac{6}{27} \int \frac{5 + 2t^2}{t^2} dt = -\frac{2}{9} \int \left(\frac{5}{t^2} + 2 \right) dt = -\frac{2}{9} \left(-\frac{5}{t} + 2t \right) + C$$

$$\text{dove } t = \frac{\sqrt{(-x^2 + 7x - 10)^2}}{x - 2}$$

In questo caso risulta $a = -1 < 0$, $c = -10 < 0$; per questo motivo non possiamo applicare né la prima né la seconda sostituzione di Eulero . Ma il trinomio ha due zeri reali $\alpha = 2$, $\beta = 5$ e quindi è lecita la **terza sostituzione di Eulero**:

$$\sqrt{-x^2 + 7x - 10} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t$$

$$5 - x = (x-2)^2 \quad x = \frac{5 + 2t^2}{1 + t^2} \quad dx = \frac{-6tdt}{(1+t^2)^3} \quad (x-2)t = \left(\frac{5 + 2t^2}{1 + t^2} - 2 \right) t = \frac{3t}{1 + t^2}$$

(*) Maron pag. 222

(**) Maron pag. 224