APPLICAZIONI (Integrali di riferimento)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + K$$

Prima risoluzione

Pongo: $\sqrt{x^2+a^2} = t - x$ ottengo: $x^2 + a^2 = t^2 - 2tx + x^2$, cioè: $x = \frac{t^2 - a^2}{2t}$

$dx = \frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$ $\quad t = x + \sqrt{a^2+x^2} \qquad \sqrt{a^2+x^2} = t - x = t - \frac{t^2-a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{2t}{t^2+a^2}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}\cdot dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + k = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + K$$

Seconda risoluzione

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot dx =$$

$$= \int \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot dx = \int \frac{d\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + K$$

Terza risoluzione

Si pone $\sqrt{x^2+a^2} = t + x$ si ottiene: $x^2 + a^2 = t^2 + 2tx + x^2$, cioè: $x = \frac{a^2 - t^2}{2t}$

$dx = -\frac{a^2+t^2}{2t^2}dt$ $\quad t = \sqrt{a^2+x^2} - x$ [(*)] $\sqrt{a^2+x^2} = t + x = t + \frac{a^2-t^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = -\int \frac{2t}{t^2+a^2}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}\cdot dt = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + k = -\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}-x\right| + k =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + K \qquad -\ln t = \ln\frac{1}{t}$$

$$-\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}-x\right| = -\ln\left|\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}+x}\right| = -\ln\left|\left(\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}+x}\right)\right| =$$

$$= -2\ln a + \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right| = \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right| + \text{costante}$$

(*) Vedere Lupo Analisi matematica pag. 349

Con lo stesso procedimento di prima si dimostra che:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + K = -\ln\left| \sqrt{x^2 - a^2} - x \right| + k$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \underline{dx} = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln\left| \sqrt{x^2 + a^2} \right| + k$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \underline{dx} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x\, d\sqrt{x^2 + a^2} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx + a^2 \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|$$

$$2\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|$$

Alla stessa maniera si calcola: $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + k$

Prima risoluzione

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx = \int \frac{d\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + K$$

Seconda risoluzione

Pongo: $\sqrt{x^2 - a^2} = t - x$ ottengo: $x^2 - a^2 = t^2 - 2tx + x^2$, cioè: $x = \frac{t^2 + a^2}{2t}$

$dx = \frac{t^2 - a^2}{2t^2} dt \quad t = x + \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = t - x = t - \frac{t^2 + a^2}{2t} = \frac{t^2 - a^2}{2t}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{\cancel{2}t}{\cancel{t^2 - a^2}} \cdot \frac{\cancel{t^2 - a^2}}{\cancel{2}t^2} \cdot dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + k = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + K$$

Terza risoluzione

Si pone $\sqrt{x^2 - a^2} = t + x$ si ottiene: $\cancel{x^2} - a^2 = t^2 + 2tx + \cancel{x^2}$, cioè: $x = \frac{-a^2 - t^2}{2t}$

$$\mathbf{dx = \frac{a^2 - t^2}{2t^2}dt} \qquad t=\sqrt{a^2-x^2}-x \qquad ^{(*)} \quad \sqrt{a^2 - x^2} = t + x = t + \frac{-a^2 - t^2}{2t} = \frac{t^2 - a^2}{2t}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=-\int \frac{2t}{\cancel{t^2-a^2}}\cdot\frac{\cancel{t^2-a^2}}{2t^2}\cdot dt=-\int \frac{1}{t}dt=-\ln|t|+k=-\ln\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right|+k =$$

$$= \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + K \quad \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+K \qquad -\ln t=\ln\frac{1}{t}$$

$$-\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}-x\right|=-\ln\left|\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right|=-\ln\left|\left(\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right)\right|=$$

$$=2\ln a+\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}-x\right|=\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}-x\right|+\text{costante}$$

$$\mathbf{\int \sqrt{x^2 + a^2}\cdot \underline{dx}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + k}$$

Prima risoluzione

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\cdot \underline{dx} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x\,d\sqrt{x^2 + a^2}=x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx=x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx + a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$$

$$2\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|$$

Alla stessa maniera si calcola: $\mathbf{\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + k}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\cdot \underline{dx} = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int x\,d\sqrt{x^2 - a^2}=x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx=x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx + a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$$

$$2\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = x\sqrt{x^2 - a^2} + a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$$

(*) Vedere Lupo Analisi matematica   pag. 349

Seconda risoluzione

Pongo: $\sqrt{x^2+a^2}=t-x$ ottengo: $\cancel{x^2}+a^2=t^2+\cancel{x^2}-2tx$ $\quad 2tx=t^2-a^2$ $\quad x=\frac{t^2-a^2}{2t}$ $\quad t=x+\sqrt{x^2+a^2}$

$dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\cdot dt$ $\quad \sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}$ $\quad \sqrt{x^2+a^2}=\frac{t^2+a^2}{2t}$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\cdot dx=\int\frac{t^2+a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}\cdot dt=\frac{1}{4}\int\frac{t^4+2a^2t^2+a^4}{t^3}=\frac{1}{4}\int\left(t+2a^2\cdot\frac{1}{t}+a^4\cdot\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\cdot dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2+2a^2\ln|t|-\frac{a^4}{2t^2}\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+k$$

$$t^2-\frac{a^4}{t^2}=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$t^2-\frac{a^4}{t^2}=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4\left(2x^2+a^2-2x\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\left(2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}\right)\left(2x^2+a^2-2x\sqrt{x^2+a^2}\right)}$$

$$t^2-\frac{a^4}{t^2}=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4\left(2x^2+a^2-2x\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\cancel{4x^2}+a^4-\cancel{4a^2x^2}-\cancel{4a^2x^2}-\cancel{4x^2}}$$

$$t^2-\frac{a^4}{t^2}=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{\cancel{a^4}\left(2x^2+a^2-2x\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\cancel{a^4}}$$

$$t^2-\frac{a^4}{t^2}=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-2x^2-a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}=4x\sqrt{x^2+a^2}$$ oppure:

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{t^4-a^4}{t^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{t^2-a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{t}=\frac{1}{4}x\cdot\frac{2x^2+2a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{2}x\cdot\frac{x^2+a^2+x\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{x^2+a^2+x\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}-x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}=\frac{1}{2}x\cdot\frac{\cancel{x^2\sqrt{x^2+a^2}}-\cancel{x^3}+a^2\sqrt{x^2+a^2}-\cancel{a^2x}+\cancel{x^3}+\cancel{a^2x}-\cancel{x^2\sqrt{x^2+a^2}}}{\cancel{x^2}+a^2-\cancel{x^2}}$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{t^4-a^4}{t^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}$$

Terza risoluzione

Pongo: $x=a\cdot\operatorname{tg}t$ $\quad \operatorname{tg}t=\frac{x}{a}$ $\quad$ Ottengo: $dx=a\left(1+\operatorname{tg}^2t\right)\cdot dt=\frac{a}{\cos^2t}\cdot dt$

$x^2+a^2=a^2\cdot\frac{\sin^2t}{\cos^2t}+a^2=\frac{a^2}{\cos^2t}$ $\quad \sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t}$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\cdot dx=\int\frac{a}{\cos t}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\cdot dt=\int\frac{a^2}{\cos^3 t}dt=\int\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,t=a^2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}-a^2\int\mathrm{tg}\,t\,\mathrm{d}\frac{1}{\cos t}$$

$$\int\frac{a^2}{\cos^3 t}dt=a^2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}-a^2\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=a^2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}-a^2\int\frac{1\text{-}\cos^2 t}{\cos^3 t}dt=a^2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\int\frac{a^2}{\cos^3 t}dt+\int\frac{a^2}{\cos t}dt$$

$$2\int\frac{a^2}{\cos^3 t}dt=a^2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\int\frac{a^2}{\cos t}dt$$

$$\int\frac{a^2}{\cos^3 t}dt=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\frac{tg\,t}{\cancel{\sqrt{1+tg^2 t}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}\cdot\cancel{\sqrt{1+tg^2 t}}}}+\frac{1}{2}a^2\ln\frac{1+\sin t}{\cos t}=\frac{1}{2}a^2\cdot tg\,t\cdot\sqrt{1+tg^2 t}+\frac{1}{2}a^2\ln\frac{1+\frac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2 t}}}{\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}}}$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\cdot dx=\int\frac{a^2}{\cos^3 t}dt=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}a^2\ln\frac{\frac{tg\,t+\sqrt{1+tg^2 t}}{\cancel{\sqrt{1+tg^2 t}}}}{\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+tg^2 t}}}}=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Dimostriamo che: $\displaystyle \boldsymbol{\int\frac{1}{\cos x}dx=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}=\ln\left|\frac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1\text{-}\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|}$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\cdot dx=\int\frac{1}{\frac{1+\sin x}{\cos x}}\cdot d\frac{1+\sin x}{\cos x}=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}+C$$

Integrazione per sostituzione

Pongo $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\mathrm{t}$ Ottengo: $x=2\cdot\mathrm{arctg}\,t$ $\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\cdot dt$ $\quad \cos t=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cancel{1+t^2}}{1-t^2}\cdot\frac{2}{\cancel{1+t^2}}\cdot dt=\int\frac{2}{1-t^2}\cdot dt=\int\frac{1}{1-t}dt+\int\frac{1}{1+t}dt=-\ln|1-t|+\ln|1+t|+C=\ln\frac{1+t}{1-t}+C$$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right|+C=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}+C$$

$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}\quad\Rightarrow\quad 1=A(1+t)+B(1-t)\quad t=1\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2}\quad t=-1\quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}dx=\int\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\int\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}dx$$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}dtg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

Integrazione per parti

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\underline{dx} = x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\,d\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}+\int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

$$2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int\sqrt{\mathbf{a^2-x^2}}\,\mathbf{dx}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{a^2-x^2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a^2\,arcsin}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}+\mathbf{k}$$

Integrazione per sostituzione

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\cdot dt=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\cdot dt=$$

$$=a^2\int\cos^2 t\cdot dt=a^2\int\frac{1+os\,2t}{2}dt=\frac{1}{2}a^2\left[\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,d(2t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{2}a^2(t+\sin t\cdot\cos t)=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{a^2-x^2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{a^2\,arcsin}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}+\mathbf{k}$$

Pongo : $x=a\cdot\sin t$, $dx=a\cdot\cos t\cdot dt$, $\sin t=\frac{x}{a}$, $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$$\cos t = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - x^2}$$

Le sostituzioni di Eulero, pur avendo una portata generale, spesso conducono a calcoli laboriosi. Questa circostanza ci consiglia, quanto possibile, ad effettuare sostituzioni differenti o individuare procedimenti più semplici. $\boxed{I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx}$

Se non vogliamo utilizzare una delle sostituzioni di Eulero , bisogna operare in modo che il trinomio di secondo grado risulti la somma algebrica di un quadrato perfetto e di un altro termine .

L'algebra elementare ci insegna che un trinomio di secondo grado può essere scritto nella seguente maniera: $\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}}dx$$

Se risulta: $a > 0$ (e $\Delta < 0$ oppure $\Delta > 0$) otteniamo:

$$\boxed{I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}\right| + k}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x + 1)^2 + 4}}d(x + 1) = \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}\right| + K$$

Se risulta $a < 0$ e $\Delta > 0$ allora si procede come segue:

$$ax^2 + bx + c = -a\left[\frac{\Delta}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

$$\boxed{I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\Delta}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right]}}dx = \frac{1}{\sqrt{-a}}arcsin\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} + K}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}arcsin\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + K =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}arcsin(3x - 2) + K$$

$$\boxed{-3x^2+4x-1=-3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)=-3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]=3\left[\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right]}$$

$$\boxed{I=\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}$$

Se non vogliamo utilizzare una delle sostituzioni di Eulero , bisogna operare in modo da fare comparire al numeratore la derivata prima del trinomio di secondo grado che compare come radicando e poi scomporre l'integrale proposto nella somma di die integrali di cui uno è immediato e l'altro assume la forma dell'integrale calcolato precedentemente .

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{m}{2a}\int d\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{d\,x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{m}{2a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int\frac{d\,x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Ricordando che $D(2x^2+8x+1)=4x+8$ possiamo calcolare il seguente integrale :

$$\boxed{\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx}=\int\frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=$$

$$=\frac{5}{4}\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx-13\int\frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{d\,x}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+K$$

L'integrale $\int\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ si risolve utilizzando la seguente sostituzione ;

$mx+n=\frac{1}{t}$	$t=\frac{1}{mx+n}$	$x=\frac{1}{mt}-\frac{n}{m}$	$dx=-\frac{dt}{mt^2}$

$$\boxed{\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx} = \int \frac{dt}{\frac{1}{t}\cdot mt^2\cdot\sqrt{a\left(\frac{1-nt}{mt}\right)^2+b\left(\frac{1-nt}{mt}\right)+c}} = \boxed{-\int \frac{1}{\sqrt{At^2+Bt+C}}dt}$$

$x-1=\frac{1}{t}$	$x=\frac{1}{t}+1$	$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + K = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right| + K$$

$$\boxed{\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx}$$

Se non vogliamo utilizzare una delle sostituzioni di Eulero , bisogna procedere come segue:

$$\boxed{\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \sqrt{a}\int \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}}\,dx}$$

che è del tipo $\int \sqrt{x^2+a^2}\cdot \underline{dx}$ se $\Delta < 0$, del tipo $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ se $\Delta > 0$.

Altra risoluzione

$$I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\cdot \underline{dx} = x\sqrt{ax^2+bx+c} - \int x\cdot\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx =$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} - \int \frac{ax^2+\frac{b}{2}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx =$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} - \int \frac{ax^2+bx+c-\left(\frac{b}{2}x+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx =$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} - \int \sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\frac{b}{2}x+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx =$$

$$2I = x\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\int \frac{ax+\frac{2ac}{b}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx =$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{2ac}{b} - \frac{b}{2}\right)\ln\left|ax+\sqrt{ax^2+bx+c}\right| =$$

$$= x\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{2b\sqrt{a}}\ln\left|ax+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|$$

$$\boxed{\int \sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{4a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{2b\sqrt{a}}\ln\left|ax+\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + K}$$

L'integrale del tipo $\boxed{\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx}$ o , più in generale , del tipo $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ può essere risolto utilizzando una delle tre **sostituzioni di Eulero**.

Prima sostituzione di Eulero: $a > 0$

Si pone $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}\cdot x$ si ottiene:

Analizziamo la seguente sostituzione: $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}\cdot x}$

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\cdot tx+t^2 \qquad x = \frac{c-t^2}{2\sqrt{a}\cdot t-b} \qquad t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}\cdot x$$

$$dx = \frac{2\left(-\sqrt{a}\cdot t^2+bt-c\sqrt{a}\right)}{\left(2\sqrt{a}\cdot t-b\right)^2}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}\cdot\frac{c-t^2}{2\sqrt{a}\cdot t-b} = \frac{\sqrt{a}\cdot t^2-bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\cdot t-b}$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-2x-1}\cdot dx} = \int \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)}\cdot\frac{-\left(t^2+2t-1\right)}{2(t+1)^2}\cdot dt = -\frac{1}{4}\int \frac{\left(t^2+2t-1\right)^2}{(t+1)^3}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\left[(t+1)^2-2\right]^2}{(t+1)^3}dt = -\frac{1}{4}\int (t+1)dt + \int\frac{dt}{t+1} - \int\frac{dt}{(t+1)^3} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2+t\right) + \ln|t+1| + \frac{1}{2(t+1)^2} + C - \frac{1}{8} =$$

$$= -\frac{1}{8}(t+1)^2 + \frac{1}{2(t+1)^2} + \ln|t+1| + K =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2-2x-1} - x + 1\right)^2 + \ln\left|\sqrt{x^2-2x-1} - x + 1\right| + \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2-2x-1} - x + 1\right)^2} + K$$

Ho posto: $\boxed{\sqrt{x^2-2x-1} = x+t}$ ottenendo: (**)

$$x = -\frac{t^2+1}{2(t+1)} \qquad dx = -\frac{t^2+2t-1}{2(t+1)^2}dt \qquad t = \sqrt{x^2-2x-1} - x$$

$$\boxed{\sqrt{x^2-2x-1} = x+t = \frac{t^2+2t-1}{2(t+1)}}$$

Seconda sostituzione di Eulero: $c > 0$

Si pone: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ si ottiene: $ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}\cdot xt + c$ se consideriamo la sostituzione: $\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}}$ Essendo $x \neq 0$ possiamo scrivere :

$$x = \frac{2\sqrt{c}\cdot t - b}{a - t^2} \qquad dx = \frac{2\left(\sqrt{c}\cdot t^2 - bt + a\sqrt{c}\right)}{\left(a-t^2\right)^2} \qquad t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{2\sqrt{c}\cdot t - b}{a-t^2}\cdot t + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}\cdot t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a-t^2}$$

Terza sostituzione di Eulero: $\Delta > 0$ (ciò è sicuramente vero se a e c hanno segni discordi)

Se α è uno dei due zeri del trinomio ax^2+bx+c risulta $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$

La razionalizzazione avviene attraverso la sostituzione:

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-a)t}$$

$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2 \ , \ t = \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}} \ , \ x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a-t^2} \ , \ dx = \frac{2a(\beta-\alpha)t}{\left(a-t^2\right)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \left(\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2} - \alpha\right)\cdot t = \frac{a(\beta-\alpha)t}{a-t^2}$$

(**) Stoka Pipitone pag. 618