L'integrale $\mathcal{J} = \int R\left(x, \sqrt[r]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[s]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \dots\right) dx$ si calcola mediante la seguente

sostituzione: $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^k$ con $k = m.c.m.(r;s)$ $x = \frac{\beta - \delta t^k}{\gamma t^k - \alpha}$ $dx = \frac{k(\alpha\delta - \beta\gamma)\cdot t^{k-1}}{(\gamma t^k - \alpha)}\cdot dt$

$\mathcal{J} = \int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}} \dots\right) dx$ La sostituzione razionalizzante è : $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^s$

$$x = \frac{\beta - \delta t^s}{\gamma t^s - \alpha} \qquad dx = \frac{s(\alpha\delta - \beta\gamma)t^{s-1}}{(\gamma t^s - \alpha)^2} dt$$

## Esempi

$$\int \frac{\sqrt{2+x}}{1+\sqrt{2+x}} dx = \int \frac{t}{1+t}\cdot 2t\cdot dt = 2\int \frac{t^2}{1+t}\cdot dt = 2\int\left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)\cdot dt =$$

$$= t^2 - 2t + 2\ln|1+t| + k = 2 + x - 2\sqrt{2+x} + 2\ln\left(1+\sqrt{2+x}\right) + k$$

Ho posto: $2 + x = t^2$ ottenendo: $dx = 2t\,dt$ , $x = t^2 - 2$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\cdot dt = 2\int (t^2-1)\cdot t^2\cdot dt = 2\int (t^4 - t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C =$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right] = 2\left[\frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{5}\right] + C =$$

$$= 2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{x+1}{5} - \frac{1}{3}\right) + C = 2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{3x+3-5}{15}\right) + C = \frac{2}{15}(x+1)(3x+2)\sqrt{x+1} + C$$

Ho posto: $x + 1 = t^2$ ottenendo: $dx = 2t\cdot dt$ $t = \sqrt{x+1}$

(§) $$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = -2\int \frac{(1+t^3)^2}{16t^6}\cdot t\cdot \frac{12t^2}{(1+t^3)^2}\cdot dt = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^3}dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2} + C =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2}} + C = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$$

Ho posto: $\frac{2-x}{2+x} = t^3$ ottenendo: $2 - x = 2t^3 + xt^3$ , $x + xt^3 = 2 - 2t^3$

(§) Maron pag. 221

$$x = \frac{2 - 2t^3}{1 + t^3} = \frac{2\left(1 - t^3\right)}{1 + t^3}\ ,\ dx = 2\cdot\frac{-3t^2\left(1 + t^3\right) - 3t^2\left(1 - t^3\right)}{\left(1 + t^3\right)^2}\ ,\ dx = \frac{-12t^2}{\left(1 + t^3\right)^2}dt$$

$$2 - x = 2 - \frac{2 - 2t^3}{1 + t^3} = \frac{2 + 2t^3 - 2 + 2t^3}{1 + t^3}\ ,\ 2 - x = \frac{4t^3}{1 + t^3}\ ,\ \left(2 - x\right)^2 = \frac{16t^6}{\left(1 + t^3\right)^2}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}}\ \ ,\ t^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{2 - x}{2 + x}\right)^2}$$

$$\int \sqrt{\frac{\mathbf{x + 1}}{\mathbf{x - 2}}}\,\mathbf{dx} = \int t\cdot\frac{-6t}{\left(t^2 - 1\right)^2}\cdot dt = -6\int \frac{t^2}{\left(t^2 - 1\right)^2}dt = -6\int \frac{t^2}{\left(t + 1\right)^2\left(t - 1\right)^2}dt =$$

$$= \frac{At + B}{\left(t + 1\right)\left(t - 1\right)} + C\cdot\ln\left|t + 1\right| + D\cdot\ln\left|t - 1\right| + K =$$

$$= \frac{3t}{\left(t + 1\right)\left(t - 1\right)} + \frac{3}{2}\cdot\ln\left|t + 1\right| - \frac{3}{2}\cdot\ln\left|t - 1\right| + K =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}}{\frac{x + 1}{x - 2} - 1} + \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} + 1\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} - 1\right) + K =$$

$$= \sqrt{\mathbf{(x + 1)(x - 2)}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{x + 1}}{\mathbf{x - 2}}} + \mathbf{1}\right) - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{x + 1}}{\mathbf{x - 2}}} - \mathbf{1}\right) + \mathbf{K}$$

$$\frac{-6t^2}{\left(t + 1\right)^2\left(t - 1\right)^2} = \frac{A\left(t^2 - 1\right) - 2t\left(At + B\right)}{\left(t + 1\right)^2\left(t - 1\right)^2} + \frac{C}{t + 1} + \frac{D}{t - 1}$$

$$-6t^2 = At^2 - A - 2At^2 - 2Bt + C\left(t - 1\right)\left(t^2 - 1\right) + D\left(t + 1\right)\left(t^2 - 1\right)$$

$$-6t^2 = At^2 - A - 2At^2 - 2Bt + Ct^3 - Ct - Ct^2 + C + Dt^3 - Dt + Dt^2 - D$$

$$-6t^2 = \left(C + D\right)t^3 + \left(-A - C + D\right)t^2 + \left(-C - D - 2B\right)t - A + C - D$$

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ -A - C + D = -6 \\ -C - D - 2B = 0 \\ -A + C - D = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C = -D \\ -A + D + D = -6 \\ \ B = 0 \\ -A - 2D = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{cases} -A + 2D = -6 \\ -A - 2D = 0 \end{cases} \\ \hline -2A \neq \ = -6 \end{array} \qquad \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \\ C = \frac{3}{2} \\ D = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ho posto: $\frac{\mathbf{x + 1}}{\mathbf{x - 2}} = \mathbf{t^2}$ ottenendo: $x + 1 = \left(x - 2\right)t^2\ ,\ x + 1 = x^2 - 2t^2$

$$x+1 = xt^2 - 2t^2 \ , \ x = \frac{1+2t^2}{t^2-1} \ , \ t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \ , \ dx = \frac{4t\left(t^2-1\right) - 2t\left(1+2t^2\right)}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

$$dx = \frac{4t^3 - 4t - 2t - 4t^3}{\left(t^2-1\right)^2}dt \ , \ dx = \frac{-6t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

L'integrale del tipo $\int \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathbf{dx}$ o , più in generale , del tipo $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x},\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\right)\mathbf{dx}$ ,

con **R** funzione razionale delle variabili **x** ed $\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}\,\mathbf{dx}$ , può essere risolto utilizzando una delle tre seguenti **sostituzioni di Eulero** .

## Le tre sostituzioni di Eulero in sintesi

| | |
|---|---|
| $a>0$ | $\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \mathbf{t \pm \sqrt{a}\cdot x}$ oppure $\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \mathbf{\sqrt{a}\cdot(t \pm x)}$ |
| $c>0$ | $\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \mathbf{xt \pm \sqrt{c}}$ |
| $\Delta = b^2-4ac>0$ | $\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \sqrt{\mathbf{a(x-\alpha)(x-\beta)}} = \mathbf{(x-\alpha)t}$ |

### Prima sostituzione di Eulero

1° caso $\mathbf{a>0}$ $c$ **qualsiasi** $\mathbf{\Delta = b^2-4ac>0}$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$

L'integrale si risolve utilizzando una delle seguenti sostituzioni:

$$\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \mathbf{t \pm \sqrt{a}\cdot x} & \textbf{oppure} \\ \mathbf{\sqrt{a}\cdot(t \pm x)} & \textbf{oppure} \\ \mathbf{(x-\alpha)t} \end{cases}$$

**sostituzione algebrica**

$$\mathbf{D\left(ax^2+bx+c\right) = 2ax+b} = \begin{cases} \mathbf{\sqrt{\Delta}\cdot \sec t = \frac{\sqrt{\Delta}}{\cos t}} & \textbf{oppure} \\ \mathbf{\sqrt{\Delta}\cdot \operatorname{cosec} t = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin t}} \end{cases}$$

**sostituzione goniometrica**

Vediamo come si procede con la sostituzione $\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \mathbf{\sqrt{a}\cdot(t-x)}$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo: $ax^2+bx+c = at^2+ax^2-2atx$

$$\mathbf{x = \frac{at^2-c}{2at+b}} \qquad \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}} = \mathbf{\sqrt{a}\cdot\frac{at^2+bt+c}{2at+b}}$$

$$dx = \frac{2at(2ab + b) - 2a(at^2 - c)}{(2at + b)^2}dt = \frac{4a^2t^2 + 2abt - 2a^2t^2 + 2ac}{(2at + b)^2}dt$$

$$\mathbf{dx = \frac{2a^2t^2 + 2abt + 2ac}{(2at + b)^2}dt} \qquad \mathbf{t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}$$

Dopo la sostituzione e le opportune semplificazioni otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta.

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x\sqrt{x^2 + 2x + 4}}}\mathbf{dx} = 2\int \frac{1}{t^2 - 4}dt = A\cdot\ln(t - 2) + B\cdot\ln(t + 2) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(t-2) - \frac{1}{2}\cdot\ln(t+2) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{t-2}{t+2} + C = \mathbf{\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 2} + C}$$

Ho posto : $\mathbf{\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - x}$ ottenendo $\mathbf{x = \frac{t^2 - 4}{2t + 2}}$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = t - \frac{t^2 - 4}{2t + 2} = \frac{t^2 + 2t + 4}{2t + 2} \qquad dx = \frac{t^2 + 2t + 4}{2(t + 1)^2}dt$$

$$\mathbf{\sqrt{x^2 - 2x - 1} = x + t = \frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)}}$$

$$\int \mathbf{\sqrt{x^2 - 2x - 1}\cdot dx} = \int \frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)}\cdot\frac{-(t^2 + 2t - 1)}{2(t + 1)^2}\cdot dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2 + 2t - 1)^2}{(t + 1)^3}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\left[(t + 1)^2 - 2\right]^2}{(t + 1)^3}dt = -\frac{1}{4}\int (t + 1)dt + \int \frac{dt}{t + 1} - \int \frac{dt}{(t + 1)^3} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) + \ln|t + 1| + \frac{1}{2(t + 1)^2} + C - \frac{1}{8} =$$

$$= -\frac{1}{8}(t + 1)^2 + \frac{1}{2(t + 1)^2} + \ln|t + 1| + K =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - x + 1\right)^2 + \ln\left|\sqrt{x^2 - 2x - 1} - x + 1\right| + \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - x + 1\right)^2} + K$$

Ho posto: $\mathbf{\sqrt{x^2 - 2x - 1} = x + t}$ ottenendo: (**)

$$\mathbf{x = -\frac{t^2 + 1}{2(t + 1)}} \qquad \mathbf{dx = -\frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)^2}dt} \qquad \mathbf{t = \sqrt{x^2 - 2x - 1} - x}$$

---

(**) Stoka Pipitone pag. 618

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} = x + t = \frac{t^2 + 2t - 1}{2(t + 1)}$$

## Seconda sostituzione di Eulero

2° caso $a > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} t \pm \sqrt{a} \cdot x & \text{oppure} \\ \sqrt{a} \cdot (t \pm x) & \text{oppure} \\ tx \pm \sqrt{c} & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

**sostituzione algebrica**

$$D(ax^2+bx+c) = 2ax+b = \begin{cases} \sqrt{-\Delta} \cdot \mathrm{tg}\, t & \text{oppure} \\ \sqrt{-\Delta} \cdot \mathrm{cotg}\, t \end{cases}$$

**sostituzione goniometrica**

(*) $$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{2(t^2+4t+4)(1+t)^2}dt = \int \frac{(t^2+2t+2)}{(t+2)^2(1+t)}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{dt}{(t+2)^3} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C =$$

$$= \ln|x + 1 + x^2 + 2x + 2| + \frac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C$$

Essendo $a = 1 > 0$ possiamo effettuare la prima sostituzione di Eulero :

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x$$

Elevando al quadrato ambo i membri di questa uguaglianza e semplificando i termini simili otteniamo: $2x + 2tx = t^2 - 2$ ed anche: $x = \frac{t^2 - 2}{2(1+t)}$ , $dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1+t)^2}dt$

$$t = x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad , \quad 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - \frac{t^2 - 2}{2(1+t)} = \frac{t^2 + 4t + 4}{2(1+t)}$$

Sostituendo nell'integrale proposto otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta che abbiamo risolto.

(&) $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-1}} = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt = 2\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - 3\int \frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1} =$$

---

(*) Maron pag. 222
(&) Maron pag. 223

$$= 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + \frac{3}{t+1} + C \quad \text{dove} \quad t = \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} + 1}{x}$$

Essendo $c = 1 > 0$ possiamo applicare la **seconda sostituzione di Eulero**:

$\sqrt{x^2 - x - 1} = tx - 1$ $\qquad x^2 - x - 1 = t^2x^2 - 2tx + 1$

$$(2t - 1)x = (t^2 - 1)x^2 \;,\; x = \frac{2t-1}{t^2-1} \;,\; t = \frac{\sqrt{x^2 - x - 1} + 1}{x}$$

$$dx = -2\frac{t^2 - t + 1}{(t^2-1)^2}dt \qquad x + \sqrt{x^2 - x - 1} = \frac{t}{t-1}$$

## Terza sostituzione di Eulero

3° caso $\qquad a < 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac > 0 \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{|a|(x-\alpha)(\beta-x)}$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{|a|(x-\alpha)(\beta-x)}$ $\qquad$ **sostituzione algebrica**

$D(ax^2+bx+c) = 2ax+b = \begin{cases} \sqrt{\Delta}\times \sin t \quad \textbf{oppure} \\ \sqrt{\Delta}\times \cos t \end{cases}$ $\qquad$ **sostituzione goniometrica**

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}dx = \int \frac{t^2+1}{4t}\cdot\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\cdot dt = -2\int\frac{1}{t^2+1}dt =$$

$$= -2\operatorname{arctg} t + C = -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x+3}} + C$$

Pongo: $\quad \sqrt{-x^2 - 2x + 3} = \sqrt{(1-x)(x+3)} = (x+3)t$ $\quad$ Ottengo:

$(1-x)(x+3) = (x+3)^2t^2 \quad (1-x) = (x+3)t^2 \quad x = \dfrac{1-3t^2}{t^2+1} \quad dx = \dfrac{-8t}{(t^2+1)^2}dt$

$\sqrt{-x^2 - 2x + 3} = (x+3)t = \left(\dfrac{1-3t^2}{t^2+1} + 3\right)t = \dfrac{4t}{t^2+1} \qquad t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+3}}$

Altra sostituzione goniometrica

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\cdot dt =$$

$$= \int \frac{2\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t}}\cdot dt = \int dt = t + C = \arcsin\frac{x+1}{2} + C$$

Pongo: $x+1 = 2\sin t$ ottengo : $dx = 2\cos t\cdot dt$ $\quad \sin t = \frac{x+1}{2}$ $\quad t = \arcsin\frac{x+1}{2}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{2}{a-t^2}dt = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}\right| + C$$

Pongo: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\beta)t = \frac{a(\beta-\alpha)t}{t^2-a}$ Ottengo :

$$\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta} = t^2 \quad t = \sqrt{\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}} \quad x = \frac{a\alpha-\beta t^2}{a-t^2} \quad dx = \frac{2a(\alpha-\beta)t}{(a-t^2)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \left(\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}-\alpha\right)\cdot t = \frac{a(\beta-\alpha)t}{a-t^2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-3x-1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{(4x+1)(x-1)}}dx = -2\int \frac{t^2+1}{\left(t^2-4\right)^2}dt =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{t}{t^2-4} - \frac{3}{16}\cdot\ln\frac{t-2}{t+2} + K = \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{4x+1}{x-1}-4} - \frac{3}{16}\cdot\ln\frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}-2}{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}+2} + K =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{5}{x-1}} - \frac{3}{16}\cdot\ln\frac{\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}-2\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}+2\right)\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}-2\right)} + K =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(4x+1)(x-1)} - \frac{3}{16}\cdot\ln\frac{\frac{4x+1}{x-1}+4-4\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{4x+1}{x-1}-4} + K =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{4x^3-3x-1} - \frac{3}{16}\cdot\ln\frac{\frac{8x-1}{x-1}-4\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}}{\frac{5}{x-1}} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{\dfrac{8x - 1 - 4\sqrt{(4x + 1)(x - 1)}}{x - 1}}{\dfrac{5}{x - 1}} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln \frac{8x - 1 - 4\sqrt{4x^3 - 3x - 1}}{5} + K =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln\left(8x - 1 - 4\sqrt{4x^3 - 3x - 1}\right) + \frac{3}{16}\ln 5 + K =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^3 - 3x - 1} - \frac{3}{16} \cdot \ln\left(8x - 1 - 4\sqrt{4x^3 - 3x - 1}\right) + C$$

Ho posto $\sqrt{(4x + 1)(x - 1)} = (x - 1)t = \frac{5t}{t^2 - 4}$ ottenendo: $4x + 1 = (x - 1)t^2$

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 4} \qquad d\,x = \frac{-10t\,dt}{\left(t^2 - 4\right)^2} \qquad t = \sqrt{\frac{4x - 1}{x - 1}}$$

- Gli integrali del tipo $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}; \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a-x}}}\right)\mathbf{dx}$ si possono risolvere utilizzando la sostituzione :

$$x = a \cdot sin^2 t \;,\; sin\,t = \sqrt{\frac{x}{a}} \;,\; t = arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} \;,\; d\,x = 2a \cdot sin\,t \cdot \cos t \cdot d\,t$$

$$\sqrt{\frac{x}{a - x}} = \sqrt{\frac{a \cdot sin^2 t}{a - a \cdot sin^2 t}} = \sqrt{\frac{sin^2 t}{1 - sin^2 t}} = \sqrt{\frac{sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{sin\,t}{\cos t} = tg\,t$$