Integrazione di alcune funzioni trascendenti

- Gli integrali del tipo: $\int \mathbf{R}\left(e^{\alpha x}\right)dx$ con **R** funzione razionale di $e^{\alpha x}$, si risolvono mediante la sostituzione: $e^{\alpha x}=t$, $x=\dfrac{\ln t}{\alpha}$, $dx=\dfrac{dt}{\alpha t}$ $\qquad \int \mathbf{R}\left(e^{\alpha x}\right)dx=\dfrac{1}{\alpha}\int \dfrac{\mathbf{R}(t)}{t}dt$

L'integrale $\int \dfrac{R(t)}{t}dt$ si risolve applicando il metodo di Hermite-Levi in quanto si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta.

- Gli integrali del tipo: $\mathbf{P}(x)\cdot \underline{e^{\alpha x}\,dx}$ con $P(x)$ polinomio razionale intero di grado n , si risolvono applicando la formula dell'integrazione per parti finché le derivate di $P(x)$ non si riducono ad una costante . Ad integrazione completa si ottiene:

$$\int P(x)\cdot \underline{e^{\alpha x}dx}=\frac{1}{\alpha}P(x)e^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha}\int P'(x)\underline{e^{\alpha x}dx}=$$

$$=\quad \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\left[P(x)-\frac{P'(x)}{\alpha}+\frac{P''(x)}{\alpha^2}+\cdots\cdots+(-1)^n\cdot\frac{P^{(n)}(x)}{\alpha^n}\right]+C$$

- Gli integrali del tipo: $\int \mathbf{R}(\ln x)dx$ con **R** funzione razionale di $\ln x$, si risolvono con la seguente sostituzione: $\ln x=t \quad x=e^t \quad dx=e^t\,dx$

- Gli integrali del tipo: $\int \mathbf{R}(\sin x,\cos x,tg\,x)dx$ con **R** funzione razionale di $sin\,x$, $\cos x$, $tg\,x$ si risolvono con la seguente sostituzione:

$$tg\frac{x}{2}=t \qquad \frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t \qquad x=2\operatorname{arctg}t \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad tg\,x=\frac{2\cdot tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$

Sostituendo , otteniamo l'integrale di una funzione razionale fratta .

OSSERVAZIONE

Se abbiamo $\boxed{R(-sin\,x,\cos x)\;=\;-R(sin\,x,\cos x)}$ allora è più conveniente la seguente sostituzione:

$$\boxed{\cos x\;=\;t}$$

Se abbiamo $\boxed{R(sin\,x,-\cos x)\;=\;-R(sin\,x,\cos x)}$ allora è più conveniente la seguente sostituzione :

$$\boxed{sin\,x\;=\;t}$$

Se abbiamo $\boxed{R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)}$ allora è più conveniente la seguente sostituzione:

$$tg\, x = t \quad , \quad (1 + tg^2 x)dx = dt \quad , \quad dx = \frac{1}{1 + t^2}dt$$

- Gli integrali del tipo:

$\int R(\sin x)\cdot \cos x\, dx$	$\int R(\cos x)\cdot \sin x\, dx$	$\int R(tgx)\cdot dx$

con **R** funzione razionale di $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$ si risolvono rispettivamente con le seguenti sostituzioni:

$\begin{cases} \sin x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{cases}$	$\begin{cases} \cos x = t \\ -\sin x \cdot dx = dt \end{cases}$	$\begin{cases} tg\, x = t \\ dx = \dfrac{1}{1 + t^2} dt \end{cases}$

ottenendo rispettivamente i tre seguenti integrali di funzioni razionali fratte:

$\int R(t)dt$	$-\int R(t)dt$	$\int \dfrac{R(t)}{1 + t^2}dt$

- Gli integrali del tipo: $\int \mathbf{R(\sin^2 x, \cos^2 x, tg\, x)\cdot dx}$ si risolvono con la seguente sostituzione:

$$tg\, x = t \qquad x = \text{arctg}\, t \qquad d\,x = \frac{1}{1+t^2}dt \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

Otteniamo il seguente integrale: $\boxed{\int R\left(\frac{t^2}{1 + t^2}, \frac{1}{1 + t^2}, t\right)\cdot\frac{1}{1 + t^2}\cdot dt}$

che è l'integrale di una funzione razionale fratta .

- $\int \sin^{2n} x \cdot d\,x = \int (\sin^2 x)^n \cdot d\,x = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^n \cdot d\,x$
- $\int \sin^{2n+1} x \cdot d\,x = \int (\sin^2 x)^n \cdot \sin x \cdot d\,x = -\int (1-\cos^2 x)^n \cdot d\cos x$
- $\int \cos^{2n} x \cdot d\,x = \int (\cos^2 x)^n \cdot d\,x = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^n \cdot d\,x$
- $\int \cos^{2n+1} x \cdot d\,x = \int (\cos^2 x)^n \cdot \cos x \cdot d\,x = \int (1-\sin^2 x)^n \cdot d\sin x$
- Applicando le formule di Werner possiamo risolvere i seguenti integrali :

$$\boxed{\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x \cdot dx = \frac{1}{2}\int \cos(\alpha - \beta)x \cdot dx + \frac{1}{2}\int \cos(\alpha + \beta)x \cdot dx}$$

$$\boxed{\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot dx = \frac{1}{2}\int \cos(\alpha - \beta)x \cdot dx - \frac{1}{2}\int \cos(\alpha + \beta)x \cdot dx}$$

$$\boxed{\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \cdot dx = \frac{1}{2}\int \sin(\alpha - \beta)x \cdot dx + \frac{1}{2}\int \sin(\alpha + \beta)x \cdot dx}$$

- Integrando più volte per parti , possiamo risolvere i seguenti integrali :

$$\int P(x)\cdot \cos ax \cdot dx = \frac{1}{a}P(x)\sin ax - \frac{1}{a}\int P'(x)\cdot \sin ax \cdot dx = \cdots\cdots$$

$$\int P(x)\cdot \sin ax \cdot dx = -\frac{1}{a}P(x)\cos ax + \frac{1}{a}\int P'(x)\cdot \cos ax \cdot dx = \cdots\cdots$$

$P(x)$ è un polinomio di grado n nella variabile x.

ESEMPI

Pongo: $e^x = t$ ottengo: $x = \ln t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\boxed{\int \frac{e^{2x}}{e^{3x} + 1}dx = \int \frac{t^2}{t^3 + 1}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{t}{t^3 + 1}dt = \int \frac{t}{(t + 1)(t^2 - t + 1)}dt} =$$

$$= \boxed{A\cdot\ln(t + 1) + B\cdot\ln(t^2 - t + 1) + C\cdot\text{arctg}\frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + k} =$$

$$= \boxed{-\frac{2}{5}\cdot\ln(t + 1) + \frac{1}{5}\cdot\ln(t^2 - t + 1) + \frac{8\sqrt{3}}{15}\cdot\text{arctg}\frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + k} =$$

$$= \boxed{-\frac{2}{5}\cdot\ln(e^x + 1) + \frac{1}{5}\cdot\ln(e^{2x} - e^x + 1) + \frac{8\sqrt{3}}{15}\cdot\text{arctg}\frac{2e^x - 1}{\sqrt{3}} + k}$$

$$\frac{t}{t^3 + 1} = \frac{A}{t + 1} + \frac{2Bt - 2B}{t^2 - t + 1} + \frac{C\sqrt{3}}{2(t^2 - t + 1)}$$

$$2t = 2At^2 - 2At + 2A + 4Bt^2 - 4Bt + 2Bt - 4B + Ct\sqrt{3} + C\sqrt{3}$$

$$2t = (2A + 4B)t^2 + \left(-2A - 2B + C\sqrt{3}\right)t + 2A - 4B + c\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ -2A - 2B + C\sqrt{3} = 2 \\ 2A - 4B + C\sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad A = -\frac{2}{3} \quad , \quad B = \frac{1}{5} \quad , \quad C = \frac{8\sqrt{315}}{}$$ In questo esempio è $\alpha = 1$.

Se invece avessimo avuto: $I = \displaystyle\int \frac{e^{2x} + e^{4x}}{e^{6x}}dx = \int \frac{\left(e^{2x}\right) + \left(e^{2x}\right)^2}{\left(e^{2x}\right)^3}dx$ si doveva porre : $e^{2x} = t$,

in quanto in questo esempio è $\alpha = 2$.

Ricordando che:

$$tg\frac{x}{2} = t \quad , \quad sin\,x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}dt \qquad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad , \quad x = 2\operatorname{arctg} t$$

possiamo risolvere i seguenti integrali:

$$\boxed{\int \frac{1}{sin\,x}dx} = \int \frac{1 + t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1 + t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos x}dx} = \int \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\cdot\frac{2}{1 + t^2}dt = 2\int \frac{1}{1 - t^2}dt = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C = \ln\left|\frac{1 + tg\frac{x}{2}}{1 - tg\frac{x}{2}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{x}{2}}{1 - tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{x}{2}} = \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{1 - tg\frac{x}{2}}$$

$$\int \frac{1}{1 - t^2}dt = \int \frac{1}{(1 - t)(1 + t)}dt = A\ln|1 - t| + B\ln|1 + t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1 - t| + \frac{B}{1}\ln|1 + t2| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C$$

$$\frac{1}{1 - t^2} = -\frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} \qquad 1 = -(A + B)t - A + B \qquad \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{e^x + 2 + 5\cdot e^{-x}}dx} = \int \frac{1}{\left(t + 2 + \frac{5}{t}\right)t}dt = \int \frac{1}{t^2 + 2t + 5}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t + 1}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x + 1}{2} + C$$

$$e^x = t \qquad x = \ln t \qquad d\,x = \frac{1}{t} \qquad e^{-x} = \frac{1}{t}$$

$$tg\frac{x}{2} = t \quad , \quad \sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}dt \qquad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad , \quad x = 2\operatorname{arctg} t$$

$$\boxed{\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\cdot tg\,x\cdot dx} = 2\int \frac{1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}\cdot\frac{2t}{1 - t^2}\cdot\frac{dt}{1 + t^2} = \int \frac{4t^3}{1 - t^4}dt = -\int \frac{1}{1 - t^4}d\left(1 - t^4\right) =$$

$$= -\ln\left|1 - t^4\right| + C = -\ln\left|1 - tg^4\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\boxed{\int \sin 3x\cdot\sin 5x\cdot dx} = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + K$$

$$\boxed{\int \sin 3x\cdot\cos 2x\cdot dx} = \frac{1}{2}\int \cos 5x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin x\,dx = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + K$$

$$\boxed{\int \cos 3x\cdot\cos 5x\cdot dx} = \frac{1}{2}\int \cos 8x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + K$$

$$tg\frac{x}{2} = t \quad , \quad \sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2}dt \qquad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad , \quad x = 2\operatorname{arctg} t$$

$$\boxed{\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}dx} = \int \frac{\frac{2t}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2} - \frac{1 - t^2}{1 + t^2}}\cdot\frac{2}{1 + t^2}\cdot dt = \int \frac{\frac{2t}{1 + t^2}}{\frac{2t - 1 + t^2}{1 + t^2}}\cdot\frac{2}{1 + t^2}\cdot dt =$$

$$= 4\int \frac{t}{\left(t^2 + 2t - 1\right)\left(1 + t^2\right)}dt = 4\int \frac{t}{\left(t + 1 + \sqrt{2}\right)\left(t + 1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + t^2\right)}dt =$$

$$= 4\left[A\cdot\ln\left|t + 1 + \sqrt{2}\right| + B\cdot\ln\left|t + 1 - \sqrt{2}\right| + C\cdot\ln\left(1 + t^2\right) + D\cdot\operatorname{arctg} t\right] + k =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln\left|t + 1 + \sqrt{2}\right| + \frac{1}{2}\cdot\ln\left|t + 1 - \sqrt{2}\right| - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(1 + t^2\right) + \operatorname{arctg} t + K$$

$$e^x = t \qquad x = \ln t \qquad dx = \frac{1}{t}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{e^x + 1} dx} = \int \frac{1}{t + 1} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \int \frac{1}{t(t + 1)} \cdot dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} \right) \cdot dt = \int \frac{1}{t} \cdot dt - \int \frac{1}{t + 1} \cdot dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|t + 1| + k = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + K = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + k$$