Unità Didattica N° 30 :

L'integrale definito e le sue applicazioni

Partizione di un intervallo limitato e chiuso

Definiamo **partizione** di un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ un insieme finito ed ordinato di numeri $x_o, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ per i quali risulta : $a = x_o < x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_{n-1} < x_n$

Tali **numeri** (punti) dividono $[a,b]$ in n intervalli parziali a due a due **disgiunti** e tali che la loro **unione** è l'intervallo $[a,b]$. La partizione di un intervallo $[a,b]$ si identifica col seguente insieme: $P_n = \{x_o, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$

Chiamiamo **ampiezza** della partizione P_n il numero:

$$|P_n| = \delta_m = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1,2,3,...,n\}$$

Il numero δ_m è detto anche **parametro di finezza** della partizione.

$$\delta_i = x_i - x_{i-1} = \textbf{ampiezza} \text{ dell'intervallo } [x_{i-1}, x_i]$$

Per una funzione f limitata in $[a,b]$, in corrispondenza ad ogni partizione P_n di $[a,b]$, poniamo :

m_i = **minimo assoluto** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$

M_i = **massimo assoluto** della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$

$$s(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \cdot \delta_i$$ = **somma integrale per difetto**

$$S(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} L_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} L_i \cdot \delta_i$$ = **somma integrale per eccesso**

$$\sigma(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \delta_i$$ = **somma integrale generalizzata**

La definizione di integrale definito

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. Mediante i seguenti **n+1** punti $a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ effettuiamo una **partizione**

$$P_n = \{x_o, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

dell'intervallo [a,b]. Indichiamo con $\delta_i = \delta_i(P_n) = x_i - x_{i-1}$ l'ampiezza di uno di questi intervalli e con $\delta_m = \delta_m(P) = max(x_i - x_{i-1})$ l'**intervallo di massima ampiezza**, che costituisce il parametro di finezza della partizione P. In ciascun intervallo parziale $[x_{i-1}, x_i]$, per il teorema di Weierstrass, $f(x)$ ha il massimo (***minimo***) assoluto m_i (M_i).

Indicato con ξ_i un generico punto dell'intervallo δ_i , le seguenti somme

$$s_n = s_n(P) = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \cdots + m_i\delta_i + \cdots + m_n\delta_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i \qquad [1]$$

$$S_n = S_n(P) = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots + M_i\delta_i + \cdots + M_n\delta_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i \qquad [2]$$

$$\sigma_n = \sigma_n(P) = f(\xi_1)\delta_1 + \cdots + f(\xi_i)\delta_i + \cdots + f(\xi_n)\delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \qquad [3]$$

sono chiamate rispettivamente **somma integrale per difetto** (o _somma integrale inferiore_) , **somma integrale per eccesso** (o _somma integrale superiore_), **somma integrale generalizzata** della funzione $f(x)$ relative alla partizione P effettuata.

Le **somme integrali** introdotte godono delle seguenti proprietà:

1) s_n , S_n , σ_n variano al variare della partizione P descrivendo tre insiemi numerici limitati

2) $s_n(P) \le \sigma_n(P) \le S_n(P)$ in quanto $m_i \le f(\xi_i) \le M_i \quad \Rightarrow \quad m_i\delta_i \le f(\xi_i)\delta_i \le M_i\delta_i$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$$

Questo significa che gli insiemi numerici descritti dalle somme integrali s_n, S_n, σ_n sono a due a due **separati**.

3) Se **n aumenta** in modo che il parametro di finezza δ_m diminuisca, allora s_n aumenta, S_n diminuisce mentre σ_n varia restando sempre compresa tra s_n ed S_n .

4) Gli insiemi numerici descritti dalle somme integrali s_n , S_n, σ_n sono a due a due **contigui**.

Questo significa che scegliendo partizioni P con $n \to +\infty$ in modo che la massima ampiezza $\delta_m \to 0$, gli insiemi numerici descritti dalle somme integrali s_n, S_n , σ_n convergono allo stesso valore che prende il nome di << integrale definito della funzione f(x) relativo all'intervallo [a,b] >>

Definizione

L'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo [a,b] è il limite finito di una delle tre somme integrali s_n , S_n , σ_n quando $n \to +\infty$ in modo che la massima ampiezza $\delta_m \to 0$. In simboli abbiamo :

[5]
$$\mathcal{J} = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta_m \to 0 \\ n \to \infty}} s_n = \lim_{\substack{\delta_m \to 0 \\ n \to \infty}} \sigma_n = \lim_{\substack{\delta_m \to 0 \\ n \to \infty}} S_n$$

Il numero $\mathcal{J}$, così calcolato, è l'integrale definito **di f(x) relativo all'intervallo** $[a,b]$.

Le funzioni per le quali esiste l'integrale definito si dicono **integrabili**. L'integrale così definito si dice integrale di MENGOLI-CAUCHY oppure di **Riemann**. I numeri **a** , **b** si dicono gli **estremi di integrazione**, precisamente **a** (**b**) è l'**estremo inferiore** (superiore). f(x) è detta **funzione integranda**, **x** è la **variabile di integrazione**, **[a,b]** è l'**intervallo di integrazione**. L'espressione f(x)dx è l'elemento di integrazione.

TEOREMA

<<***Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ allora essa è ivi dotata di integrale definito***>>, cioè ogni funzione continua in un intervallo limitato e chiuso è ivi integrabile .

OSSERVAZIONE N° 1

L'integrale definito rappresenta un numero il cui valore non dipende dalla variabile x, ma dipende esclusivamente dal tipo di f considerata e dagli estremi di integrazione per cui, volendo, possiamo scrivere indifferentemente : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$

Interpretazione geometrica di integrale definito

Sia γ una curva piana di equazione $y = f(x)$ con $f(x) \geq 0$, cioè γ sia il grafico di una funzione non negativa $f(x)$ definita e continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$.

Definiamo trapezoide individuato dalla funzione $\boldsymbol{f}$ e relativo all'intervallo **[a,b]** la regione finita **T** di piano delimitata dalla curva γ , dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = a$, $x = b$.

Il trapezoide è pertanto un quadrilatero mistilineo avente come contorno l'arco di curva piana **CD** e la poligonale **DABC** Scelti $n+1$ punti dell'intervallo $[a,b]$ in modo che risulti $a = x_o < x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_{n-1} < x_n$ osserviamo che l'intervallo $[a,b]$ viene decomposto in n intervalli parziali $[a = x_o, x_1[\ , [x_1, x_2[\ , [x_2, x_3[\ , ... , [x_{i-1}, x_i[\ , ... , [x_{n-1}, x_n = b]$

rispettivamente di ampiezza

$\delta_1 = x_1 - a = x_o$, $\delta_2 = x_2 - x_1$, $\delta_3 = x_3 - x_2$, ... , $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, ..., $\delta_n = b = x_n - x_{n-1}$

che costituiscono una **partizione** $P_n = \{x_o, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$ dell'intervallo $[a,b]$.

Sia $\delta_m = \max\left\{x_i - x_{i-1} : i = 1,2,3,...,n\right\} = \max \delta_i$ il **parametro di finezza** della partizione P_n , cioè la **massima ampiezza degli intervalli parziali**.

$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \delta_i$ rappresenta l'area $\mu(s_n)$ del plurirettangolo $p(s_n)$ **inscritto** nel trapezoide **T** associato alla partizione P_n . Essa rappresenta la somma delle aree degli n rettangoli di base δ_i ed altezza m_i **minimo assoluto** di $f(x)$ nell'intervallo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \delta_i$ rappresenta l'**area** $\mu(S_n)$ del **plurirettangolo** $p(S_n)$ **circoscritto** al trapezoide **T** associato alla partizione P_n . Essa rappresenta la somma delle aree degli n rettangoli di base δ_i ed altezza M_i **massimo assoluto** di $f(x)$ nell'intervallo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$.

$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \delta_i$ rappresenta l'**area** $\mu(\sigma_n)$ **del plurirettangolo** $p(\sigma_n)$ (o scaloide) individuato sul trapezoide ed associato alla partizione P_n .

Tale plurirettangolo non è nè inscritto nè circoscritto al trapezoide. $\mu(\sigma_n)$ rappresenta l'area di n rettangoli di base δ_i ed altezza $f(\xi_i)$, essendo $f(\xi_i)$ il valore (compreso tra il **minimo assoluto m_i** ed il **massimo assoluto M_i**) che $f(x)$ assume in un punto qualsiasi dell'intervallo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$.

Qualunque sia la partizione P_n dell'intervallo $[a,b]$,risulta sempre : $s_n \leq \sigma_n \leq S_n$

Qualunque sia $n \in N$, Qualunque sia la partizione P_n dell'intervallo $[a,b]$, s_n dà un valore approssimato per difetto dell'area **S** del trapezoide **T** , mentre S_n dà un valore approssimato per eccesso di **S**. Anche σ_n dà un valore approssimato (per eccesso o per difetto) di **S** .

Pertanto scegliere s_n come valore approssimato di S equivale ad approssimare ogni trapezoide di base $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ col rispettivo rettangolo inscritto, mentre scegliere S_n come valore approssimato di S equivale ad approssimare ogni trapezoide di base $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ col rispettivo rettangolo circoscritto.

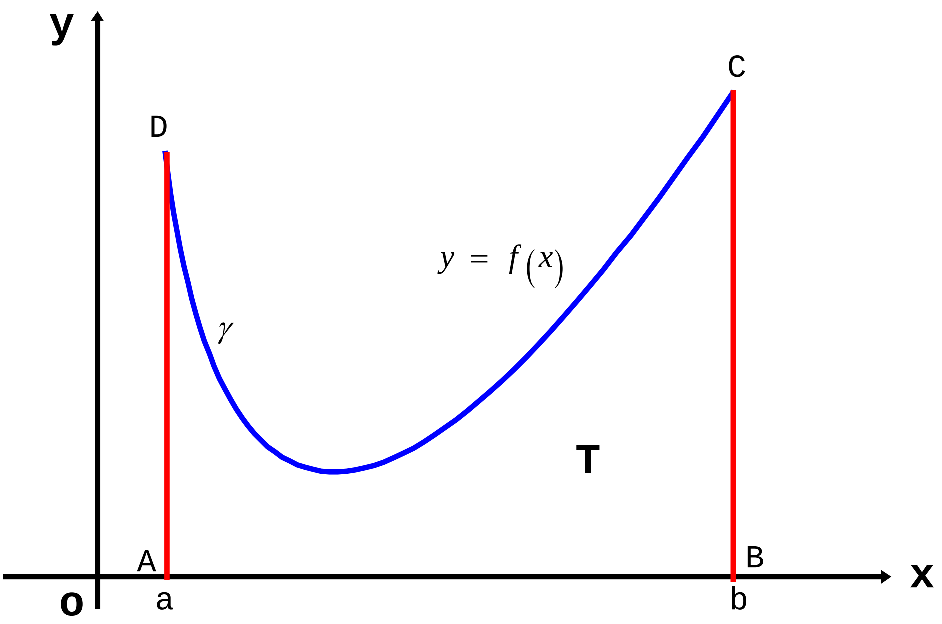
Se f è una funzione continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ allora gli insiemi numerici $\{s_n\}$ ed $\{S_n\}$ descritti rispettivamente dalle somme s_n ed S_n al variare della partizione P_n sono contigui ed hanno come elemento di separazione l'area **S** del trapezoide **T**.

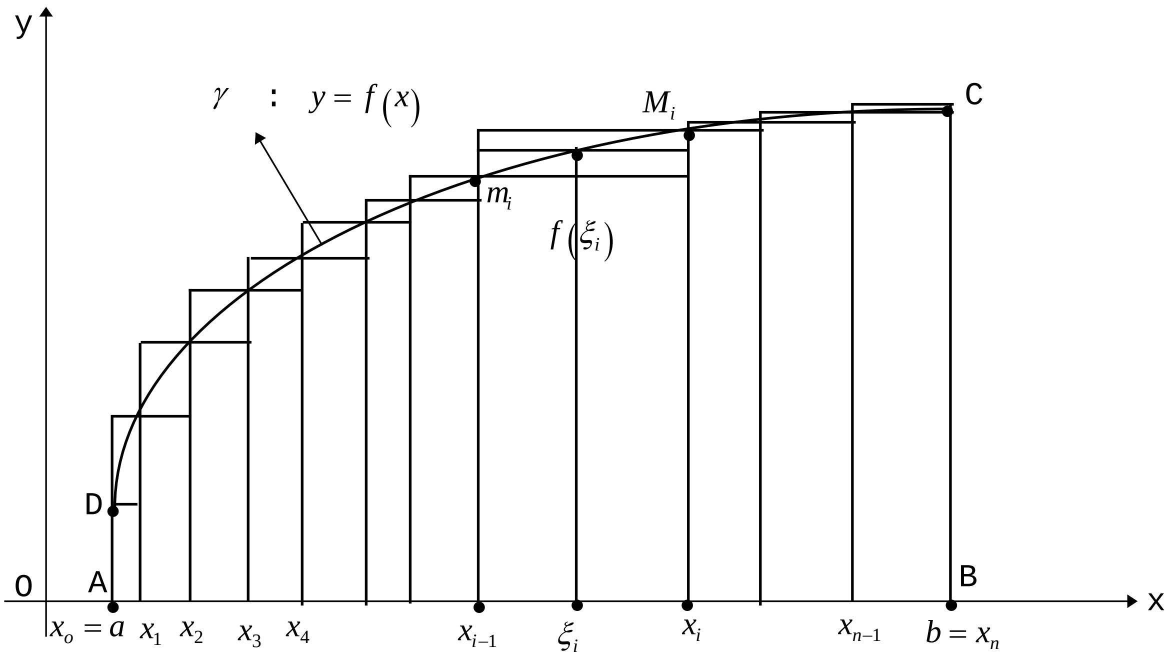
Questo significa che quando $n \to +\infty$ in modo che $\delta_m \to 0$, le somme s_n ed S_n tendono allo stesso limite **I**, che rappresenta l'integrale definito della funzione $f(x)$ esteso all'intervallo $[a,b]$. In simboli abbiamo:

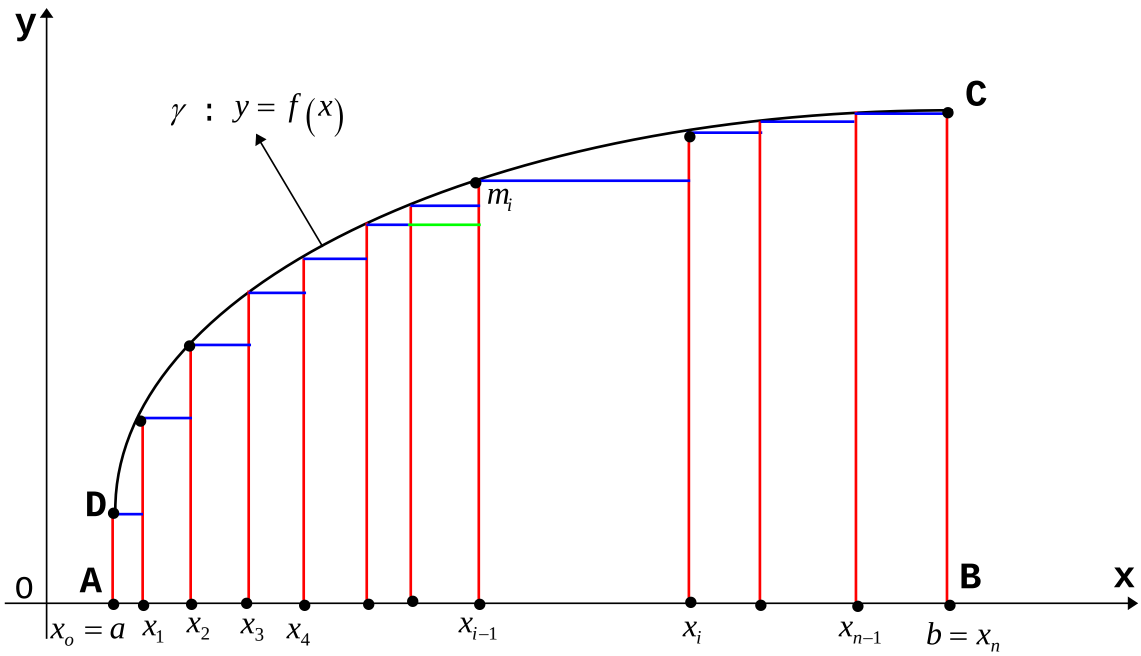
$$\mathbf{S} = \mathcal{I} = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_m \to 0} s_n = \lim_{\delta_m \to 0} \sigma_n = \lim_{\delta_m \to 0} S_n$$

Pertanto è spontaneo, logico e coerente definire l'***area S del trapezoide T*** come il limite dell'**area del plurirettangolo** individuato sul trapezoide (o del **plurirettangolo** inscritto nel trapezoide o del **plurirettangolo** circoscritto al trapezoide) quando $n \to +\infty$ in modo che $\delta_m \to 0$.

Possiamo concludere affermando che l'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ rappresenta l'area **S** del trapezoide **T** quando $f(x)$ è una funzione continua non negativa nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$.







Le proprietà fondamentali dell'integrale definito

1) Per definizione poniamo: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Geometricamente possiamo dire che se **a=b** il trapezoide degenera nel segmento di lunghezza $f(a)$ la sui area è zero.

2) Un integrale definito cambia di segno se invertiamo gli estremi di integrazione, cioè:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3) Se $f(x)$ è una funzione integrabile nell'intervallo $[a,b]$ e se **k** è una costante, allora anch513 e la funzione $k\,f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e risulta:

$$\int_a^b \mathbf{k\,f(x)dx = k}\int_b^a \mathbf{f(x)dx}$$

cioè qualsiasi fattore costante della funzione integranda può essere portato fuori dal segno di integrale.

4) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni integrabili nell'intervallo $\int_a^b f(x)dx$, allora anche la funzione $f(x)+g(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e risulta : $\int_a^b [\mathbf{f(x) + g(x)}]\mathbf{dx} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx} + \int_a^b \mathbf{g(x)dx}$

5) Se $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$,... sono funzioni integrabili in $[a,b]$, ogni loro combinazione $hf(x) + kg(x) + m\varphi(x) + ...$ a coefficienti costanti è integrabile in $[a,b]$:

$$\int_a^b [\mathbf{hf(x) + kg(x) + m\varphi(x) + ...}]\mathbf{dx = h}\int_a^b \mathbf{f(x)dx + k}\int_a^b \mathbf{g(x)dx + m}\int_a^b \mathbf{\varphi(x)dx} + ...$$

6) Se $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$, se risulta $a < c < b$, allora è :

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx} = \int_a^c \mathbf{f(x)dx} + \int_c^b \mathbf{f(x)dx}$$

Il punto **c** divide il trapezoide di base $[a,b]$ in due trapezoidi rispettivamente di basi [a,c] , [c,b] .

7) Relazione di Jacobs

Se a , b , c sono tre valori di x qualsiasi e presi in un qualsiasi ordine , e se *f*(x) è una funzione integrabile nel più ampio degli intervalli aventi per estremi i punti che hanno quelle tre ascisse , risulta : $\int_a^c \mathbf{f(x)dx} + \int_c^b \mathbf{f(x)dx} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx}$

8) Se la funzione non negativa $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ allora risulta:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \geq 0}$$

9) se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili in $[a,b]$, se risulta $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora è pure :

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx} \geq \int_a^b \mathbf{g(x)dx}$$

10) Primo teorema della media

Se $f(x)$ è una funzione definita e continua (e quindi sicuramente integrabile) nell’intervallo limitato e chiuso $[a;b]$, allora esiste almeno un punto $x_o \in]a;b[$ per il quale risulta:

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx = f(x_o)\cdot(b - a)}$$

Questo teorema ci consente di calcolare due valori tra i quali è sicuramente compreso il valore dell’integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se m (M) rappresenta il minimo (massimo) assoluto della funzione $f(x)$ nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ risulta : $\mathbf{m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a)}$

DIMOSTRAZIONE

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$ essa , per il teorema di **Bolzano-Weistrass**, ammette il minimo assoluto **m** ed il massimo assoluto **M** e risulta : $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

Moltiplicando i tre termini per **dx** ed integrando tra gli estremi **a** e **b** otteniamo :

$$m\,dx \le f(x)\cdot dx \le M\,dx \qquad \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

Ma $\int_a^b f(x)dx$ è un numero , $b-a$ è un numero , quindi la frazione $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ è un numero , che possiamo indicale col simbolo μ , in quanto rapporto tra due numeri .

Tale rapporto μ è pertanto un numero reale compreso tra il minimo **m** ed il massimo **M** . Poichè $f(x)$ è continua in $[a,b]$ esisterà almeno un numero $x_o \in]a,b[$ tale che sia $\mu = f(x_o)$.

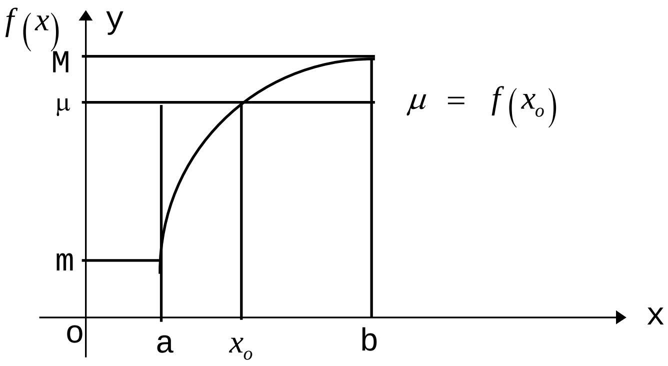
$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu = f(x_o) \qquad \mathbf{\int_a^b f(x)dx = f(x_o)\cdot(b-a)}$$

Il numero $f(x_o)$ prende il nome di valore medio della funzione in $[a;b]$. Risulta:

$$\mathbf{f(x_o) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}}$$

Se $f(x)$ oltre ad essere continua è anche non negativa, il teorema della media ha la seguente interpretazione geometrica:

<<**il trapezoide relativo alla funzione $f(x)$ ed all'intervallo $[a;b]$ è equivalente ad un rettangolo avente come base la base del trapezoide e come altezza un segmento la cui misura $f(x_o)$ è compresa tra il minimo assoluto m ed il massimo assoluto M della funzione** $f(x)$>>

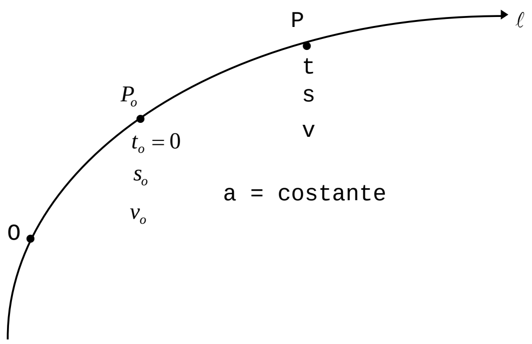


12) Il valore medio di una funzione

Si definisce valore medio y_m di una funzione continua $f(x)$ relativo all'intervallo $[a,b]$ il rapporto tra l'integrale definito della funzione e l'ampiezza dell'intervallo, cioè:

$$\mathbf{y_m = f(x_o) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}}$$

<< **Calcolare la velocità media di un punto materiale che si muove di moto uniformemente varia su una traiettoria prestabilita** >>



$$\text{a} = \textbf{costante} \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_o + at$$

$$v_m = \frac{\int_0^t v(t)dt}{t} = \frac{\int_0^t (v_o + at)dt}{t} = \frac{\left[v_o + \frac{1}{2}at^2\right]_0^t}{t} = \frac{v_o + \frac{1}{2}at^2}{t} = v_o + \frac{1}{2}at$$

Ma la velocità media è il rapporto tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo, quindi : $v_m = \frac{s(t) - s_o}{t} = v_o + \frac{1}{2}at$ $\quad s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o$

che esprime la legge oraria del moto uniforme su traiettoria prestabilita.

La relazione fondamentale tra l'integrale definito e l'integrale indefinito

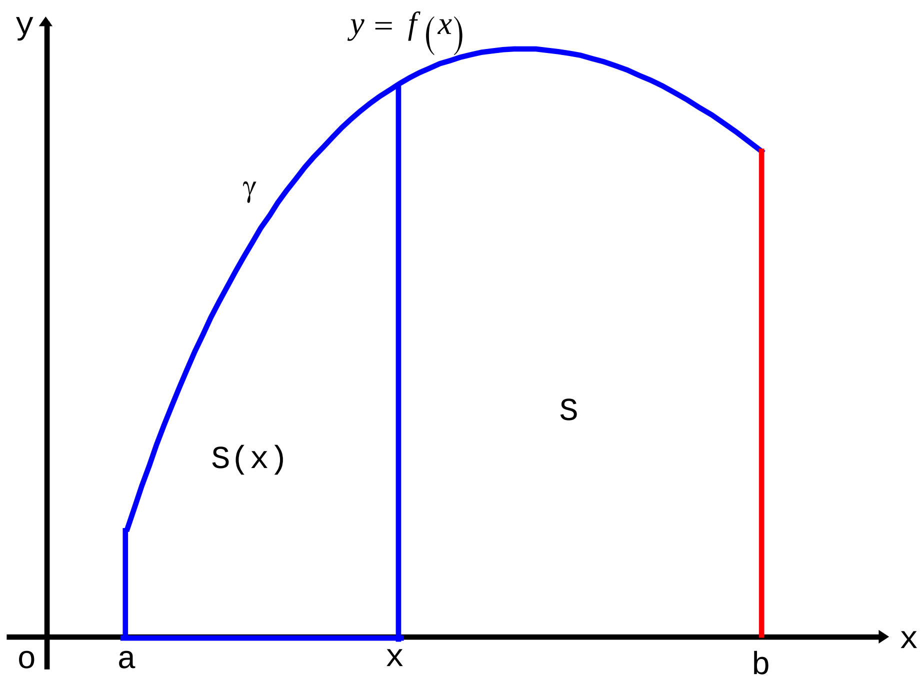
- **La funzione integrale**

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua (e quindi integrabile) nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. Se x è un generico punto dell'intervallo $[a,b]$ la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo limitato e chiuso [a,x] e poichè ad ogni valore di $x \in [a,x]$ corrisponde un solo valore di $\int_a^x f(x)\,dx$

possiamo affermare che l'integrale definito $\int_a^x f(x)\,dx$ è una **funzione univoca** (cioè ad un sol valore) $S(x)$ del suo estremo superiore x , cioè : $\mathbf{S(x) = \int_a^x f(x)dx}$ con $\mathbf{a \le x \le b}$

o meglio,per non confondere la variabile di integrazione x (cioè la variabile indipendente x della funzione f) con l ' estremo superiore x dell'intervallo di integrazione $[a,x]$, è più conveniente scrivere : $\mathbf{S(x) = \int_a^x f(t)dt}$ con $a \le x \le b$

La funzione $S(x)$,univocamente definita in tutti i punti dell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$, prende il nome di funzione integrale della funzione f relativa al punto a ed all'intervallo $[a,b]$.



Teorema di Torricelli

<<**La funzione** $S(x)$ **è, nell'intervallo** $[a,b]$, **una funzione continua**>>

DIMOSTRAZIONE

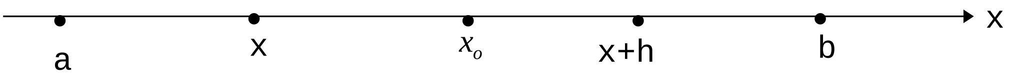
$$S(x+h) - S(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(x_o) \quad \text{(teorema della media)}$$

$$S(x+h) - S(x) = h \cdot f(x_o) \Rightarrow S(x+h) = S(x) + h \cdot f(x_o) \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} S(x+h) = \lim_{h\to 0}\left[S(x) + h \cdot f(x_o)\right] = \lim_{h\to 0} S(x) + f(x_o) \cdot \lim_{h\to 0} h = S(x)$$

$\lim\limits_{h\to 0} S(x+h) = S(x) \quad \forall x \in [a,b]$ La **funzione integrale** $S(x)$ è continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$



TEOREMA

La **FUNZIONE INTEGRALE** $S(x)$ è derivabile $\forall x \in [a,b]$ e la sua derivata prima è uguale alla funzione integranda , cioè $S(x)$ è una **primitiva** di $f(x)$.

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x)$$

DIMOSTRAZIONE

$$S(x+h) - S(x) = h\cdot f(x_o) \quad \Rightarrow \quad \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x_o) \quad \Rightarrow$$

$$S'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_o) = f\left(\lim_{h\to 0}(x_o)\right) = f(x)$$

Teorema di Torricelli-Barrow o di Newton-Leibniz

Se F(x) è una qualsiasi primitiva della funzione integranda f(x) nell’intervallo $[a,b]$ abbiamo:

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$$

Poichè $S(x)$ è , al pari di $F(x)$, una primitiva di $f(x)$, possiamo scrivere :

[*] $\mathbf{S(x) = F(x) + C}$ con **C** costante arbitraria .

Per calcolare il valore della costante **C** (che dipende da a) basta porre nella [*] x = a . Otteniamo :

$$S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C \qquad C = -F(a)$$

La [*] diventa : $S(x) = \int_a^t f(t)dt = F(x) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^x$

Ho indicato sinteticamente : $F(x) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^x$

In particolare,per $x = b$, abbiamo :

$$S(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b \qquad \text{cioè:}$$

[**] $$\int_a^b \mathbf{f(t)dt} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx} = \left[\mathbf{F(x)}\right]_a^b = \mathbf{F(b) - F(a)}$$

Quest’ultima relazione prende il nome di **Formula Fondamentale** per il calcolo degli integrali definiti .

Essa ci dice che l’integrale definito rispetto all’intervallo $[a,b]$ di una funzione continua f(x) è uguale alla differenza fra i valori che una qualsiasi primitiva F(x) di f(x) assume in b ed in a .

L'espressione $\left[F(x)\right]_a^b$ si legge: << F(x) limitata tra **a** e **b** >>.

La [**] assume particolare importanza in quanto ci evita di calcolare limiti di (successioni) che , in generale , presentano calcoli laboriosi e difficili e riconduce il calcolo di un integrale definito a quello di un integrale indefinito .

L'integrale indefinito di una funzione continua $f(x)$, cioè la totalità delle primitive della funzione $f(x)$, può essere scritto anche nella seguente maniera:

$$\int f(x)dx \ = \ \int_a^x f(x)dx \ + \ C$$

Nella relazione $S(x) \ = \ \int_a^x f(t)\,dt$ x è **variabile reale** in $[a,b]$, mentre t è **variabile apparente** (in quanto al termine dell'integrazione non ne rimane traccia) e quindi può essere sostituita con qualsiasi altra lettera .

Spesso , solo per comodità , useremo la stessa lettera (ad esempio **x**) tanto per indicare l'estremo superiore dell'intervallo di integrazione dell'integrale definito quanto per indicare la variabile indipendente della funzione f (cioè la variabile d'integrazione) .

Derivata di un integrale definito quando gli estremi di integrazione sono funzioni

Considero la funzione $\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x)\,dx$ Si dimostra che la sua derivata $\varphi'(x)$ si ottiene applicando la seguente formula: $\boldsymbol{\varphi'(x)=D\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x)\,dx=\beta'(x)\cdot f\left[\beta(x)\right]-\alpha'(x)\cdot f\left[\alpha(x)\right]}$

In precedenza abbiamo dimostrato che: $\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a)$

dove $F(x)=\int f(x)\,dx$ è una primitiva della funzione integranda $f(x)$ che gode della seguente proprietà: $F'(x)=D\int_a^x f(x)\,dx=f(x)$

Quando un estremo di integrazione dell’integrale definito è una funzione $\beta(x)$, allora la derivata dell’integrale definito è uguale alla funzione integranda $f[\beta(x)]$ moltiplicata per la derivata dell’estremo d’integrazione, cioè:

$$\mathbf{D}\int_a^{\beta(x)}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\mathbf{D}\int_a^{\beta(x)}\mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}=\beta'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\mathbf{t}=\beta(\mathbf{x})]=\beta'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\beta(\mathbf{x})]$$

$$\mathbf{D}\int_{\alpha(x)}^{b}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\mathbf{D}\int_{\alpha(x)}^{b}\mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}=-\alpha'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\mathbf{t}=\alpha(\mathbf{x})]=-\alpha'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\alpha(\mathbf{x})]$$

$$\mathbf{D}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\beta'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\beta(\mathbf{x})]-\alpha'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\alpha(\mathbf{x})]$$

Dimostrazione

Noi sappiamo che se $F(x)=\int f(x)\,dx$ è una primitiva della funzione integranda possiamo scrivere: $\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x)\,dx=[F(x)]_{\alpha(x)}^{\beta(x)}=F[\beta(x)]-F[\alpha(x)]$

Risulta: $F'[\beta(x)]=f[\beta(x)]$ $\quad F'[\alpha(x)]=f[\alpha(x)]$

$$\varphi'(x)=D\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x)\,dx=D\{F[\beta(x)]-F[\alpha(x)]\}=F'[\beta(x)]\cdot\beta'(x)-F'[\alpha(x)]\cdot\alpha'(x)$$

$$\varphi'(\mathbf{x})=\mathbf{D}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\beta'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\beta(\mathbf{x})]-\alpha'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}[\alpha(\mathbf{x})]$$

Calcolare la derivata della funzione $\varphi(x)=\int_a^{x^2}\frac{t}{\ln t}dt$ Applico il teorema fondamentale del calcolo integrale utilizzando la formula $\varphi'(x)=D\int_a^{\beta(x)}f(t)\,dt=\beta'(x)\cdot f[\beta(x)]$ con $\beta(x)=x^2$:

$$f'(x)=2x\cdot\frac{x^2}{\ln x^2}=\frac{2x^3}{\ln x^2}$$

Dal grafico della funzione $f(x)$ al grafico della funzione integrale

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f(x)\,dx$$

Risulta: $\mathbf{F}'(\mathbf{x})=D\int_a^x f(t)\,dt=D\int_a^x f(x)\,dx=f(\mathbf{x})$ $\quad \mathbf{F}''(\mathbf{x})=f'(\mathbf{x})$

(1) Negli intervalli dove risulta $f(\mathbf{x})>\mathbf{0}$ la funzione integrale $F(x)$ è crescente in quanto risulta $F'(x)=f(x)>0$

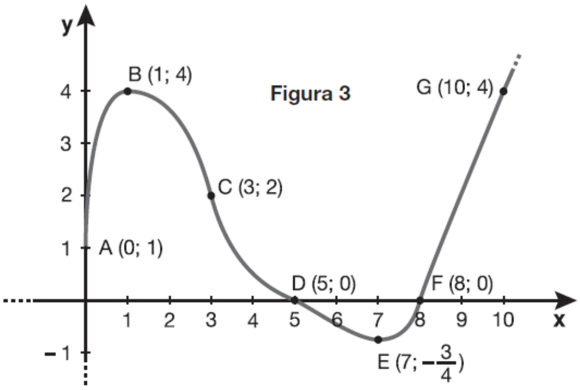
(2) Negli intervalli dove risulta $\mathbf{f(x)<0}$ la funzione integrale $F(x)$ è decrescente in quanto risulta $F'(x)=f(x)<0$

(3) Nei quali risulta $f(x)=F'(x)=0$ il grafico di $F(x)$ la tangente orizzontale

(4) Negli intervalli dove la funzione $f(x)$ è crescente ($f'(x)>0$) il grafico di $F(x)$ volge la concavità verso l'alto [$F''(x)=f'(x)>0$]

(5) Negli intervalli dove la funzione $f(x)$ è decrescente ($f'(x)<0$) il grafico di $F(x)$ volge la concavità verso il basso [$F''(x)=f'(x)<0$]

In figura è rappresentato il grafico della funzione $f:[0;+\infty[\rightarrow\mathbb{R}$. Disegna il grafico della funzione integrale $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x f(x)\,dx$



Questa funzione rappresenta l'area del trapezoide individuato dalla funzione $f(x)$ e relativo all'intervallo $[0;x]$

$F(5)=\int_0^5 f(t)\,dt=11 \quad F(8)=\int_0^5 f(t)\,dt+\int_5^8 f(t)\,dt=11-1=10$

$F'(x)=f(x) \quad F''(x)=f'(x) \quad \Rightarrow \quad F''(x)>0$ se $0<x<1 \vee x>7$ (in tali intervalli il grafico della funzione $F(x)$ volge la concavità verso l'alto)

$F''(x)<0$ se $1<x7$ (in tali intervalli il grafico della funzione $F(x)$ volge la concavità verso il basso)

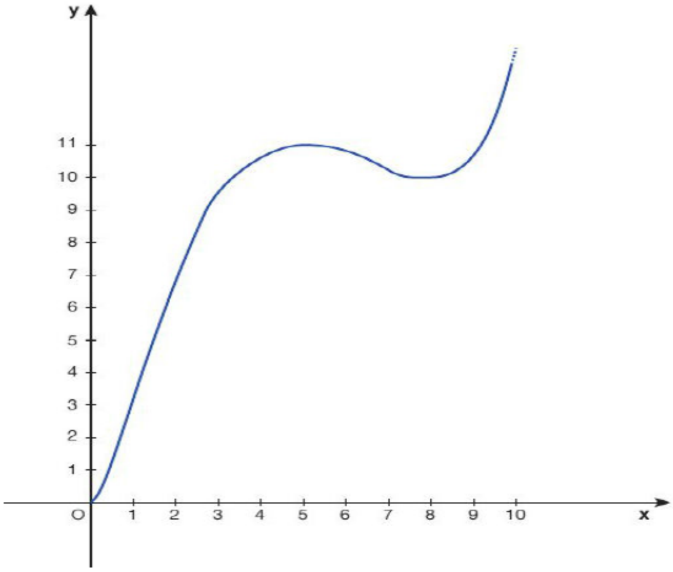
Questo ci consente di affermare che nei punti $x=1$ e $x=7$ la funzione $F(x)$ presenta due punti di flesso in quanto si ha il cambiamento della concavità del suo grafico.

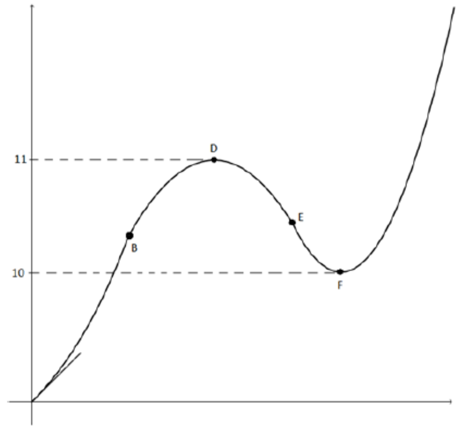
Troviamo l'espressione analitica della funzione $y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ per $x>8$

$$y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^8 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt=10+\int_0^x (2t-16)\,dt=10+\left[t^2-16t\right]_8^x$$

$$\mathbf{F(x)=x^2-16x+74} \quad \text{se} \quad x>8$$

La funzione $y=F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ presenta un punto di massimo relativo per $x=5$. $D(5;0)$ è la sua immagine geometrica; presenta un punto di massimo relativo per $x=8$. $F(8;0)$ è la sua immagine geometrica; presenta due flessi nei punti $B(1;4)$, $E\left(7;-\frac{3}{4}\right)$





L'integrale definito in sintesi

L'integrale definito e la quadratura delle superfici piane

1) Se F(x) è una qualsiasi primitiva della funzione f(x) il numero $F(b) - F(a)$ è detto integrale definito di f(x) relativo all'intervallo $[a,b]$. In simboli abbiamo:

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx} = [\mathbf{F(x)}]_a^b = \mathbf{F(b) - F(a)}$$

I numeri **a** e **b** sono gli estremi di integrazione, precisamente **a** (**b**) è l'**estremo inferiore** (**superiore**), mentre $[a,b]$ è l'**intervallo di integrazione**.

2) $\int_a^a \mathbf{f(x)dx = 0}$, $\int_a^b \mathbf{f(x)dx} = -\int_b^a \mathbf{f(x)dx}$, $\int_a^b \mathbf{kf(x)dx = k}\int_a^b \mathbf{f(x)dx}$

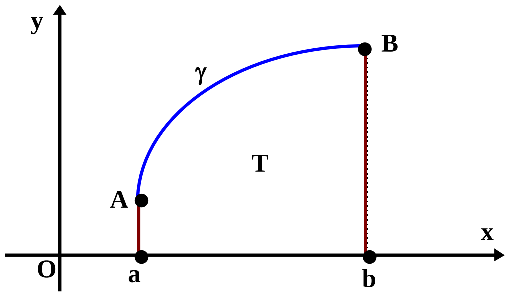
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \text{con} \quad a \le c \le b$$

$$\int_a^b [\mathbf{f(x) + g(x)}]\mathbf{dx} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx} + \int_a^b \mathbf{g(x)dx}$$

3) Sia γ una curva piana di equazione y = f(x) con $f(x) \ge 0$. Definiamo **trapezoide** individuato dalla funzione f e relativo all'intervallo [a,b] la regione finita **T** di piano delimitata dalla curva γ , dall'asse delle ascisse e dalle rette $x=a$, $x=b$.

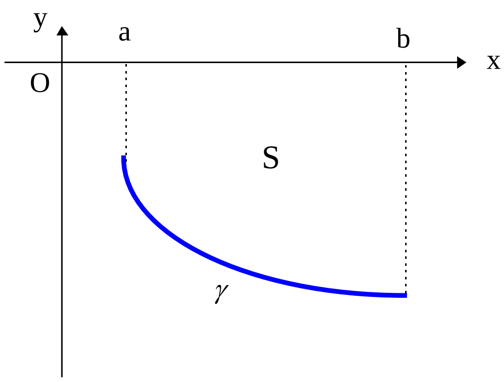
L'area S della superficie del trapezoide si ottiene applicando la seguente formula:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad [1]$$



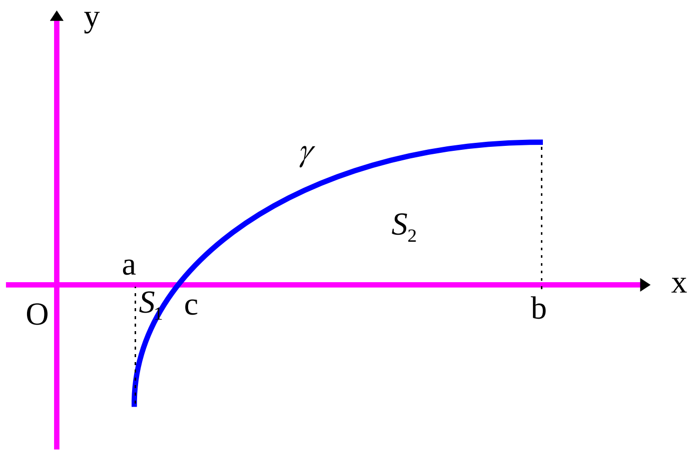
Se risulta $f(x) \le 0 \;\; \forall \; x \in [a,b]$ è $\int_a^b f(x)dx < 0$ e quindi :

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx \qquad [2]$$



Se consideriamo una superficie orientata allora la sua area può essere **positiva** o **negativa** . E' **positiva** quando il contorno della superficie viene percorso in senso antiorario, in caso contrario è **negativa**. Pertanto l'area S di un trapezoide è **positiva** o **negativa** secondo che il trapezoide è situato alla sinistra o alla destra di un osservatore che percorre l'intervallo di integrazione [a,b] dall'estremo inferiore all'estremo superiore .

L'area S di una superficie piana è **sempre positiva** se è considerata dal punto di vista della geometria euclidea . Quindi se f(x) cambia di segno in [a,b] bisogna tenere presente la [2] .



Nel caso della figura abbiamo :

$$S = S_1 + S_2 = \int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad [3]$$

Consideriamo adesso una superficie piana di area S delimitata da un contorno γ tagliato in due soli punti da una generica retta parallela all'asse delle y .

Se questo contorno può essere suddiviso in due curve γ_1 e γ_2 rispettivamente di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ con $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x \in [a,b]$ allora :

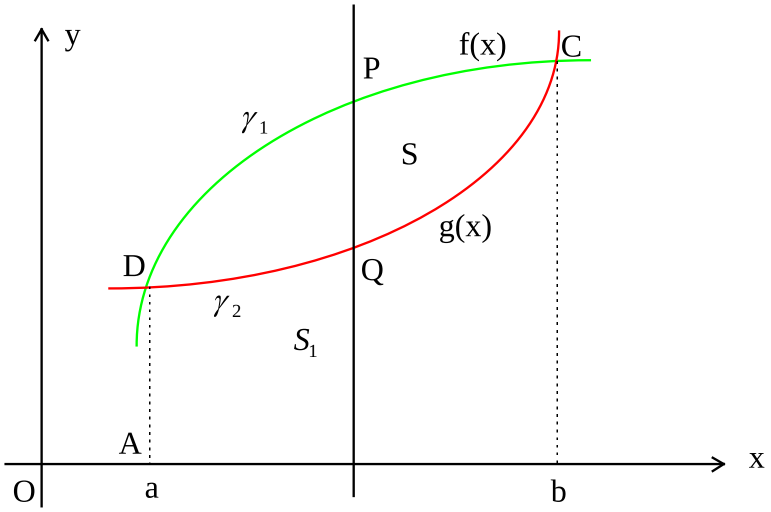
$$\mathbf{S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx} \qquad [4]$$

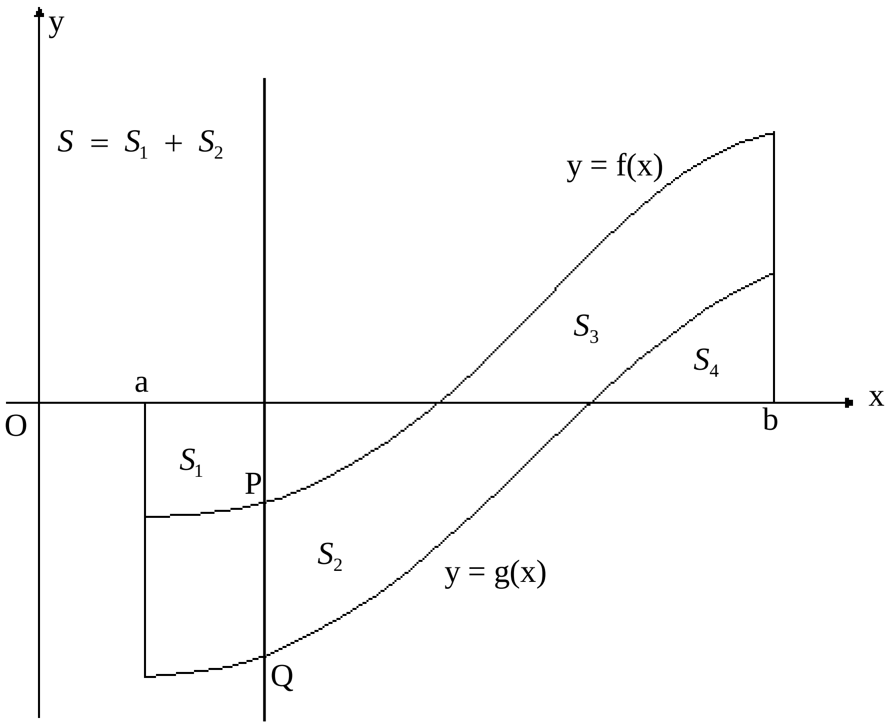
$S + S_1 = \int_a^b f(x)dx \quad S_1 = \int_a^b g(x)$ Sottraendo membro a membro otteniamo:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

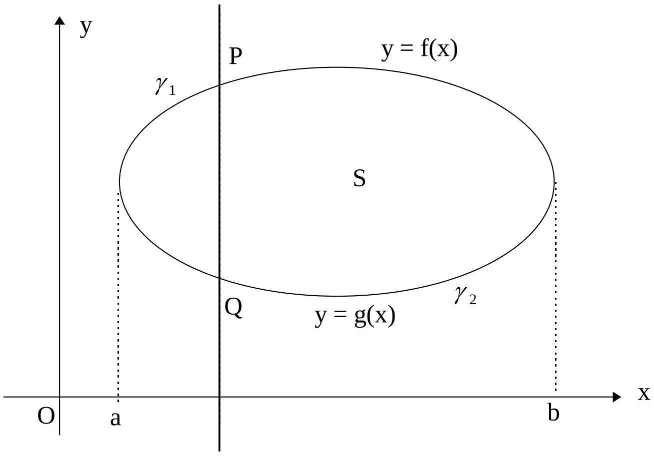
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = [-S_1 + S_3 + S_4] - [-S_1 - S_2 + S_4] =$$

$$= -S_1 + S_3 + S_4 + S_1 + S_2 - S_4 = S_2 + S_3 = S$$



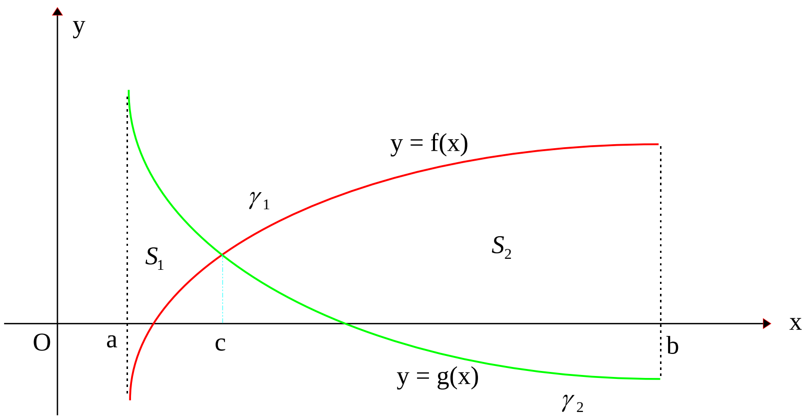


A volte la curva γ può essere assegnata mediante un'equazione del tipo $F(x,y) = 0$ la quale definisce implicitamente le funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ corrispondenti ai due archi di curva γ_1 e γ_2 . Anche in questo caso continua a sussistere la formula **[4]** .



Se $c \in]a,b[$, se $f(x) \le g(x) \ \forall x \in [a,c]$, se $f(x) \ge g(x) \ \forall x \in [c,b]$, l'area S della regione finita di piano individuata dalle curve γ_1 e γ_2 , dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = a$, $x = b$ vale :

$$\mathbf{S = S_1 + S_2 = \int_a^c [g(x) - f(x)]dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]dx} \qquad \textbf{[5]}$$

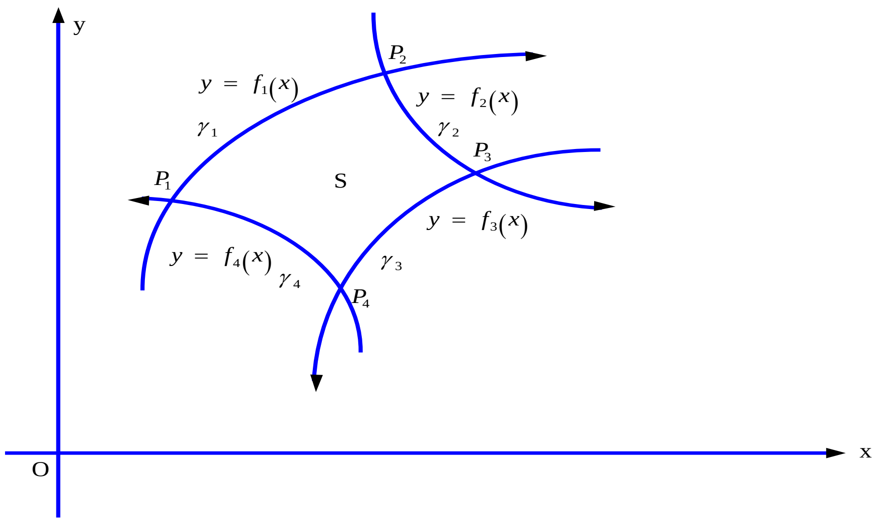


Calcolo dell'area S di una superficie avente come contorno i grafici di due o più funzioni: metodo della circuitazione

Sia **S** l'area della regione finita di piano individuata dai grafici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ delle funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$. Fissato sul contorno di **S** come verso di percorrenza quello orario , calcoliamo le coordinate dei punti d'intersezione fra i vari grafici. Se troviamo :

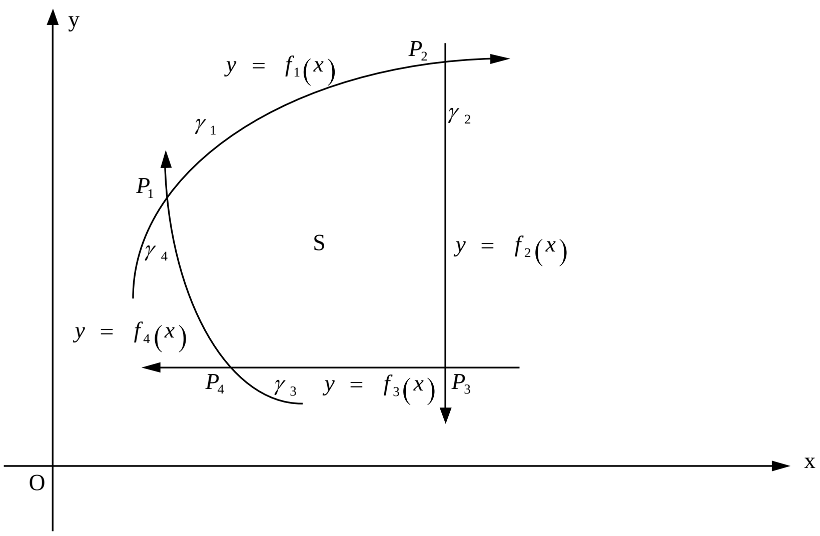
$$P_1(x_1, y_1) = \gamma_1 \cap \gamma_4 \ , \ P_2(x_2, y_2) = \gamma_1 \cap \gamma_2 \ , \ P_3(x_3, y_3) = \gamma_2 \cap \gamma_3 \ , \ P_4(x_4, y_4) = \gamma_3 \cap \gamma_4$$

abbiamo: $\mathbf{S} = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f_2(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f_3(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_1} f_1(x)\,dx$



Se qualcuno dei grafici $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ è un **segmento verticale**, allora il corrispondente integrale definito è **nullo** sia per avere uguali gli estremi di integrazione sia per avere $dx = 0$. Pertanto tale integrale può essere trascurato. Nel caso della figura abbiamo:

$$\mathbf{S} = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f_2(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f_3(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_1} f_1(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f_3(x)\,dx + \int_{x_4}^{x_1} f_1(x)\,dx$$



<< Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalle curve

$$y = \frac{2x-1}{2x^3} \quad , \quad y = x^2 - \frac{1}{2}x$$ >>

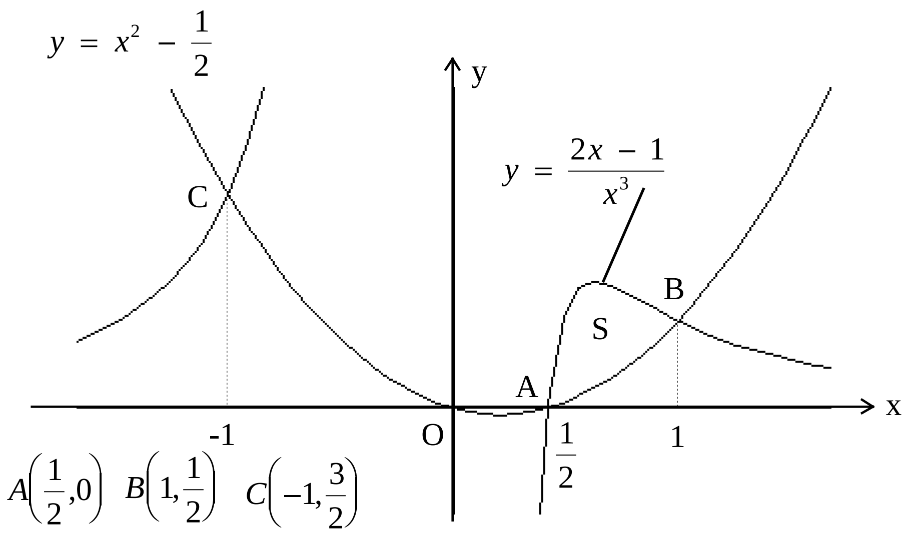
$$\begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{2x^3} \\ y = x^2 - \dfrac{1}{2}x \end{cases} \qquad \frac{2x-1}{2x^3} = x^2 - \frac{1}{2}x \ , \ 2x - 1 = 2x^5 - x^4 \ , \ x^4(2x-1) - (2x-1) = 0$$

$$(2x-1)(x^4-1) = 0 \quad , \quad x = \frac{1}{2} \quad , \quad x = \pm 1 \quad , \quad A\left(\frac{1}{2},0\right) \quad , \quad B\left(1,\frac{1}{2}\right) \quad , \quad C\left(-1,\frac{3}{2}\right)$$

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{2x-1}{2x^3} - x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3} - x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-3} - x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 2 - 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = \frac{12 - 16 + 12 + 2 - 3}{48} = \frac{7}{48}$$



Integrali impropri o integrali generalizzati

- Il caso più semplice di integrazione definita è quello in cui la **funzione integranda** $f(x)$ è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$. Qualche volta si presenta il caso di dovere calcolare integrali definiti di funzioni che divergono in uno o più punti dell'intervallo di integrazione $[a,b]$ o quando almeno uno dei due estremi dell'intervallo di integrazione diverge .

Si parla in questo caso di **integrali generalizzati** o ***integrali impropri*** e la loro risoluzione avviene mediante il calcolo di appropriati limiti . I casi che si possono presentare sono i seguenti:

1) $f(x)$ **è una funzione limitata in un intervallo illimitato**

2) $f(x)$ è una funzione illimitata (e quindi non integrabile) in un intervallo limitato

3) $f(x)$ **diverge in uno o più punti e l'intervallo di integrazione è illimitato inferiormente o superiormente o in entrambi i sensi** .

Pertanto si chiamano **integrali generalizzati** o *integrali impropri* particolari integrali che si calcolano mediante un limite . Con parole diverse possiamo dire che un integrale definito è detto **improprio** se almeno uno dei due limiti di integrazione è ∞ (in questo caso si parla di *integrale improprio* o **integrale generalizzato di prima specie**) , oppure se nell'intervallo di integrazione esiste almeno un punto dove la funzione diverge (in questo caso si parla di *integrale improprio* o integrale generalizzato di seconda specie).

- Può capitare di dovere calcolare un integrale definito in un intervallo illimitato all'interno del quale la funzione presenta una **discontinuità di seconda specie** (funzione che diverge in un punto dell'intervallo di integrazione illimitato in almeno uno dei due sensi). Qualche autore chiama questo integrale **integrale generalizzato di terza specie** . Un integrale di questo tipo va calcolato trasformandolo nella somma di un integrale generalizzato di prima specie e di un integrale generalizzato di seconda specie .

Integrali generalizzati di prima specie

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo illimitato superiormente $[a,+\infty[$ ed integrabile nell'intervallo limitato e chiuso $[a,x[$, con x grande a piacere. Se esiste finito il limite $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ diciamo che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso generalizzato** (o che è *sommabile*) in $[a,+\infty[$ e poniamo per definizione

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left[F(t)\right]_a^x = -F(a) + \lim_{x\to+\infty}F(x)$$

dove $F(x)$ è una qualsiasi **primitiva** della funzione $f(x)$.

Alla stessa maniera si definiscono i seguenti altri due integrali generalizzati di prima specie .

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\left[F(t)\right]_x^b = F(b) - \lim_{x\to-\infty}F(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$$

E' appena il caso di ricordare che la funzione $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato se esistono finiti i limiti dei singoli integrali definiti. In tutti questi casi diciamo che la funzione $f(x)$ è **integrabile** o sommabile nell'intervallo illimitato considerato o anche che la funzione $f(x)$ ha integrale generalizzato convergente in ciascun intervallo illimitato.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{t}{e^t} dt = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{t+1}{e^t} \right]_0^x = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{x+1}{e^t} + 1 \right] = 1$$

Integrale generalizzato di seconda specie o integrale di una funzione che diventa infinita in qualche punto dell'intervallo di integrazione

Gli integrali generalizzati finora trattati sono detti di **prima specie** in quanto abbiamo ipotizzato che almeno uno degli estremi dell'intervallo di integrazione assume valore infinito . Si ha un **integrale generalizzato di seconda specie** quando la funzione integranda $f(x)$ presenta una discontinuità di seconda specie in un punto c dell'intervallo di integrazione $[a,b]$, cioè quando risulta: $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$

Il punto **c** può essere interno all'intervallo di integrazione o coincidere con uno di tali estremi .
Adesso procediamo alla definizione dell'integrale improprio di una funzione $f(x)$ avente una discontinuità di seconda specie in un punto $c \in [a,b]$.

Se $f(x)$ è **continua** in $[a,b[$ ed è **divergente** in b (cioè $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$), se esiste finito il limite $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)$ diciamo che $f(x)$ è **sommabile (o *integrabile in senso generalizzato*)** in $[a,b]$ e poniamo per definizione $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to b-} [F(t)]_a^x = -F(a) + \lim_{x \to b-} F(x)$

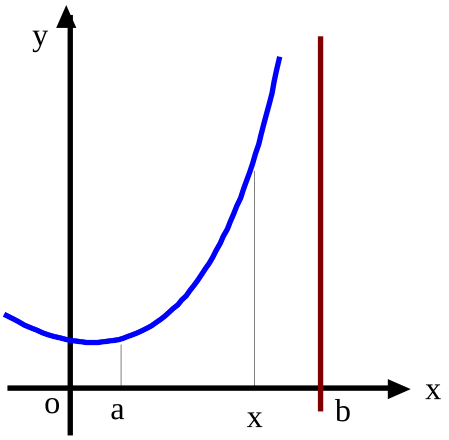
Se il limite non esiste o è infinito diciamo che $f(x)$ **non è sommabile** o non è integrabile in senso generalizzato. Concludendo possiamo affermare che se il limite è finito $f(x)$ è ad **integrale generalizzato convergente**, se il limite è infinito $f(x)$ è ad **integrale generalizzato divergente**.
Nella pratica, quando l'integrale generalizzato è convergente, si dice che la funzione è integrabile in senso generalizzato o è sommabile. Quando invece l'integrale generalizzato è divergente diciamo che la funzione non è **integrabile in senso generalizzato** o ***non è sommabile***.

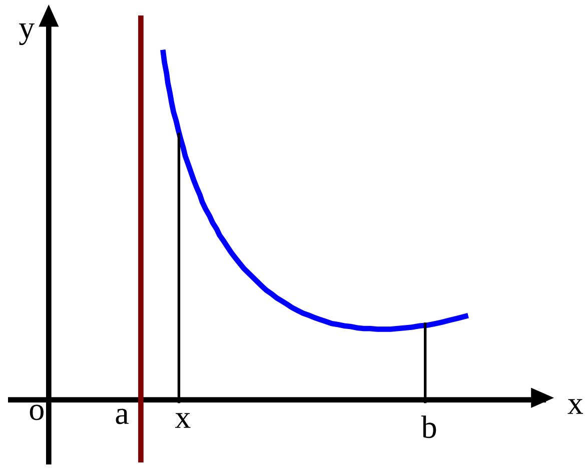
Se $f(x)$ diventa infinita nell'estremo inferiore a dell'intervallo $[a,b]$ $\left(\lim_{x\to a} f(x) = \infty\right)$ poniamo per definizione:

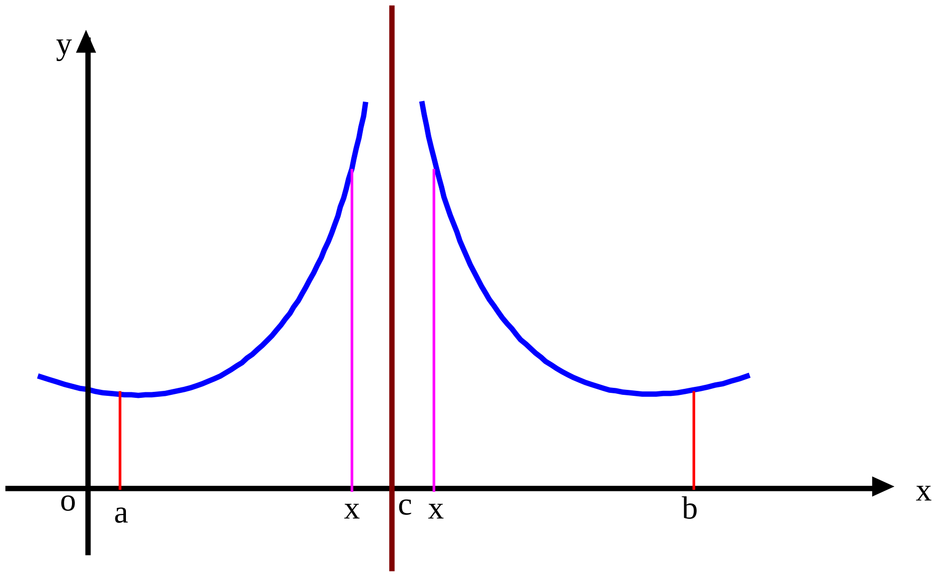
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt = \lim_{x\to a+}\left[F(t)\right]_x^b = F(b) + \lim_{x\to a+} F(x)$$

Se $f(x)$ diventa infinita in un punto **c** interno all'intervallo $[a,b]$ $\left(\lim_{x\to c} f(x) = \infty\right)$ poniamo per definizione:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{x\to c-} \int_a^x f(t)dt + \lim_{x\to c+} \int_x^b f(t)dt$$







$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \ln t\, dt = \lim_{x\to 0+} \left[t\ln t - t\right]_x^1 = \lim_{x\to 0+}\left[-1 - x\ln x + x\right]_x^1 = -1$$

La funzione integranda non è limitata in un intorno destro di $x = 0$ in quanto risulta

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$$

$$\int_0^{+\infty} x\cdot e^x\, dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x x\cdot e^x\, dx = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^x = -\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{e^x}\right]+1 = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}+1 = 0+1 = 1$$

$$\int x\cdot e^{-x}\, dx = -\int x\, de^{-x} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$\int_{-2}^{2}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\lim_{\substack{a\to-2\\ b\to 2}}\int_a^b\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\lim_{\substack{a\to-2\\ b\to 2}}\left[-\sqrt{4-x^2}\right]_a^b=\lim_{\substack{a\to-2\\ b\to 2}}\left[-\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-a^2}\right]=0$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(4-x^2\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{4-x^2}+C$$

Calcolare i seguenti integrali definiti

01) $\int_1^e\frac{x-1}{x^2}dx=\frac{1}{e}$ **02)** $\int_0^{1/2}(4x+1)^3dx=5$ **03)** $\int_{-1}^1\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2\right)dx=-\frac{7}{2}$

04) $\int\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2(x+2)dx=\frac{39}{8}$ **05)** $\int_0^{\pi/4}2\sin^2x\cdot dx=\frac{\pi-2}{4}$ **06)** $\int_0^{\pi/4}tg\,x\cdot dx=\frac{1}{2}\ln 2$

07) $\int_2^5\frac{x+1}{x-1}dx=3+\ln 16$ **08)** $\int_0^{\pi/6}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx=2-\sqrt{2}$ **09)** $\int_0^1\left(3x^2-x+2\right)dx=\frac{5}{2}$

10) $\int_0^2(2+x)^2dx=\frac{103}{6}$ **11)** $\int_1^2\left(3x^2+x-1\right)dx=\frac{15}{2}$ **12)** $\int_0^1\left(e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{e^2-1}{e}$

13) $\int_{-1}^1\left(3x^2-\frac{1}{2}x+1\right)dx=4$ **14)** $\int_{1/2}^1\left(3x^3-4x^2+3x-1\right)dx=-\frac{75}{64}$ **15)** $\int_0^2x(3x+1)dx=54$

16) $\int_1^4e^{-\sqrt{x}}\cdot dx=\frac{4e-6}{e^2}$ **17)** $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\cos\sqrt{x}\cdot dx=\pi-2$ **18)** $\int_0^2|1-x|\cdot dx=1$

19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2x}dx$ **20)** $\int_e^{e^2}\frac{1+\ln x}{x\cdot\ln x}dx=1+\ln 2$ **21)** $\int_2^3\ln x\cdot dx=-1+3\ln 3-2\ln 2$

22) $\int_0^1\arccos x\cdot dx=-1$ **23)** $\int_1^{e^2}|\ln x-1|\cdot dx=2(e-1)$

24) $\int_1^8\frac{\sqrt{1+x}}{x}dx=6-2\sqrt{2}-\ln 2-2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$ **25)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sin x\cdot\cos x-tgx)dx=\frac{1-\ln 2}{2}$

26) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\cdot\sin 2x\cdot dx=\frac{2}{5}$ **27)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\cos x}dx=\sqrt{2}-1$ **28)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx=\ln 2$

29) $\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=-1+2\ln\frac{e+1}{2}$ **30)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}tg^2x\cdot dx=\frac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ **31)** $\int_1^ex^2\cdot\ln x\cdot dx=\frac{2e^3+1}{9}$

32) $\int_0^{\pi}x^2\cdot\sin x\cdot dx=\pi^2-4$ **33)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cot g^2x\cdot dx=\frac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ **34)** $\int_0^1x\left(e^{-x}-e^{-x^2}\right)dx=\frac{e-3}{2e}$

35) $\int_0^1\left(x-x^3\right)\cdot e^{-x^2}\cdot dx=\frac{1}{2e}$ **36)** $\int_4^{11}\frac{5x}{\sqrt{5+x}}dx=\frac{220}{3}$ **37)** $\int_0^1\frac{1+3x}{x^2+2x+1}dx=-1+3\ln 2$

38) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x^2-1)} dx = \ln \frac{5\sqrt{3}}{12}$

Area di un dominio piano

01) **Sia γ la curva di equazione $y = x^3$ e t la retta tangente a γ nel punto di ascixxa $x_o = 1$. Calcolare l'area di ciascuna delle due regioni finite di piano individuate da γ , da t e dalla bisettrice secondaria degli assi cartesiani .**

02) **Calcolare l'area S della regione finita di piano , situata nel primo quadrante degli assi cartesiani, delimitata dalle curve aventi rispettivamente equazioni $y = x^3$, $y = -x^2 + 2x$.**

[$S = \frac{5}{12}$ **]**

03) **Le tangenti alla curva γ di equazione $y = x^4 - 6x^2 + 4$ condotte nei suoi due punti di flesso F_1 , F_2 si incontrano in un punto P . Determinare l'area S della parte finita di piano racchiusa dall'arco di curva $\widehat{F_1F_2}$ e dai segmenti PF_1 e PF_2 . [** $S = \frac{8}{5}$ **]**

04) **Calcolare l'area S della regione finita di piano delimuitata dalle curve γ e σ nei seguenti casi :**

a) $y = x^3 - 2x$; $3y = x^3$ [$S = 4$] **b)** $y = x^3 - x$; $y = 3x - x^3$ [$S = \frac{3}{2}$]

c) $y = x^3 - 2x$; $y = 6x - x^3$ [$S = 16$] **d)** $y = x^3 - 3x$; $4y = x^3$ [$S = 6$]

05) **Calcolare l'area S del rettangoloide di base $[1;3]$ relativo alla funzione** $f(x) = arctg\sqrt{x-1}$ [$S = 3 \cdot arctg\sqrt{2} - \sqrt{2}$]

06) **Calcolare l'area S del dominio normale** $D = \left\{ (x,y) \in R^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \wedge x \cdot \sin x \le y \le x \right\}$

07) **Calcolare l'area S della regione finita di piano delimitata dal grafico γ della funzione** $f(x) = arctg\, x$ **, dall'asse delle ascisse e dalle rette** $x = -$, $x = 1$.

Per quali valori di $a > 0$ l'area compresa sotto il grafico di $f(x)$ nell'intervallo $[a-3; a]$ è minima ?

08) **Dopo avere disegnato il grafico della funzione** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 3}$ **ed osservato che essa presenta un minimo nel punto** $x_1 = -\sqrt{3}$ **ed un massimo nel punto** $x_2 = \sqrt{3}$ **, calcolare L'area S compresa tra il grafico di** $f(x)$ **nell'intervallo** $[x_1 ; x_2]$ **.** **[** $S = 2 \cdot \ln 2$ **]**

09) **Calcolare l'area S della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione** $f(x) = x \cdot \ln|x|$ **, dall'asse delle ascisse e dalle rette** $x = -2$ **,** $x = 1$ **. Si osservi che** $f(0) = \lim_{x \to 0} x \cdot \ln|x| = 0$ **.** **[** $S = 2\ln 2 - \dfrac{1}{4}$ **]**

10) **La parabola** γ **di equazione** $y = -x^2 + 2x$ **e vertice V incontra l'asse delle ascisse nei punti O ed A . Detta t la tangente a** γ **in A sia** VH **la retta perpendicolare a t passante per il punto V . Calcolare l'area S della regione finita di piano delimitata da** γ **, t e** VH **.** **[** $S = \dfrac{2}{15}$ **]**

11) **Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalle curve** $xy = 3$ **,** $3x + 2y - 9 = 0$ **[** $S = \dfrac{9}{4} - 9\ln 2$ **]**

12) **Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalle due parabole** $y = x^2 - 2x$ **,** $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ **[** $S = \dfrac{128}{27}$ **]**

13) **Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalle due parabole** $y = 4x^2$ **,** $y = 2x^2 + 3$ **.** **[** $S = 2\sqrt{6}$ **]**

14) **Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalle curve** $y = 3x^2 + 5x - 1$ **,** $y = 2x + 5$ **[** $S = \dfrac{27}{2}$ **]**

15) **Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalle due parabole** $y = -x^2 + 4x - 3$ **,** $y = x^2 - 6x$ **.** **[** $S = 9$ **]**

16) **Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dall'asse delel ascisse e dalle curve aventi rispettivamente equazioni** $y = tg\, x$ **,** $y = \operatorname{cotg} x$ **, sapendo che** $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

[$S = \ln 2$ **]**

17) **Si determinino le coordinate dei punti comuni alle due curve** $xy = 2$ **,** $y = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{26}{9}x$ **e si calcoli l'area S della parte di piano limitata dagli archi delle due curve che hanno per estremi tali punti che appartengono al primo quadrante .** **[** $S = \frac{104}{27} - 2\ln 3$ **]**

18) **Calcolare l'area S della regione finita di piano individuata dalla parabola** γ $y = -x^2 + 5x - 4$ **, dall'asse x e dalla tangente a** γ **nel punto di ascissa** $x = 2$ **.** **[** $S = \frac{5}{6}$ **]**