Unità Didattica N° 32

Le trasformazioni geometriche

Le trasformazioni geometriche piane

Ci limitiamo per semplicità al piano , che designeremo col simbolo π .

Dicesi **trasformazione T del piano π in sé** una qualsiasi corrispondenza biunivoca fra i punti di π , cioè una corrispondenza biunivoca che associa a punti di un piano punti dello stesso piano . In una trasformazione del piano in sé ad ogni coppia $(x,y) \in R\times R = R^2$ corrisponde una coppia $(x',y') \in R\times R = R^2$. In generale la corrispondenza è assegnata mediante una legge del tipo :

$$T \equiv \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

dove $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono due funzioni nelle variabili **x** e **y** .

Le equazioni della *trasformazione inversa* sono : $$T^{-1} \equiv \begin{cases} x = \overline{f}(x',y') \\ y = \overline{g}(x',y') \end{cases}$$

In una trasformazione del piano in sé un punto $P(x,y)$ si dice **unito** se coincide col suo *corrispondente* $P'(x',y')$. Dovendo risultare $x' = x$ ed $y' = y$, gli eventuali **punti uniti** di una trasformazione geometrica si ottengono risolvendo il sistema : $$\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$$

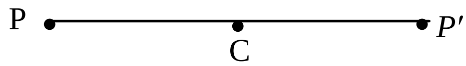
Sia $y = f(x)$ l'equazione cartesiana di una curva γ grafico della funzione f . La trasformazione **T** muta i punti $P(x,y) \in \gamma$ in punti $P'(X,Y) \in \gamma'$ che appartengono ad una curva γ' la cui equazione cartesiana esprimerà il legame che intercorre tra le coordinate **X** ed **Y** dei punti trasformati .

$$\overbrace{y = f(x)}^{equazione\, di\, \gamma} \xrightarrow{T} \overbrace{G(X,Y) = 0}^{equazione\, di\, \gamma'}$$

Indicando , poi , con (x,y) le coordinate del generico punto di γ' , l'equazione cartesiana del grafico trasformato γ' assumerà la forma $G(x,y) = 0$. In alcuni casi tale equazione potrà essere esplicitata rispetto ad y ed assumere la forma $y = g(x)$.

La simmetria centrale

Due punti **P** e P' si dicono **simmetrici rispetto ad un punto C** quando : 1) P , C , P' sono allineati 2) C è il punto medio del segmento PP' . Dicesi **simmetria centrale di centro C** la trasformazione del piano in sé che associa ad ogni punto $P \in \pi$ il punto $P' \in \pi$ tale che C sia il punto medio del segmento PP' .

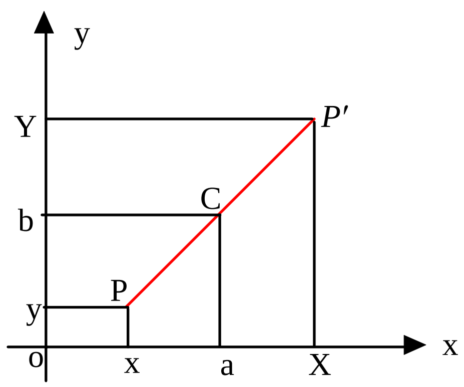


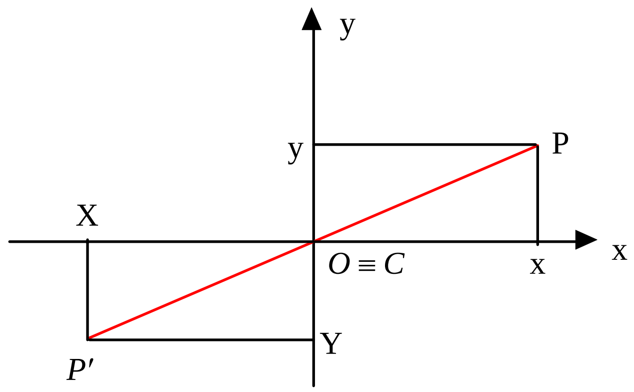
Riferiamo il piano π ad un sistema ortonormale di assi cartesiani . Fra le coordinate delle coppie di punti $P(x,y)$ e $P'(X,Y)$ che si corrispondono nella **simmetria centrale di centro** $C(a,b)$ sussistono le seguenti relazioni :

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_P + x_{P'}}{2} \\ y_C = \dfrac{y_P + y_{P'}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{x + X}{2} \\ b = \dfrac{y + Y}{2} \end{cases} \qquad \textbf{[1]} \quad \begin{cases} X = 2a - x \\ Y = 2b - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2a - X \\ y = 2b - Y \end{cases} \quad \textbf{[2]}$$

Se scegliamo gli assi cartesiani in modo che risulti $C \equiv O$ allora le precedenti relazioni assumono la forma :

$$\textbf{[3]} \quad \begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = -X \\ y = -Y \end{cases} \quad \textbf{[4]}$$





In una simmetria centrale vi è un solo **punto unito** : il centro di simmetria

In una simmetria centrale sono unite tutte e sole le rette passanti per il centro di simmetria

Due curve che si corrispondono in una simmetria centrale sono **congruenti** o isometriche o *uguali* .

Due curve piane sono **simmetriche rispetto** al punto **C** se le loro equazioni si ottengono l'una dall'altra mediante le trasformazioni [1] o [2] .

Se mediante la trasformazione [1] o [2] l'equazione della curva rimane invariata , vuole dire che la curva è **simmetrica** rispetto al punto $C(a,b)$.

REGOLA PRATICA

Per avere l ' equazione cartesiana della curva γ' **simmetrica della curva γ rispetto al punto** $C(a,b)$ **basta sostituire nell'equazione cartesiana** $y = f(x)$ **della curva γ x con** $2a - x$ **ed y con** $2b - y$

$\gamma : y = f(x)$, $x \leftarrow 2a - x$, $y \leftarrow 2b - y$; $\gamma' : 2b - y = f(2a - x)$

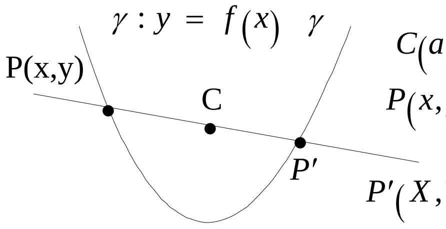
$$\gamma' : y = 2b - f(2a - x)$$

<< **Scrivere l ' equazione della parabola** γ' **simmetrica della parabola γ di equazione** $y = -x^2 + x - 1$ **rispetto al punto** $C(-2,3)$ >>

Basta sostituire nell'equazione della parabola γ x con $-4 - x$ ed y con $6 - y$ [$x \leftarrow -4 - x$. $y \leftarrow 6 - y$] . Otteniamo : $6 - y = -(-4 - x)^2 + (-4 - x) - 1$,

$6 - y = -16 - 8x - x^2 - 4 - x - 1$, $-y = -x^2 - 9x - 27$, $\gamma' : y = x^2 + 9x + 27$

Come calcolare il centro di simmetria di una curva piana avente equazione $y = f(x)$



$C(a,b)$

$P(x,y)$

$P'(X,Y)$ $\qquad P' \in \gamma \Rightarrow Y = f(X)$

Le equazioni della simmetria di centro **C** sono : $\begin{cases} X = 2a - x \\ Y = 2b - y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 2a - X \\ y = 2b - Y \end{cases}$

$y + Y = 2b \Rightarrow f(x) + f(X) = 2b$, $X = 2a - x$ $\boxed{f(x) + f(2a - x) = 2b}$

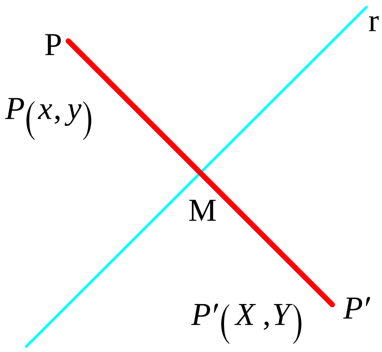
Imponendo che il primo membro sia identicamente uguale al secondo membro possiamo calcolare le coordinate (a,b) del centro di simmetria .

<< **Calcolare le coordinate del centro di simmetria della cubica di equazione** $y = x^3$ >>

$f(x) = x^3$, $f(2a - x) = (2a - x)^3$, $x^3 + (2a - x)^3 = 2b$

$x^3 + 8a^3 - 12a^2x + 6ax^2 - x^3 = 2b$ $\quad \begin{cases} 6a = 0 \\ -12a^2 = 0 \\ 8a^3 = 2b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ C \equiv O(0,0) \end{cases}$

La simmetria assiale



I punti P e P' sono **simmetrici rispetto alla retta** r se si verificano le due seguenti condizioni :

1) $PP' \perp r$

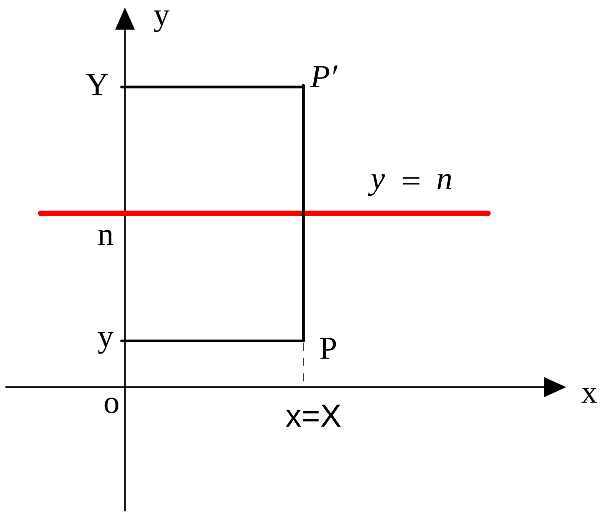
2) M è il punto medio del segmento PP'

CASI PARTICOLARI

simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse delle ascisse

$r // Ox \Rightarrow m = 0$ Le relazioni [5] e [6] assumono la seguente forma se $r : y = n$:

[7] $\begin{cases} X = x \\ Y = -y + 2n \end{cases}$ **[8]** $\begin{cases} x = X \\ y = -Y + 2n \end{cases}$



$$\begin{cases} x = X \\ \dfrac{y + Y}{2} = n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -y + 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X \\ y = -Y + 2n \end{cases}$$

REGOLA PRATICA

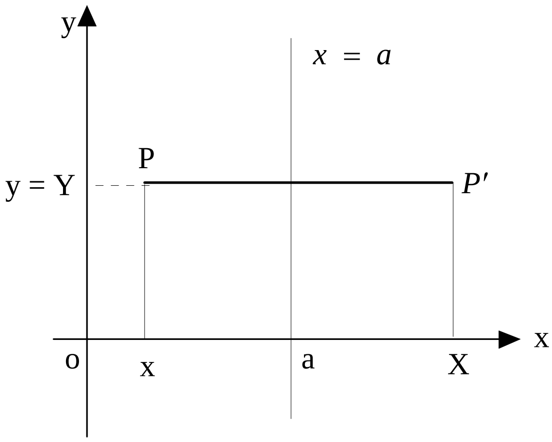
Se nell ' equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f , sostituiamo **x** con **x** ed **y** con $-y + 2n$ otteniamo l ' equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta $y = n$.

simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse delle ordinate

$r // oy \Rightarrow m = \infty$ Le relazioni [4] e [5] assumono la seguente forma se la retta r ha equazione $x = a$:

[9] $\begin{cases} X = -x + 2a \\ Y = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = -X + 2a \\ y = Y \end{cases}$ **[10]**

Dimostrazione elementare :



$$\begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = a \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -x + 2a \\ Y = y \end{cases}$$

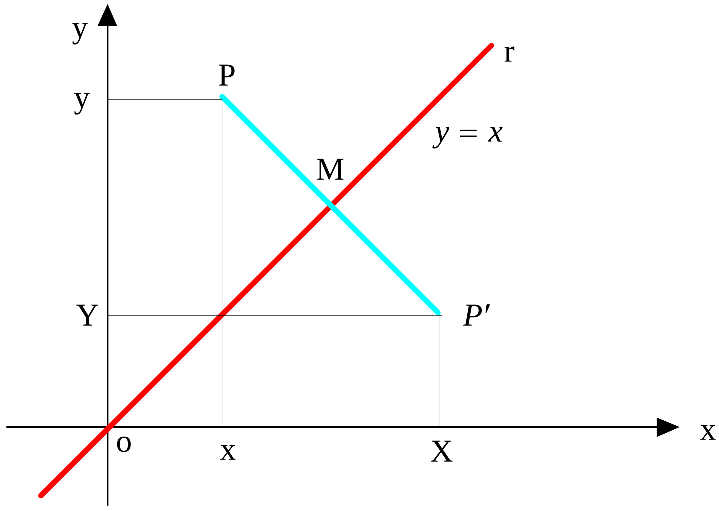
ed anche $\begin{cases} x = -X + 2a \\ y = Y \end{cases}$

REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione *f* , sostituiamo x con $2a - x$ ed y con y otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta $x = a$.

<u>Simmetria rispetto alla bisettrice fondamentale</u> : $y = x$, $m = 1$, $n = 0$

[11] $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$ $\begin{cases} x = Y \\ y = X \end{cases}$ **[12]**



REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione *f* , sostituiamo x con y ed y con x otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice fondamentale $y = x$.

<u>Simmetria rispetto alla bisettrice secondaria</u> : $y = -x$, $m = -1$, $n = 0$

[13] $\begin{cases} X = -y \\ Y = -x \end{cases}$ $\begin{cases} x = -Y \\ y = -X \end{cases}$ **[14]**

REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f , sostituiamo **x** con $-y$ ed **y** con $-x$ otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice secondaria $y = -x$.

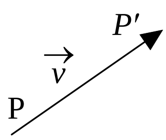
SINTESI

Sia γ una curva piana di equazione $E(x,y) = 0$. Se risulta $E(y,x) = 0$ la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice fondamentale** $y = x$, se risulta $E(-y,-x) = 0$ la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice secondaria** $y = -x$.

La traslazione

Noi sappiamo che il **vettore** è un ente matematico caratterizzato da una direzione , un verso , una lunghezza. L ' operazione di addizione di un punto P con un vettore $\vec{v}$ determina una corrispondenza biunivoca del piano π in sé . Infatti al punto P corrisponde il punto P' definito in maniera univoca dalla relazione vettoriale :

$$P' = P + \vec{v}$$



Ad essa si dà il nome di **traslazione** individuata dal vettore $\vec{v}$ e viene indicata col simbolo **T** oppure col simbolo $T_{\vec{v}}$ quando convenga richiamare il vettore da cui proviene .

I segmenti aventi per estremi punti corrispondenti sono tra loro paralleli e congruenti

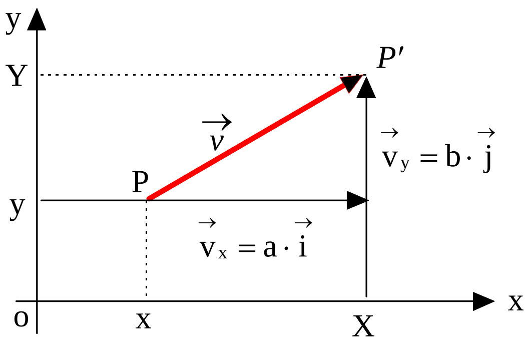
La traslazione mantiene l'orientamento nel piano .

Figure che si corrispondono in una traslazione sono uguali o isometriche o congruenti

Vediamo quali sono le equazioni di una traslazione individuata dal vettore $\vec{v}$. Nel piano , riferito ad un sistema di assi cartesiani Oxy , sia dato il vettore $\vec{v}$ di componenti cartesiane (a,b) . Indichiamo con $T_{\vec{v}}$ la traslazione da esso individuata . Se $P'(X,Y)$ è il **punto corrispondente** di $P(x,y)$ nella $T_{\vec{v}}$ abbiamo :

$P' - P = \vec{v}$ cioè : $(X - x)\vec{i} + (Y - y)\vec{j} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$, $X - x = a$, $Y - y = b$

$$T_{\vec{v}} : \begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \end{cases} \qquad T_{-\vec{v}} : \begin{cases} x = X - a \\ y = Y - b \end{cases}$$



$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} = (a,b)}$$

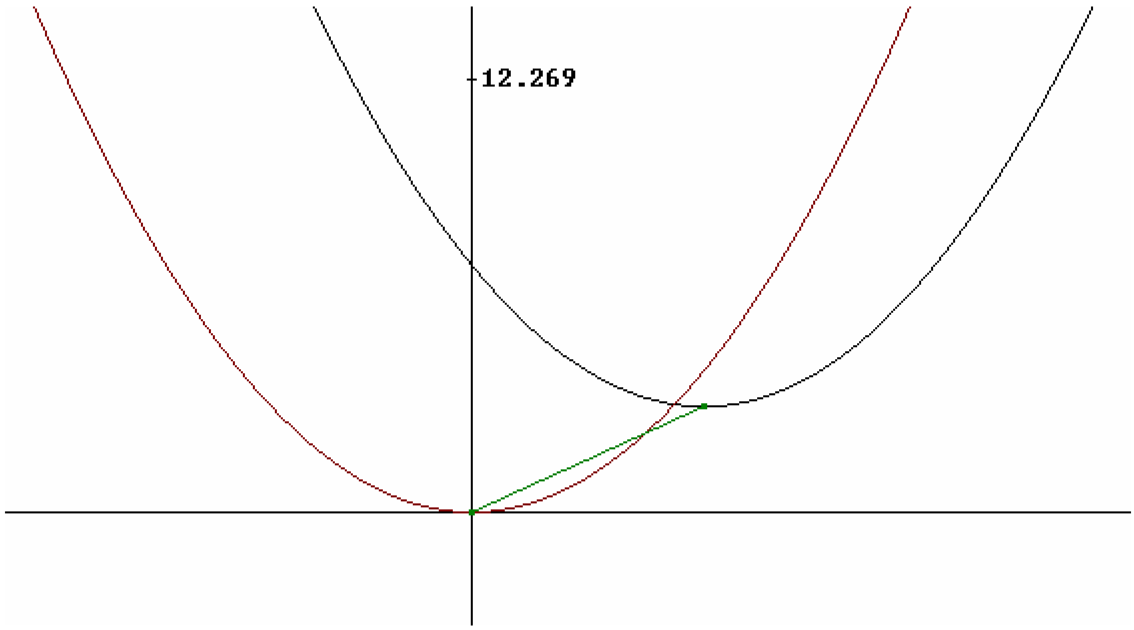
Sia γ il grafico della funzione f , cioè γ sia la curva piana di equazione $y = f(x)$. Se in questa equazione effettuiamo le sostituzioni $\begin{cases} x \leftarrow x - a \\ y \leftarrow y - b \end{cases}$ otteniamo l'equazione

$$y - b = f(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x - a) + b$$

della curva γ' , che è la **traslata** di γ secondo il vettore $\vec{v}$.

Scrivere l'equazione della parabola γ_1 **ottenuta dalla parabola** γ **di equazione** $y = x^2$ **mediante la traslazione di vettore** $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = (2,3) = (a,b)$ **.** Basta sostituire nell'equazione $y = x^2$ la **x** con $x - a = x - 2$ ed la **y** con $y - b = y - 3$.

Otteniamo : $y - 3 = (x - 2)^2$ $\boxed{y = x^2 - 4x + 7}$



La traslazione degli assi cartesiani

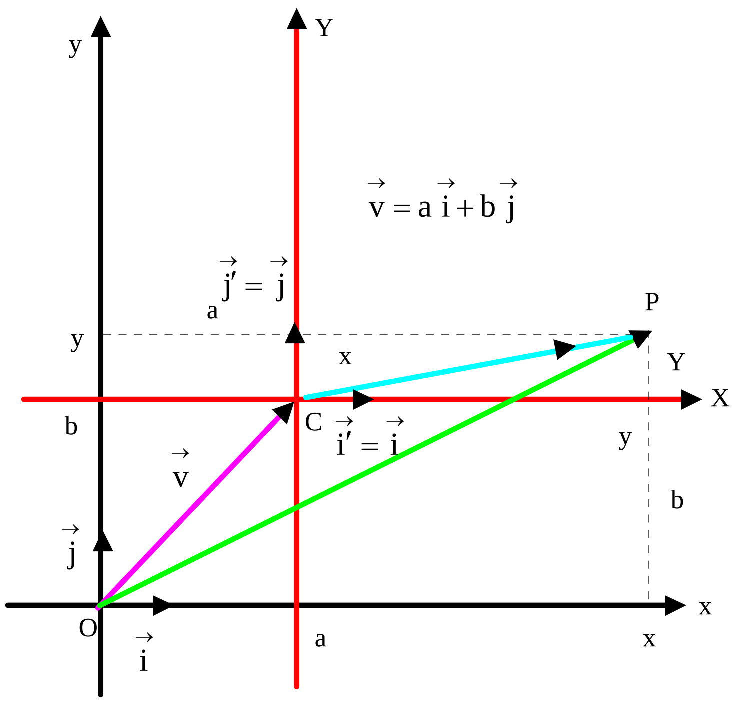
Supponiamo che il riferimento cartesiano Oxy di versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ subisca una traslazione individuata dal vettore $\vec{v} = C - O = a\vec{i} + b\vec{j}$. Il punto P ha coordinate (X, Y) rispetto al sistema di riferimento traslato XCY , (x, y) rispetto al sistema di riferimento originario *Oxy* . Risulta pure $C(a, b)$ rispetto al riferimento *Oxy* .

Rispetto al riferimento cartesiano XCY abbiamo : $P - C = X\cdot\vec{i}' + Y\cdot\vec{j}' = X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j}$

Rispetto al riferimento cartesiano *Oxy* abbiamo : $P - C = (x - a)\vec{i} + (y - b)\vec{j}$

$X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} = (x - a)\vec{i} + (y - b)\vec{j}$ **[B]** $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$ **[A]**

Queste relazioni ci consentono di passare dal riferimento cartesiano Oxy al riferimento cartesiano XCY e viceversa .



<< **Utilizzando una opportuna traslazione calcolare le coordinate del centro di simmetria** C(a,b) **di una curva piana** γ **avente equazione** $y = f(x)$ >>

Sia CXY un sistema di assi cartesiani traslato secondo il vettore $\vec{v} = C - O = (a,b) = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j}$ rispetto al sistema di assi cartesiani **Oxy** . Risulta :

$P(x,y)$ rispetto ad Oxy , P(X,Y) rispetto a CXY , $C(a,b)$ rispetto ad Oxy , $C(0,0)$ rispetto a **CXY** . $P-O=(C-O)+(P-C)$

$$x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j} + X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} = (a + X)\cdot\vec{i} + (b + Y)\cdot\vec{j}$$

Le equazioni [A] e [B] ci consentono di riferire la curva γ sia al riferimento cartesiano Oxy sia al riferimento cartesiano CXY che si ottiene dal sistema Oxy mediante una traslazione di vettore

$$\vec{v} = C - O = a\vec{i} + b\vec{j} = (a,b)$$

La curva γ di equazione $y = f(x)$ è **simmetrica rispetto al punto** $C(a,b)$, detto <u>centro di simmetria</u> , quando la traslazione [A] che porta l'origine **O** degli assi cartesiani Oxy nel punto $C(a,b)$, rende la curva γ simmetrica rispetto al punto **C** . Questo si ottiene quando la funzione $Y = f(Y)$ è **dispari** rispetto alla nuova origine **C** del nuovo sistema di riferimento cartesiano CXY . Naturalmente l'equazione $Y = f(Y)$ della curva γ **rispetto al riferimento cartesiano** CXY si ottiene dall'equazione $y = f(x)$ mediante le seguenti sostituzioni $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$.

Otteniamo : $Y + b = f(X + a)$, $Y = f(X + a) - b$. La simmetria della funzione $Y = f(X)$ vuole che sia : $Y(-X) = -Y(X)$ cioè :

$$-b + f(-X + a) = b - f(X + a) \qquad f(X + a) + f(-X + a) = 2b \qquad \textbf{[B]}$$

I valori richiesti di **a** e **b** , quando esistono , si ricavano imponendo che la [B] sia una identità , cioè imponendo che l'espressione alla sinistra del simbolo di uguaglianza sia identicamente uguale all'espressione alla destra del simbolo di uguaglianza .

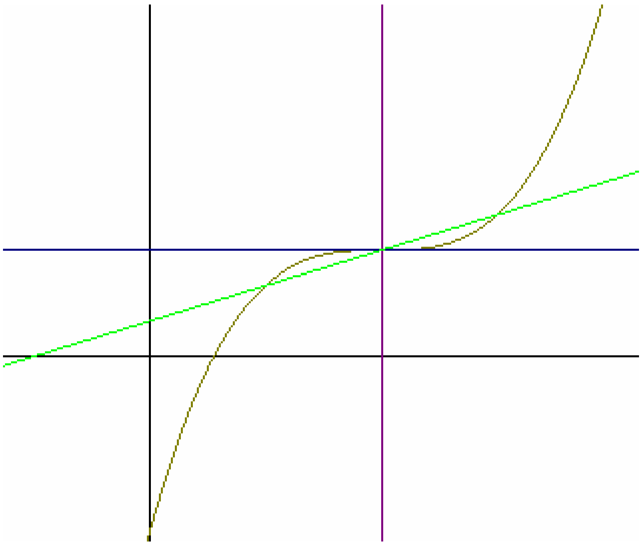
<u>**Esempio numerico**</u> : $\gamma : y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ **x = X + a , y = Y + b**

$$Y + b = (X + a)^3 - 6(X + a)^2 + 12(X + a) - 5$$

$$Y(X) = (X + a)^3 - 6(X + a)^2 + 12(X + a) - 5 - b$$

$$Y(-X) = (-X + a)^3 - 6(-X + a)^2 + 12(-X + a) - 5 - b \quad , \quad Y(-X) = -Y(X) \quad \Rightarrow$$

$$3(2-a)X^2 - a^3 + 6a^2 - 12a + b + 5 = 0$$



Tale uguaglianza è identicamente verificata (cioè è una identità e non una equazione) quando il primo membro è un polinomio identicamente nullo . Questo si verifica se :

$$\begin{cases} 2 - a = 0 \\ -a^3 + 6a^2 - 12a + b + 15 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$C(2,3)$ è il **centro di simmetria** della curva γ di equazione $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$.

Adesso vogliamo risolvere il seguente problema . << **Siano γ e γ' due curve piane aventi rispettivamente equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Stabilire se la curva γ' è la traslata della curva γ secondo il vettore $\vec{v} = (a,b)$ ed , in caso affermativo , determinare i valori di a** e **b** >>

Esempio numerico : $\gamma : y = x^3 - 3x \quad , \gamma' : y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Determiniamo l'equazione di una generica traslata della curva γ secondo il vettore $\vec{v} = (a,b)$.

Basta eseguire le seguenti sostituzioni : $\begin{cases} x \leftarrow x - a \\ y \leftarrow y - b \end{cases}$ Otteniamo :

$$y - b = (x - a)^3 - 3(x - a) \quad , \quad y = x^3 - 3ax + 3(a^2 - 1)x - a^3 + 3a + b$$

L'equazione trovata coincide con l'equazione della curva γ' se :

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = x^3 - 3ax + 3(x - a)x - a^3 + 3a + b$$

e questo si verifica se : $\begin{cases} -3a = -6 \\ 3(a^2 - 1) = 9 \\ -a^3 + 3a + b = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

Concludendo possiamo affermare che la curva γ' è la traslata della curva γ secondo il vettore $\vec{v} = (2,-1)$.