Affinità

Una funzione di R^2 in R^2 può essere considerata come una trasformazione del piano in sé , nel senso che la **trasformazione T** è una funzione che alla coppia ordinata $(x,y) \in R^2$ fa corrispondere la coppia ordinata $(X,Y) \in R^2$. In simboli possiamo scrivere :

$$\boxed{T : (x,y) \in R^2 \to (X,Y) \in R^2}$$

La più generale **trasformazione lineare** del piano in sé ci viene fornita dal seguente sistema lineare

[1] $\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}$ con $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **matrice della trasformazione** .

L'equazione in **forma matriciale** della più generale trasformazione lineare è la seguente :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

(**equazione matriciale di una trasformazione lineare**) **[2]**

La **[1]** può essere scritta anche nella seguente maniera **:** $\begin{cases} X = ax + by + e \\ Y = cx + dy + f \end{cases}$ **[1A]** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

L'equazione matriciale [2] assume la seguente forma vettoriale :

$\vec{u} = A \cdot \vec{v} + \vec{Z}$ [2°] (**equazione vettoriale** di una trasformazione lineare)

con $\vec{u} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\vec{Z} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **Definizione**

Dicesi **affinità** ogni trasformazione lineare **T** di R^2 in R^2 determinata da una matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ il cui **determinante sia diverso da zero** .

Quindi se $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \alpha \neq 0$ allora le equazioni [1] rappresentano le **equazioni cartesiane di un'affinità** .

Risolvendo il sistema [1] rispetto alle variabili **x** ed **y** otteniamo le **equazioni della trasformazione inversa** :

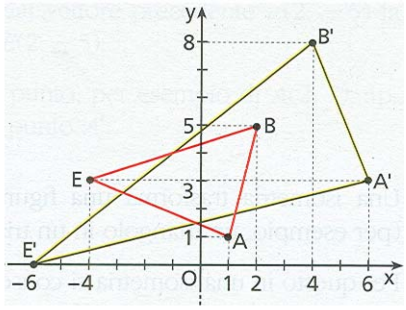
$$T^{-1} : \begin{cases} x = \dfrac{a_{22}}{\alpha} X - \dfrac{a_{12}}{\alpha} Y + \dfrac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{\alpha} = b_{11}X + b_{12}Y + b_{13} = a_1X + b_1Y + e_1 \\ y = -\dfrac{a_{21}}{\alpha} X + \dfrac{a_{11}}{\alpha} Y + \dfrac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\alpha} = b_{21}X + b_{22}Y + b_{23} = c_1X + d_1Y + f_1 \end{cases} \qquad [3]$$

Le affinità

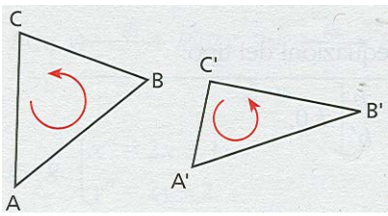
Alcuni punti e le loro immagini nell’affinità di equazioni :

$$g:\begin{cases} x' = 2x - y + 5 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

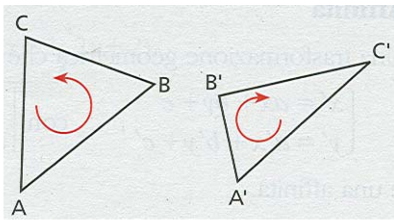
L’**affinità non conserva la distanza tra punti** . Si può dimostrare che ogni affinità trasforma rette in rette , segmenti in segmenti , poligoni in poligoni aventi lo stesso numero di lati .



Un’affinità che conserva l’orientamento degli angoli viene detta **affinità diretta** , una affinità che inverte l’orientamento degli angoli viene detta **affinità inversa** . L’affinità diretta conserva l’orientamento dei vertici di un poligono , l’affinità indiretta lo inverte .



a. Affinità diretta: in *ABC* e nella sua immagine *A'B'C'* i punti sono ordinati nello stesso verso (nel caso della figura è il verso antiorario).

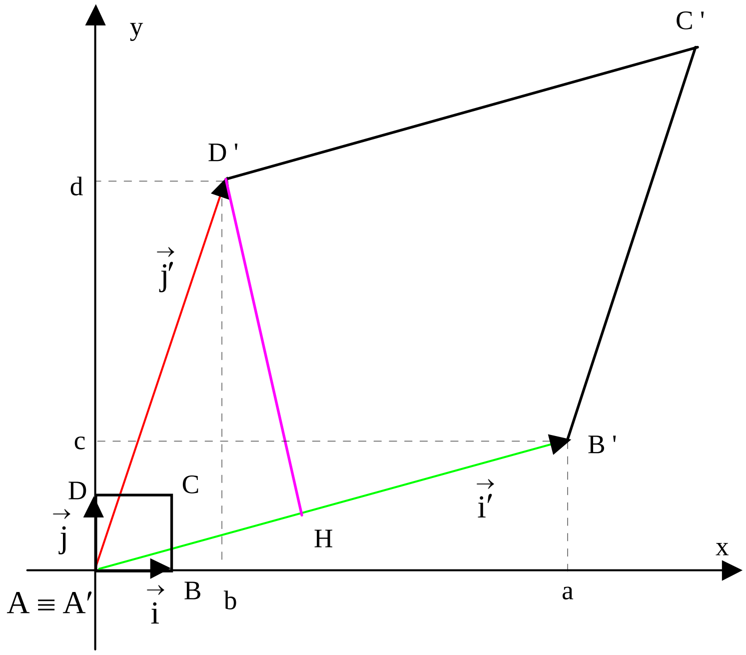


b. Affinità indiretta: in *ABC* e *A'B'C'* i punti sono ordinati nei due diversi versi (antiorario e orario).

Il segno del determinante della matrice dell’affinità ci dice se essa è **diretta o indiretta** , precisamente : $\det A > 0 \Leftrightarrow$ **affinità diretta** $\det A < 0 \Leftrightarrow$ **affinità indiretta**

Sono **affinità diretta** la **simmetria centrale** , la **rotazione** , l ‘ **omotetia** ; sono **affinità indiretta** le **simmetrie assiali** .

Significato geometrico del determinante della matrice di una affinità



L'**area del parallelogramma** $A'B'C'D'$ **nel quale si trasforma il quadrato** ABCD **di lato unitario è uguale al valore assoluto del determinante della matrice dell'affinità** .

Equazione di una affinità con un punto unito nell'origine degli assi cartesiani

Data l'affinità $\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}$ supponiamo che per essa l'origine degli assi cartesiani sia un punto unito , cioè che si abbia : $\begin{cases} 0 = a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13} \\ 0 = a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 0 + a_{23} \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \end{cases}$

Pertanto le equazioni di una affinità che ha l'origine degli assi cartesiani come **punto unito** sono :

[4] $$\boxed{\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y = ax + by \\ Y = a_{21}x + a_{22}y = cx + dy \end{cases}} \qquad a_{13} = a_{23} = 0$$

Poiché l'affinità conserva l'allineamento dei punti del piano ed il parallelismo delle rette del piano posiamo dare dell'affinità anche la seguente definizione .

Una affinità è una trasformazione del piano in sé che ha come **invarianti** l'allineamento dei punti ed il parallelismo tra rette , cioè nella **trasformazione affine** risultano **invarianti** :

a) l ' **allineamento dei punti** : punti allineati rimangono allineati

b) il **parallelismo tra rette** : rette parallele restano parallele

c) l'incidenza tra rette : se due rette si incontrano nel pun to P , le rette loro immagini s'incontrano nel punto P' , immagine di P .

Conclusione

Chiamasi **affinità** una corrispondenza biunivoca che trasforma rette in rette (**invariante dell'allineamento dei punti del piano**) , rette parallele in rette parallele (**invariante del parallelismo delle rette del piano**)

Esempio

Dato il triangolo ABC di vertici $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ determinare i vertici del suo trasformato $A'B'C'$ nell'affinità di equazioni $\begin{cases} X = -2x + y + 4 \\ Y = x - y - 3 \end{cases}$ **[5]**

Determinare , poi , gli eventuali **punti uniti** nella trasformazione assegnata .

$T : \begin{cases} X = -2x + y + 4 \\ Y = x - y - 3 \end{cases}$ **[5]** $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$

Si tratta di una **affinità** . Le equazioni della trasformazione inversa sono :

$$T^{-1} : \begin{cases} x = -X - Y + 1 \\ y = -X - 2Y - 2 \end{cases} \qquad \textbf{[6]}$$

Sostituendo nella **[5]** ad x ed y le coordinate del punto A otteniamo le coordinate del punto corrispondente A' . $A' : \begin{cases} X = -2 \cdot 0 + 0 + 4 = 4 \\ Y = 0 - 0 - 3 = -3 \end{cases}$ $A'(4;-3)$

Operando similmente otteniamo : $B'(2;-2)$ $C'(5;-4)$

Il **punto unito** U si ottiene ponendo nella **[5]** $X = x$, $Y = y$ e risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} x = -2x + y + 4 \\ y = x - y - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \qquad U(1;-1)$$

L'affinità trasforma la parabola di equazione $y = -x^2 + x + 2$ nella parabola di equazione

$$x - y - 3 = -(-2x + y + 4)^2 + (-2x + y + 4) + 2$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 13x + 6y + 7 = 0$$

Principali proprietà dell'affinità

1) Una affinità muta rette in rette , rette incidenti in rette incidenti , rette parallele in rette parallele

2) Ogni affinità conserva il punto medio di un segmento .

3) Ogni affinità **T** ha la sua inversa T^{-1} se è $\det A \neq 0$

4) Tre punti non allineati vengono trasformati in tre punti non allineati

Le affinità

5) In generale una affinità non conserva l'ampiezza degli angoli , cioè l'immagine dell'angolo α è un angolo $\alpha' \neq \alpha$.

6) In una trasformazione affine alla retta r corrisponde la retta r' non parallela ad r

7) Ogni trasformazione affine conserva il rapporto tra due segmenti che appartengono alla stessa retta o a due rette tra loro parallele . $AB \,//\, CD \ \wedge \ \dfrac{AB}{CD} = k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A'B'}{C'D'} = k$

8) Ogni trasformazione affine è **univocamente** determinata da tre punti non allineati e dai loro punti corrispondenti .

9) non si conservano i rapporti tra segmenti se questi segmenti AB e CD appartengono a rette incidenti ($\dfrac{AB}{CD} = k$, $\dfrac{A'B'}{C'D'} \neq k$) mentre si conservano i rapporti tra segmenti di una stessa retta o di rette parallele (se AB e CD sono segmenti della retta r o di due rette parallele allora $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'} = k$)

10) Si conserva il rapporto di aree di figure corrispondenti , cioè :

$$\boxed{\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = |h| = \frac{1}{|\det A|}} \qquad \boxed{\frac{S(A'B'C')}{S(ABC)} = |\det A|} \qquad \boxed{S(A'B'C') = |\det A| \cdot S(ABC)}$$

Questo significa che , dati i poligoni P e la sua immagine P' , il rapporto tra l'area del poligono P' e l'area del poligono P è $|h| = |\det A| = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |ad - bc| = \dfrac{S(P')}{S(P)}$.

Il numero $\det A$ è detto **costante o rapporto di affinità** . Quindi una **affinità ha come invariante il rapporto delle aree corrispondenti** .

In particolare se $\det A > 0$ la relativa affinità è detta **diretta** e conserva l'orientamento degli angoli , se $\det A < 0$ l'affinità è detta **inversa o indiretta** ed inverte l'orientamento degli angoli . Affermare che l'affinità conserva l'orientamento vuole dire che se l'angolo $\alpha = A\hat{B}C$ è descritto dalla rotazione antioraria (oraria) del primo lato AB fino a sovrapporsi al secondo lato BC , l'angolo $\alpha' = A'\hat{B}'C'$ è descritto dalla rotazione oraria (antioraria) di $A'B'$ fino alla sua sovrapposizione sul lato $B'C'$.

11) l 'affinità è una trasformazione che non conserva né l'estensione né la forma delle figure geometriche trasformate .

12) Una affinità è una **equivalenza** se $|\det A| = 1$. In questo caso risulta : $S' = S$.

Le affinità che connservano l'estensione delle superfici prendono il nome di equiaffinità o equivalenze .

Punti uniti in una affinità

Un punto $U(x,y)$ è **unito** in una affinità se è il corrispondente di se stesso , cioè se si verifica la seguente condizione : $\boxed{\begin{cases} x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}}$ cioè se : $\begin{cases} (1 - a_{11})x - a_{12}y = a_{13} \\ -a_{21}x + (1 - a_{22})y = a_{23} \end{cases}$

Risolvendo il sistema troviamo : $\begin{cases} x = \dfrac{a_{13}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{23}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \\ y = \dfrac{a_{23}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{13}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \end{cases}$ **[D]**

Il sistema dato ammette in $R^2 = R \times R$ una ed una sola soluzione se e solo se :

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} \neq 0$$

In tal caso la trasformazione affine presenta un **solo punto unito** e le rette $(1 - a_{11})x - a_{12}y = a_{13}$, $-a_{21}x + (1 - a_{22})y = a_{23}$ sono incidenti in quanto s'incontrano nel punto unito U.

Se invece è : $\boxed{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0}$ il sistema può ammettere **infinite soluzioni** (l'affinità presenta **infiniti punti uniti**) o **nessuna soluzione** (l'affinità **non presenta punti uniti**) a seconda che i numeratori delle due frazioni **[D]** che individuano i numeri **x** ed **y** siano o non siano entrambi nulli . Nel primo caso sarà : $r(A) = r(B) = 1$, nel secondo caso sarà : $r(A) \neq r(B)$.

Rette unite in una affinità

Una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è **unita** nell'affinità **[5]** se è la corrispondente di se stessa . Ricerchiamo , se esistono , le **rette unite** dell'affinità **[5]** .

$r : ax + by + c = 0$ mediante le sostituzioni $\boxed{x \leftarrow -x - y + 1}$, $\boxed{y \leftarrow -x - 2y - 2}$ troviamo l'equazione della retta r' corrispondente di r nell'affinità **[5]** .

$\boxed{(a + b)x + (a + 2b)y - a + 2b - c = 0}$ $r' \equiv r$ se :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a+2b}{b} = \frac{-a+2b-c}{c}$$

Le affinità

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a+2b}{b} \\ \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{-a+2b-c}{c} \\ \dfrac{a+2b}{b} = \dfrac{-a+2b-c}{c} \end{cases}$$

Se questo sistema ammette soluzioni , allora l'affinità ammette **rette unite** .

Una affinità può ammettere anche infinite rette unite

Trovare le rette unite dell'affinità $\boxed{\begin{cases} X = x + \frac{1}{2}y - 1 \\ Y = \frac{1}{2}x + y + 2 \end{cases}}$ **[8]**

La reta r' di equazione $aX + bY + c = 0$ è la corrispondente della retta r la cui equazione si ottiene mediante la sostituzione **[8]** .

$r' : aX + bY + c = 0 \Rightarrow$ r : $(2a+b)x + (a+2b)y - 2a + 4b + 2c = 0$ **[9]**

$r' \equiv r$ se : $\dfrac{2a+b}{a} = \dfrac{a+2b}{b} = \dfrac{-2a+4b+2c}{c}$ $\begin{cases} \cancel{2ab} + b^2 = a^2 + \cancel{2ab} \\ \cancel{2ac} + bc = -2a^2 + 4ab + \cancel{2ac} \\ ac + \cancel{2bc} = -2ab + 4b^2 + \cancel{2bc} \end{cases}$

$\begin{cases} b^2 = a^2 \\ bc = -2a^2 + 4ab \\ ac = -2ab + 4b^2 \end{cases}$ Le soluzioni di questo sistema sono : $\begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ b = \frac{1}{2}c \end{cases}$ $\begin{cases} a = \frac{1}{6}c \\ b = -\frac{1}{6}c \end{cases}$

Sostituendo i valori trovati nella **[9]** otteniamo :

$\frac{1}{2}\cancel{c}x + \frac{1}{2}\cancel{c}y + \cancel{c} = 0$ $x + y = 2 = 0$ $\frac{1}{6}\cancel{c}x - \frac{1}{6}\cancel{c}y + \cancel{c} = 0$ $x - y + 6 = 0$

Potremmo procedere anche nella seguente maniera :

La reta r' di equazione $Y = mX + n$ è la corrispondente della retta r la cui equazione si ottiene mediante la sostituzione **[8]** .

$r' : Y = mX + n \Rightarrow$ r : $\frac{1}{2}x + y + 2 = m\left(x + \frac{1}{2}y - 1\right) + n$ **[10]** $y = \dfrac{2m-1}{2-m}x + \dfrac{2m-2n+4}{m-2}$

$r' \equiv r$ se : $\dfrac{2m-1}{2-m} = m$, $\cancel{2m} - 1 = \cancel{2m} - m^2$ $m = \pm 1$, $\dfrac{2m-2n+4}{m-2} = n$ $m = 1 \Rightarrow n = 6$ $y = x + 6$

$m = -1 \Rightarrow n = -2$ $y = -x - 2$ $x + y + 2 = 0$

Alla famiglia di rette aventi equazione $Y = mX + n$ non appartengono le rette parallele all'asse delle ordinate . Bisogna,pertanto,vedere se nell'affinità proposta ci sono rette unite del tipo $X = h$ $(m = tg\,\vartheta = \infty \ , \ \vartheta = \frac{\pi}{2})$, cioè rette parallee all'asse delle ordinate le quali hanno equazioni del tipo $X = h \ (m = tg\,\vartheta = \infty)$.

Effettuata la sostituzione otteniamo : $x + \frac{1}{2}y - 1 = h \ , \ 2x + y - 2 = 2h \ , \ y = -2x + 2 + 2h$.

Si tratta di un fascio di rette formanti con l'asse x un angolo $\vartheta = arctg(-2)$ e nessuna di esse può essere parallela all'asse delle ordinate . Quindi l'affinità proposta non possiede rette unite del tipo $X = h$, cioè non presenta rette unite parallele all'asse delle ordinate . Infatti non eiste alcun valore del parametro h in corrispondenza del quale la retta del fascio $y = -2x + 2 + 2h$ risulti parallela all'asse y .Questo procedimento va utilizzato quando l'affinità presente infiniti punti uniti . Se l'affinità presenta un solo punto unito U è preferibile utilizzare il procedimento che esporremo in seguito .

Autovalori , autovettori e rette unite in una affinità

Consideriamo l'affinità che abbia l'origine degli assi cartesiani come **punto unito** .

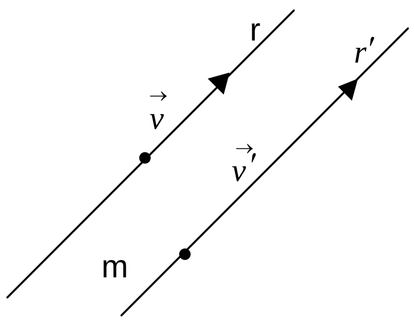
T: $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\det A \neq 0$ $T^{-1}: \begin{cases} x = a_1 X + b_1 Y \\ y = c_1 X + d_1 Y \end{cases}$ $A' = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ $\det A' \neq 0$

Alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$ l'affinità fa corrispondere la retta r' di equazione $a_1 X + b_1 Y + c_1 = 0$ e viceversa . In generale la retta r non è parallela alla retta r' .

In questo paragrafo vogliamo vedere se esistono e come si trovano , in una qualsiasi **trasformazione affine** , le **direzioni che rimangono invariate** . [28] Inizialmente analizzeremo l'affinità che ha l'origine degli assi cartesiani come **punto unito** .

Se esiste una direzione **m** che rimane invariata nella trasformazione affine , allora esiste qualche vettore (ad esempio $\vec{v} = (x, y)$) che rimane **parallelo a se stesso** . Indicato con $\vec{v} = (x, y)$ tale vettore e con $\vec{v}' = (X, Y)$ il suo corrispondente nell'affinità , deve valere la relazione $\vec{v}' = k \cdot \vec{v}$ con $k \in R^*$

[28] **direzione** è sinonimo di fascio di rette parallele



r ed r' sono due sostegni distinti di una medesima direzione m

$$\vec{v}' = k \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

Due vettori sono uguali hanno uguali le componenti omonime ; quindi possiamo scrivere :

$$\begin{cases} ax + by = kx \\ cx + dy = ky \end{cases} \quad \begin{cases} (a - k)x + by = 0 \\ cx + (d - k)y = 0 \end{cases} \quad \textbf{[29]}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo costituito da due equazioni in due incognite .

Esso ammette soluzioni se è nullo il determinante dei suoi coefficienti , cioè se :

[29a] $$\boxed{\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} = 0} \qquad (a - k)(d - k) - bc = 0 \qquad k_1 = \qquad k_2 =$$

Questa equazione di secondo grado in k prende il nome di **equazione caratteristica dell'affinità** .

Le sue radici k_1 , k_2 prendono il nome di **autovalori dell'affinità** , o **autovalori della matrice A** .

Se gli autovalori k_1 , k_2 sono **reali e distinti** l'affinità ha due direzioni invarianti , se sono **reali e coincidenti** l'affinità ha una sola direzione invariante , se sono **complessi e coniugati** l'affinità non presenta direzioni invarianti . [29]

Per determinare le **direzioni invarianti** basta risolvere i due seguenti sistemi lineari omogenei :

$$\begin{cases} (a - k_1)x + by = 0 \\ cx + (d - k_1)y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a - k_2)x + by = 0 \\ cx + (d - k_2)y = 0 \end{cases}$$

Ogni soluzione del sistema lineare [29] prende il nome di **autovettore dell'affinità corrispondente all'autovalore k** ,o **autovettore della matrice A . Ogni autovettore individua una** direzione invariante **dell'affinità .**

La risoluzione del sistema lineare omogeneo [29] può portarci ad una delle seguenti conclusioni :

1) Troviamo una relazione algebrica che lega la y alla x . Ad esempio troviamo : $\begin{cases} y = mx \\ y = mx \end{cases}$

Questo significa che tutti i punti della retta $y = mx$ sono soluzioni e quindi $m = \dfrac{y}{x}$ rappresenta una direzione invariante .

[29] Una direzione m si identifica con un fascio di rette parallele e due di esse possono essere le rette r ed r' sostegni rispettivamente dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{v}'$

2) Le due equazioni del sistema [29] sono due identità . Ad esempio sia : $\begin{cases} x = x \\ y = y \end{cases}$

In tale caso tutti i punti del piano sono soluzioni del sistema [2] ed ogni direzioni del piano è invariante .

3) Il sistema [29] non ammette soluzioni . Questo si verifica quando la prima equazione del sistema è **incompatibile** con la seconda equazione del sistema . In questo caso l'affinità non ha alcuna direzione invariante .

Determinare le direzioni invarianti dell'affinità : $\boxed{\begin{cases} X = 3x + y \\ Y = x + 3y \end{cases}}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\det A = 8 \neq 0$

Scrivo l' **equazione caratteristica** dell'affinità : $\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$ $(3-k)^2 - 1 = 0$

$k^2 - 6k + 8 = 0$ $k_1 = 2$ e $k_2 = 4$ sono i due **autovalori** dell'affinità .

Mi calcolo l'**autovettore** corrispondente all'autovalore $k_1 = 2$.

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -x \\ m = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$m = -\dfrac{y}{x} = -1$ è una **direzione invariante** dell'affinità

Mi calcolo l'**autovettore** corrispondente all'autovalore $k_2 = 4$.

$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x \\ m = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$m = \dfrac{y}{x} = 1$ è la seconda **direzione invariante** dell'affinità

Le due rette $y = \pm x$ sono **rette unite** in quanto sono rette delle due direzioni invarianti dell'affinità e passano per il **punto unito** $U(0,0)$ dell'affinità **.**

Altro procedimento

$r' : Y = mX + n$ $x + 3y = m(3x + y)$ $y = \dfrac{3m-1}{3-m}x$ (retta r) $r \equiv r'$ se :

$\dfrac{3m-1}{3-m} = m$ $3m - 1 = 3m - m^2$ $m^2 = 1$ $m = \pm 1$

Le affinità

N.B. Se m_1 è una **direzione invariante** dell'affinità $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$, allora la retta $y = m_1 x$ di tale direzione è anche **retta unita** dell'affinità $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$, cioè la sua corrispondente è la retta di equazione $y = m_1 x$. Questo perché la retta $y = m_1 x$ passa per il punto unito $U(0,0)$ dell'affinità $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$. Invece la retta $y = m_1 x + n$ della direzione m_1 si trasforma nella retta parallela $y = m_1 x + n_1$ diversa dalla retta $y = m_1 x + n$, cioè la retta $y = m_1 x + n$ della direzione m_1 non è una retta unita in quanto essa non passa per il punto unito $U(0,0)$ dell'affinità $\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$.

Per individuare le **rette unite** di una generica affinità $\begin{cases} X = ax + by + e \\ Y = cx + dy + f \end{cases}$ **[31]** si procede come segue :

• Si effettua la traslazione $\begin{cases} X' = X - e = ax + by \\ Y' = Y - f = cx + dy \end{cases}$ ottenendo l'affinità : $\begin{cases} X' = ax + by \\ Y' = cx + dy \end{cases}$ che ha l ' origine come **punto unito**

• Si trovano gli autovalori e gli autovettori di questa nuova affinità . Gli autovettori trovati , se esistono , rappresentano le **direzioni invarianti** dell'affinità [31] . Supponiamo che tali direzioni siano m_1 ed m_2 .

• Si trova il punto unito **U** dell'affinità [31] . Le rette unite hanno equazioni :

$$y - y_U = m_1(x - x_U) \qquad\qquad y - y_U = m_2(x - x_U)$$

Trovare le rette unite dell'affinità [31a] $\boxed{\begin{cases} X = x + \frac{1}{2}y - 1 \\ Y = \frac{1}{2}x + y + 2 \end{cases}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\det A \neq 0$

Mi calcolo gli autovalori della matrice A risolvendo la seguente equazione caratteristica :

$\begin{vmatrix} 1 - k & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - k \end{vmatrix} = 0 \quad (1 - k)^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad k_1 = \frac{1}{2}$ e $k_2 = \frac{3}{2}$ sono gli **autovalori** della matrice A .

$k_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$ $\quad y = -x$, $m = -1$ è la prima **direzione invariante** dell'affinità

$$k_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 0 \end{cases} \qquad y = x \ , \ m = 1$$ è la seconda **direzione invariante** dell'affinità

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ **primo autovettore** dell'affinità

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ **secondo autovettore** dell'affinità

Mi calcolo il **punto unito** dell'affinità :

$$\begin{cases} x = x + \frac{1}{2}y - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + y + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \boxed{U(-4,+2)}$$

$y - 2 = -(x + 4)$ $\boxed{y = -x - 2}$ **prima retta unità dell'affinità**

$y - 2 = x + 4$ $\boxed{y = x + 6}$ **seconda retta unità dell'affinità**

N.B. Le rette $y = \pm x$ **direzioni invarianti** dell'affinità $\begin{cases} X' = X - 1 = x + \frac{1}{2}y \\ Y' = Y - 2 = \frac{1}{2}x + y \end{cases}$ sono anche **rette unite** della suddetta affinità in quanto passano per il suo punto unito $U \equiv O(0,0)$.

Tuttavia , in generale , le suddette rette $y = \pm x$ non rimangono necessariamente unite nell'affinità $\begin{cases} x = x + \frac{1}{2}y - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + y + 2 \end{cases}$. Rimangono unite soltanto le rette delle direzioni invarianti che passano per il punto unito **U** dell'affinità generale .

$$y = x + 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} + y + 2 = x + \frac{y}{2} - 1 + 6 \quad \Rightarrow \quad y = x + 6$$

$$y = -x - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} + y + 2 = -x - \frac{y}{2} + 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 2$$

$$y = -x \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} + y + 2 = -x - \frac{y}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -x - \frac{2}{3}$$

La retta $y = -x$, sostegno delle direzione invariante $m = -1$, non si trasforma in se stessa , cioè non è retta unita dell'affinità $\begin{cases} x = x + \dfrac{1}{2}y - 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + y + 2 \end{cases}$, ma si trasforma in un sostegno parallelo della direzione invariante $m = -1$. Questo perché la retta $y = -x$ non passa per il punto unito $U(-4,-2)$ dell ' affinità $\begin{cases} x = x + \dfrac{1}{2}y - 1 \\ y = \dfrac{1}{2}x + y + 2 \end{cases}$.

Altro procedimento per il calcolo delle rette unite di una affinità

Sia r' la retta corrispondente della retta r nell'affinità T , quando questa presenta un solo punto unito **U** . r è **retta unita** dell'affinità T se risulta $r \equiv r'$. La retta unita r' , se esiste , deve passare par il punto unito $U\left(x_U, y_U\right)$ di T e quindi deve avere equazione $\boxed{Y - y_Y = m(X - x_U)}$ **[§§]**

L'affinità T , avente un solo punto unito **U** , trasforma la retta r' nella retta r la cui equazione cartesiana è :

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - y_U = m(a_{12}x + a_{12}y + a_{13} - x_U)$$

Questa equazione , ridotta a forma canonica , assume la forma : $y = p(m)\cdot x + q(m)$

$r \equiv r'$ se : $\boxed{p(m) = m}$ equazione di secondo grado in m le cui soluzioni ci danno le direzioni invarianti dell'affinità . Sostituendo questi valori nella **[§§]** otteniamo le equazioni delle rette unite dell'affinità .

Come esempio numerico posiamo considerare l'affinità [31a] . $Y - 2 = m(X + 4)$ [$$]

$$\frac{1}{2}x + y + 2 - 2 = m(x + \frac{1}{2}y - 1 + 4) \qquad y = \frac{2m - 1}{2 - m}x + \frac{2(3m - 4)}{2 - m}$$

$$\frac{2m - 1}{2 - m} = m \quad \Rightarrow \quad 2m - 1 = m(2 - m) \quad m^2 - 1 = 0 \quad m = \pm 1$$

Sostituendo nell'equazione [$$] otteniamo le equazioni cartesiane delle due rette unite dell'affinità .

$$\boxed{y = -x - 2} \qquad \boxed{y = x + 6}$$

Conclusione

• In una trasformazione affine che abbia l'origine degli assi cartesiani come **punto unito** dicesi **autovettore dell'affinità** o **autovettore della matrice A** che individua l'affinità un qualsiasi vettore $\vec{v} = (x, y)$ che abbia come corrispondente il vettore parallelo $\vec{v}' = (X, Y) = k \cdot \vec{v}$.

• Per individuare le rette unite di una generica affinità $\begin{cases} X = ax + by + e \\ Y = cx + dy + f \end{cases}$ si procede come segue :

1) Si individuano gli **autovalori** della matrice A risolvendo l' **equazione caratteristica**

$$\boxed{\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} = 0}$$

In generale gli autovalori sono due k_1 , k_2

2) Si individuano gli **autovettori** della matrice A risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} (a - k_{1,2})x + by = 0 \\ cx + (d - k_{1,2})y = 0 \end{cases}$$

I due **autovettori** trovati individuano le due direzioni m_1 , m_2 invarianti dell'affinità .

3) Si individua il **punto unito U** dell'affinità $\begin{cases} X = ax + by + e \\ Y = cx + dy + f \end{cases}$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = ax + by + e \\ y = cx + dy + f \end{cases}$$

4) Le **rette unite** sono scelte fra le rette delle direzioni invarianti passanti per il punto unito . Le loro equazioni sono : $y - y_U = m_1(x - x_U)$ $\quad y - y_U = m_2(x - x_U)$

Considerato il triangolo ABC con $A(2;-2)$, $B(6;2)$, $C(4;5)$, determinare le coordinate del triangolo $A'B'C'$ trasformato del dato nell'affinità di equazioni $\begin{cases} X = -x + y + 1 \\ Y = x - 3y + 2 \end{cases}$ **[1]**

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. **Determinare le aree S ed S' dei triangoli ABC ed $A'B'C'$ e verificare che** $\dfrac{S'}{S} = \det A$ **essendo A la matrice dell'affinità [1] .**

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$ $\quad A(2;-2) \to A'(-5;10)$ $\quad B(6;2) \to B'(-5;2)$

$C(4;5) \to C'(0;-9)$ $\quad S(ABC) = 10$ $\quad S(A'B'C') = 20$ $\quad \det A = 2$

$$\boxed{\frac{S(A'B'C')}{S(ABC)} = \frac{20}{10} = 2 = \det A}$$

Determinare i rapporti di stiramento e le direzioni invarianti nella trasformazione affine definita dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} X = 3x + y \\ Y = x + 3y \end{cases}$

Scriviamo e risolviamo l'equazione caratteristica della trasformazione : $\begin{vmatrix} 3 - k & 1 \\ 1 & 3 - k \end{vmatrix} = 0$

$(3 - k)^2 - 1 = 0 \quad 3 - k = \pm 1 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 4$

Direzione (**autovettore**) corrispondente all'autovalore $k_1 = 2$

$$\begin{cases} 2x = 3x + y \\ 2y = x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ Y = -x \end{cases} \qquad y = -x \qquad (\ m_1 = -1 \ )$$

Nell'affinità proposta la retta $y = -x$ si trasforma in se stessa .

Infatti : $x \leftarrow 3x + y \ , \ y \leftarrow x + 3y \qquad x + 3y = 3x + y \qquad 4y = -4y \qquad y = -x$

Direzione (**autovettore**) corrispondente all'autovalore $k_2 = 4$

$$\begin{cases} 4x = 3x + y \\ 4y = x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ Y = x \end{cases} \qquad (\ m_2 = 1 \ )$$

Quindi $y = -x$ ed $y = x$ sono le sole **due rette unite** dell'affinità proposta .