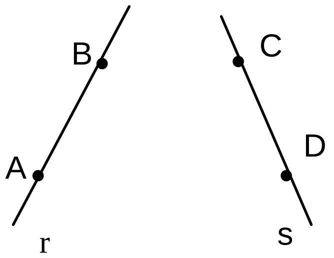
La similitudine



In una affinità , se i segmenti AB e CD hanno direzioni diverse , i rapporti $\dfrac{A'B'}{AB}$ e $\dfrac{C'D'}{CD}$ sono , di solito , diversi . E' lecito chiedersi se esistono **particolari affinità** nelle quali il rapporto tra $A'B'$ e AB , con $A'B'$ corrispondente di AB nell'affinità considerata sia costante , cioè non dipenda dai punti **A** e **B** scelti .

Si dimostra che una tale affinità esiste e prende il nome di **similitudine .**

Definizione

Dicesi **similitudine** l'affinità che mantiene costante il rapporto tra un qualunque segmento PQ ed il suo corrispondente $P'Q'$:

$$\frac{P'Q'}{PQ} = k$$

Il numero reale positivo **k** prende il nome di **rapporto di similitudine** . Consideriamo la trasformazione lineare (**affinità**) :

$$T : \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{cioè [4]} \quad \begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\det A \neq 0$ $P(x, y)$ e $P'(X, Y)$ sono i punti che si corrispondono nell'affinità considerata .

Questa affinità è una **similitudine** se : $d(P'Q') = k \cdot d(PQ)$ e questo si verifica se :

$$\boxed{a_{21} = \pm a_{12}} \qquad \boxed{a_{22} = \pm a_{11}} \qquad \boxed{k = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}$$

$\boxed{a_{22} = a_{11}}$ $\boxed{a_{21} = -a_{12}}$ $\Rightarrow \det A = a^2 + b^2 > 0$ $\det A = k^2 =$ **similitudine diretta**

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ Y = -a_{12}x + a_{11}y + a_{23} \end{cases} \quad [5] \quad \begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = -bx + ay + d \end{cases} \quad [5a] \quad \begin{cases} a_{11} = a \\ a_{12} = b \end{cases} \quad \begin{cases} a_{13} = c \\ a_{23} = d \end{cases}$$

$\boxed{a_{22} = -a_{11}}$ $\boxed{a_{21} = a_{12}}$ $\Rightarrow \det A = -\left(a^2 + b^2\right) < 0$ $\det A = -k^2 =$ **similitudine indiretta**

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ Y = a_{12}x - a_{11}y + a_{23} \end{cases} \quad \textbf{[6]} \qquad \begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = bx - ay + d \end{cases} \quad \textbf{[6a]}$$

Tutte le proprietà delle affinità valgono per le similitudini essendo quest'ultime particolari affinità .

$$k = |\det A| \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

Ogni similitudine ammette la sua inversa le cui equazioni si ottengono risolvendo il sistema [5] o il sistema **[6]** .

$$\begin{cases} x = a_1 X - b_1 Y + c_1 \\ y = b_1 X + a_1 Y + c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a_1 X + b_1 Y + c_1 \\ y = b_1 X - a_1 Y + c_2 \end{cases}$$

Proprietà

1) La **similitudine conserva l'ampiezza degli angoli** .

2) La **similitudine conserva il rapporto tra segmenti corrispondenti** e tale rapporto è uguale al rapporto di similitudine.

$$\frac{A'B'}{AB} = k \Rightarrow \frac{p(A'B'C')}{p(ABC)} = k \Rightarrow \frac{p(A'B'C'D'E')}{p(ABCDE)} = k$$

3) Una similitudine di rapporto **k** trasforma un triangolo ABC di area $S(ABC)$ in un triangolo $A'B'C'$ di area $S(A'B'C')$ con $\boxed{S(A'B'C') = k^2 \cdot S(ABC)}$ cioè il rapporto tra figure geometriche che si corrispondono in una similitudine è costante ed è uguale al quadrato del rapporto di similitudine : $\boxed{\dfrac{S(A'B'C')}{S(ABC)} = k^2}$.

4) In una **similitudine diretta** (<u>indiretta</u>) il determinante della matrice della trasformazione è **positivo** (<u>negativo</u>) .

5) Il numero $k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} = \sqrt{|\det A|}$ è detto **rapporto di similitudine** ed esprime il rapporto tra le lunghezze di segmenti corrispondenti .

7) Una similitudine trasforma una retta r in un'altra r' non parallela ad r

8) Una similitudine che non sia una traslazione ha sempre un **punto unito** , detto centro della similitudine .

• la similitudine avente come equazioni le [5] è detta **similitudine diretta** , la similitudine avente come equazioni le [6] è detta **similitudine indiretta** .

Punti uniti e rette unite in una similitudine

Si procede come per l'affinità .

Studiare la similitudine diretta : $\boxed{\begin{cases} X = x + y - 6 \\ Y = -x + y - 2 \end{cases}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $Det\,A = 2$

$k = \sqrt{|\det A|} = \sqrt{2}$ = **rapporto di similitudine**

Ricerca dei punti uniti : $X = x$, $Y = y$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = x + y - 6 \\ y = -x + y - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 6 \\ x = -2 \end{cases}$

$U(-2;6)$ **punto unito** della similitudine = **centro della similitudine**

$A(0;5) \to A_1(-1;3)$ $B(1;1) \to B_1(-4;4)$ Al triangolo UAB corrisponde il triangolo UA_1B_1

Vediamo se questa similitudine ha **rette unite** . Sia $Y = mX + n$ la retta r' corrispondente di **r**

$-x + y - 2 = m(x + y - 6) + n$ $-x + y - 2 = mx + my - 6m + n$

$(1-m)y = (1+m)x + 2 + n - 6m \qquad y = \dfrac{1+m}{1-m}x + \dfrac{2+n-6m}{1-m}$ retta **r**

$r \equiv r'$ se $m_r = m_{r'}$, $n_r = n_{r'}$ cioè se : $\begin{cases} \dfrac{1+m}{1-m} = m \\ \dfrac{2+n-6m}{1-m} = n \end{cases} \qquad 1 + m = m - m^2 \qquad \boxed{m^2 = -1}$

La similitudine proposta non presenta rette unite

Studiare la similitudine indiretta : $\boxed{\begin{cases} X = 3x + 4y - 24 \\ Y = 4x - 3y - 12 \end{cases}} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad Det\,A = -25$

$k = \sqrt{|\det A|} = \sqrt{25} = 5$ = **rapporto di similitudine**

Ricerca dei punti uniti : $X = x$, $Y = y \Rightarrow \begin{cases} x = 3x + 4y - 24 \\ y = 4x - 3y - 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ 4x - 4y = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 6 \end{cases}$ $\quad U(6;3)$ = **punto unito** della similitudine = **centro della similitudine**

Ricerca delle rette unite . Sia $Y = mX + n$ la retta r' corrispondente di **r**

$4x - 3y - 12 = m(3x + 4y - 24) + n \qquad 4x - 3y - 12 = 3mx + 4my - 24m + n$

$(3+4m)y = (4-3m)x + 24m - n - 12 \qquad y = \dfrac{4-3m}{3+4m}x + \dfrac{24m-n-12}{3+4m}$ retta **r**

$r \equiv r'$ se $m_r = m_{r'}$, $n_r = n_{r'}$ cioè se : $\begin{cases} \dfrac{4-3m}{3+4m} = m \\ \dfrac{24m-n-12}{3+4m} = n \end{cases} \qquad 4 - 3\mathrm{m} = 3\mathrm{m} + 4\mathrm{m}^2$

$\boxed{2m^2 + 3m - 2 = 0} \qquad m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4}$, $m_1 = -2$, $\mathrm{m}_2 = \dfrac{1}{2} \qquad n_1 = 15$, $n_2 = 0$

$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$ le due rette unite sono fra loro **perpendicolari**

La similitudine proposta presenta le due seguenti rette unite : $y = -2x + 15$, $y = \dfrac{1}{2}x$

$M(5;5) \rightarrow M_1(11;7) \qquad N(2;1) \rightarrow N_1(-14;-7)$ Al triangolo UMN la similitudine , che ha due rette unite passanti per il centro di similitudine **U** e fra loro perpendicolari , fa corrispondere il triangolo UM_1N_1 .