Le omotetie

Definizione : Una **omotetia** è una particolare similitudine con $b = 0$, a = k , cioè una similitudine avente come matrice $A=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, che è una matrice diagonale con la diagonale principale formata da elementi uguali . Le equazioni di una omotetia sono le seguenti :

[33] $\begin{cases} X = kx + c \\ Y = ky + d \end{cases}$ $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ **[33a]**

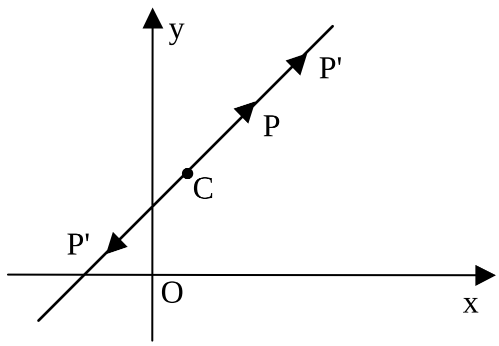
Risolvendo il sistema [33] rispetto alle variabili x ed y ricaviamo le equazioni cartesiane della trasformazione inversa . Esse sono : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{k}X + \dfrac{c}{k} \\ y = \dfrac{1}{k}Y + \dfrac{d}{k} \end{cases}$ [34]

Esiste un solo punto unito U le cui coordinate cartesiane si ottengono risolvendo il seguente sistema : $\begin{cases} x = kx + c \\ y = ky + d \end{cases}$ $U\left(\dfrac{c}{1-k}, \dfrac{d}{1-k}\right)$

Il punto U , che noi indicheremo con la lettera C , prende il nome di **centro dell'omotetia** .

Si può dimostrare che l'omotetia è la trasformazione del piano in sé che al punto $P(x,y)$ fa corrispondere il punto $P'(X,Y)$ legati tra di loro dalla seguente relazione vettoriale :

$$P' - C = k \cdot (P - C) \quad \text{con} \quad k \in R^*$$



Viceversa possiamo utilizzare questa proprietà per definire l'omotetia come la trasformazione del piano in sé che al punto $P(x,y)$ fa corrispondere il punto $P'(X,Y)$ legati tra di loro dalla seguente relazione vettoriale : $P' - C = k \cdot (P - C)$ con $k \in R^*$

Si dimostra , poi , che le [33] sono le equazioni di una omotetia .

I punti P , P' , C sono sempre allineati .

Se $C \equiv O$ otteniamo : **[34a]** $\begin{cases} X = kx \\ Y = ky \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{k}X \\ y = \dfrac{1}{k}Y \end{cases}$

Il numero reale relativo non nullo k prende il nome di **rapporto di omotetia** . Se il rapporto di omotetia k è **positivo** l'omotetia si dice **diretta** ed i vettori $P-C$ e $P'-C$ sono paralleli ed equiversi ; se è $k < 0$ l'omotetia si dice **indiretta** ed i vettori $P-C$ e $P'-C$ sono paralleli ed opposti . Inoltre , se AB ed $A'B'$ sono segmenti che si corrispondono nell'omotetia , allora $k>0$ $\Rightarrow$ $B-A$ e $B'-A'$ vettori paralleli ed equiversi , $k < 0$ $\Rightarrow$ $B-A$ e $B'-A'$ vettori paralleli ed opposti .

Proprietà dell 'omotetia

01) **Ogni omotetia ha la sua inversa**

02) **L'omotetia conserva la forma delle figure corrispondenti ma non ne conserva l'estensione**

03) Il **rapporto tra segmenti corrispondenti è costante** e risulta uguale (in valore assoluto) alla costante di omotetia $|k|$

04) Il rapporto tra i contorni (**perimetri**) delle figure corrispondenti è uguale (in valore assoluto) alla costante di omotetia : $\dfrac{2p'}{2p} = |k|$

05) Il rapporto delle superfici di figure omotetiche è uguale al quadrato del rapporto di omotetia

06) Se $k = -1$ l'omotetia è una **simmetria centrale** di centro $C\left(\dfrac{c}{2};\dfrac{d}{2}\right)$ e di equazioni

$$\begin{cases} X = -x + c \\ Y = -y + d \end{cases}$$

07) Se $k = 1$ l'omotetia è una **traslazione** di equazioni : $\begin{cases} X = x + c \\ Y = y + d \end{cases}$

08) Se $|k|>1$, l'omotetia è detta **dilatazione** , se $|k|<1$ l'omotetia è detta **contrazione** .

09) Il centro $C \equiv U\left(\dfrac{c}{1-k},\dfrac{d}{1-k}\right)$ dell'omotetia è il solo **punto unito dell'omotetia**

10) Una omotetia trasforma una retta r passante per il centro di omotetia C in se stessa , cioè r è una **retta unita** che però non è costituita da punti uniti . Infatti una omotetia ha un solo punto unito che è il suo centro . Le rette del fascio di centro C sono tutte le rette unite dell'omotetia .

11) Una omotetia trasforma la retta r non passante per il centro di omotetia nella retta $r' // r$, cioé una omotetia trasforma una retta r non passante per il suo centro C in una retta r' parallela ad r

Le omotetie

12) Angoli che si corrispondono hanno uguali ampiezze

13) Ogni retta passante per il **centro C dell'omotetia** , che l'unico suo punto unito, è una **retta unita** .

<< **Scrivere le equazioni del'omotetia avente come centro il punto** $C(\alpha,\beta)$ **e come rapporto di omotetia il numero k** >>

$$\boxed{P' - C = k\cdot(P - C)} \Rightarrow (X-\alpha)\cdot\vec{i} + (Y-\beta)\cdot\vec{j} = k(x-\alpha)\cdot\vec{i} + k(y-\beta)\cdot\vec{j} \Rightarrow$$

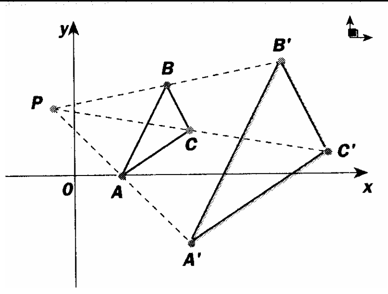
$$\begin{cases} X-\alpha = k(x-\alpha) \\ Y-\beta = k(y-\beta) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} X = k\,x + \alpha - k\,\alpha \\ Y = k\,y + \beta - k\,\beta \end{cases}}$$

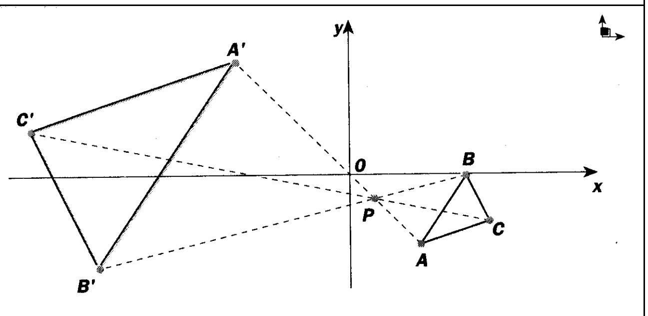
<< **Sia data la retta r di equazione** $3x-2y+1=0$ **e l'omotetia di centro** $C(2;-3)$ **e rapporto** $k=2$ **. Scrivere l'equazione della retta corrispondente** r' >>

Le equazioni dell'omotetia richiesta sono : $\begin{cases} X = 2x - 2 \\ Y = 2y + 3 \end{cases}$

Le equazioni della trasformazione inversa sono : $\begin{cases} x = \dfrac{X+2}{2} \\ y = \dfrac{Y-3}{2} \end{cases}$ La retta r' ha equazione :

$3\cdot\dfrac{X+2}{2} - 2\cdot\dfrac{Y-3}{2} + 1 = 0 \qquad 3X - 2Y + 14 = 0$ e passando a coordinate correnti (x,y) abbiamo : $3x - 2y + 14 = 0$. Come si poteva prevedere , risulta : $r' \,//\, r$





Triangoli che si corrispondono in una omotetia di centro P .

I punti corrispondenti sono allineati col centro dell'omotetia .

I segmenti corrispondenti sono fra loro paralleli

P è l'unico **punto unito** dell'omotetia .

Tutte le rette passanti per P sono **rette unite** .