Le isometrie

Le isometrie possono essere introdotte in diverse maniere .

Prima definizione di isometria

Dicesi **isometria** una similitudine avente come rapporto di similitudine l'unità , cioè avente $k = \sqrt{|\det A|} = 1$. Questo ci induce ad affermare che la **similitudine diretta**

$$\begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = -bx + ay + d \end{cases} \qquad \begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + d \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad \det A = a^2 + b^2$$

o la **similitudine indiretta**

$$\begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = bx - ay + d \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \qquad \det A = -\left(a^2 + b^2\right) \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

sono **isometrie** se $\det A = \pm 1$, precisamente abbiamo una **isometria diretta** se $\det A = 1$, una **isometria indiretta** se risulta $\det A = -1$.

Si dimostra che se P e P' , Q e Q' sono due coppie di punti corrispondenti si ha :

$$d(P,Q) = d(P',Q') \qquad \text{cioè :} \qquad \overline{PQ} = \overline{P'Q'}$$

cioè una isometria **conserva la distanza tra punti** .

Questa proprietà ci consente di definire una isometria in maniera diversa dalla precedente .

Seconda definizione di isometria

Dicesi isometria o congruenza una corrispondenza biunivoca del piano π in se stesso tale che la distanza fra due qualsiasi punti di π sia uguale a quella fra i punti corrispondenti .

Il verificarsi di quanto detto equivale ad affermare che esiste un **movimento rigido** che consente di sovrapporre il segmento PQ sul segmento $P'Q'$ in modo che $P' \equiv P$ e $Q' \equiv Q$.

Considerata una qualsiasi figura geometrica del piano π , applicando ad essa una isometria , otteniamo un'altra figura geometrica detta **isometrica o congruente alla figura data .**

Figure geometriche che si corrispondono in una isometria sono isometriche .

Una **isometria** può essere una **simmetria centrale** , una **traslazione** , una **rotazione** o una **simmetria assiale** . La simmetria centrale , la traslazione e la rotazione sono **isometrie dirette** e **conservano l'orientamento delle figure geometriche trasformate** , la **simmetria assiale** è una **isometria indiretta** e **non conserva l'orientamento delle figure geometriche trasformate .**

1) Due figure geometriche che si corrispondono in una isometria sono uguali .

Le isometrie

2) **L 'isometria ammette la trasformazione inversa .**

La traslazione

Consideriamo una generica isometria diretta avente equazioni : $\begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + d \end{cases}$ con :

$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ $\det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} a^2 + b^2 = 1$.

Se risulta $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ l'isometria prende il nome di **traslazione di vettore** $\vec{v} = c \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j} = (c, d)$

in quanto associa ad ogni punto $P(x; y)$ il punto $P'(X, Y)$ tale che : $P' - P = \vec{v}$ . .

Le equazioni di una traslazione sono : $\begin{cases} X = x + c \\ Y = y + d \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Le equazioni della trasformazione inversa sono : $\begin{cases} x = X - c \\ Y = Y - d \end{cases}$.

Se risulta $\vec{v} \neq \vec{o}$, allora la traslazione non ha punti uniti , se risulta $\vec{v} = \vec{o}$, allora la traslazione è una identità che fa corrispondere ad ogni punto se stesso .

La simmetria centrale

L ' isometria diretta di equazioni $\begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + d \end{cases}$ con $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$, dicesi **simmetria centrale** di centro $C(\alpha, \beta)$ se risulta :

$a = -1$, $b = 0$, $c = 2\alpha$, $d = 2\beta$. Le sue equazioni sono :

$\begin{cases} X = -x + 2\alpha \\ Y = -y + 2\beta \end{cases}$ con $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\det A = 1$

mentre le equazioni della trasformazione inversa sono : $\begin{cases} x = -X + 2\alpha \\ y = -Y + 2\beta \end{cases}$

$C(\alpha, \beta)$ è l'**unico punto unito** della trasformazione . Tutte le rette passanti per C sono rette unite .

Si dimostra facilmente che la **simmetria di centro** $C(\alpha, \beta)$ è la corrispondenza biunivoca (**isometria**) dei punti del piano che associa ad ogni punto P il punto P' tale che il punto C sia il punto medio del segmento PP' .

Le rotazioni

Consideriamo la generica isometria diretta avente come punto unito l'origine degli assi cartesiani.

$$\begin{cases} X = ax - by \\ Y = bx + ay \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

Se risulta $a^2 + b^2 = 1$ allora esiste un angolo ϑ in corrispondenza del quale abbiamo :

$$a = \cos\vartheta \qquad \text{e} \qquad y = \sin\vartheta$$

Questo ci consente di scrivere le precedenti equazioni nella seguente maniera :

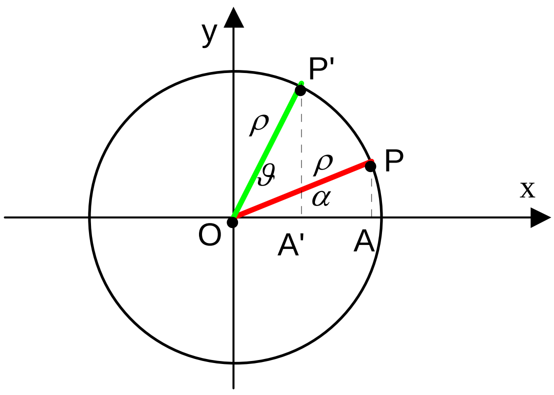
$$\begin{cases} X = x\cdot\cos\vartheta - y\cdot\sin\vartheta \\ Y = x\cdot\sin\vartheta + y\cdot\cos\vartheta \end{cases} \qquad \textbf{[55]} \qquad A = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

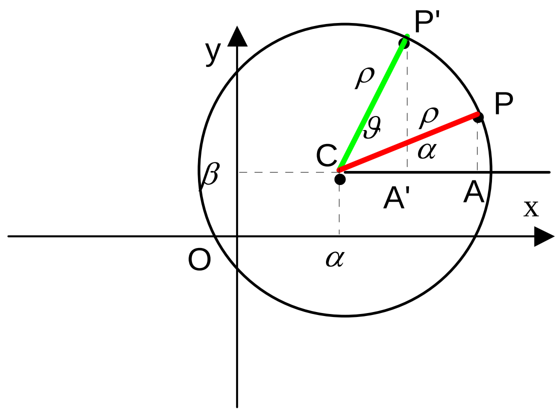
La trasformazione [55] prende il nome di **rotazione** di un angolo ϑ attorno all'origine degli assi cartesiani . Dunque una **rotazione di centro O e di angolo** ϑ è una particolare trasformazione lineare (**isometria**) la cui matrice A assume la forma :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad \text{oppure la forma} \qquad A = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Le equazioni della rotazione inversa sono : $\begin{cases} x = X\cdot\cos\vartheta + Y\cdot\sin\vartheta \\ y = -X\cdot\sin\vartheta + Y\cdot\cos\vartheta \end{cases}$ **[55a]**

Diamo una interpretazione trigonometrica delle equazioni [55] . Sia $P'(X,Y)$ il corrispondente del punto $P(x,y)$ quando il segmento $\overline{OP} = \rho$ ruota di un angolo ϑ attorno all'origine degli assi cartesiani . Se $x\hat{O}P = \alpha$ abbiamo : $\cos\alpha = \dfrac{x}{\rho} \qquad \sin\alpha = \dfrac{y}{\rho}$





$$X = \overline{OA'} = \rho\cos(\alpha+\vartheta) = \rho(\cos\alpha\cos\vartheta - \sin\alpha\sin\vartheta) = \rho\left(\frac{x}{\rho}\cos\vartheta - \frac{y}{\rho}\sin\vartheta\right) = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta$$

$$Y = \overline{A'B'} = \rho\sin(\alpha+\vartheta) = \rho(\sin\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha\sin\vartheta) = \rho\left(\frac{y}{\rho}\cos\vartheta + \frac{x}{\rho}\sin\vartheta\right) = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$

Le isometrie

L'isometria $\begin{cases} X = ax - by \\ Y = bx + ay \end{cases}$ è una **rotazione** di un angolo ϑ attorno all'origine degli assi cartesiani se : $a = \cos\vartheta$ e $y = sin\vartheta$

Se risulta $\vartheta > 0$, la rotazione è antioraria , se risulta $\vartheta < 0$ la rotazione è oraria .

Le rototraslazioni

Supponiamo adesso che il centro di rotazione sia il punto $C(\alpha,\beta)$ e sia diverso dall'origine degli assi cartesiani .

Sia $P'(X,Y)$ il punto corrispondente del punto $P(x,y)$ nella rotazione dell'angolo ϑ attorno al punto C . Abbiamo : $\cos\alpha = \frac{\overline{CA}}{\rho} = \frac{x-\alpha}{\rho}$ $\quad sin\alpha = \frac{\overline{PA}}{\rho} = \frac{y-\beta}{\rho}$

$$X = \alpha + \overline{OA'} = \alpha + \rho\cos(\alpha+\vartheta) = \alpha + \rho(\cos\alpha\cos\vartheta - sin\alpha\, sin\vartheta) = \alpha + \rho\left(\frac{x-\alpha}{\rho}\cos\vartheta - \frac{y-\beta}{\rho}sin\vartheta\right)$$

$$X = \alpha + (x-\alpha)\cos\vartheta - (y-\beta)sin\vartheta$$

$$Y = \beta + (x-\alpha)sin\vartheta + (y-\beta)\cos\vartheta$$

$$\begin{cases} X = \alpha + (x-\alpha)\cos\vartheta - (y-\beta)\sin\vartheta = x\cos\vartheta - y\sin\vartheta + \alpha - \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta \\ Y = \beta + (x-\alpha)\sin\vartheta + (y-\beta)\cos\vartheta = x\sin\vartheta + y\cos\vartheta + \beta - \alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta \end{cases} \qquad \textbf{[56a]}$$

Le equazioni cartesiane della trasformazione inversa sono :

$$\begin{cases} x = \alpha + (X-\alpha)\cos\vartheta + (Y-\beta)\sin\vartheta = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta + \alpha - \alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta \\ y = \beta - (X-\alpha)\sin\vartheta + (Y-\beta)\cos\vartheta = -X\sin\vartheta + Y\cos\vartheta + \beta + \alpha\sin\vartheta - \beta\cos\vartheta \end{cases} \qquad \textbf{[56b]}$$

L ' isometria $\begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + d \end{cases}$ rappresenta una **rotazione di un angolo** ϑ attorno al punto $C(\alpha,\beta)$ se risulta :

$a = \cos\vartheta$	$b = sin\vartheta$	$c = \alpha - \alpha\cos\vartheta + \beta sin\vartheta$	$d = \beta - \alpha sin\vartheta - \beta\cos\vartheta$

Il centro di rotazione è il punto unito della trasformazione .

Le isometrie

Un altro modo di introdurre le rototraslazioni

Vediamo come possiamo calcolare le equazioni di una rotazione quando il centro di rotazione non è l'origine degli assi cartesiani , ma un punto $C(\alpha,\beta)$.

Sia $P'(X,Y)$ il corrispondente del punto $P(x,y)$ della rotazione di centro $C(\alpha,\beta)$ ed angolo ϑ .

Per trovare le relazione che intercorrono tra le coordinate (X,Y) del punto P' e coordinate (x,y) del punto P bisogna effettuare le seguenti trasformazioni : 1) una traslazione di vettore $\vec{v}=(-\alpha,-\beta)$ che porta il centro di rotazione C in O , il punto $P(x,y)$ nel punto $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ 2) una rotazione di centro O ad angolo ϑ che porta il punto $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ nel punto $\overline{P}_1(x',y')$ 3) una traslazione di vettore $-\vec{v}=(\alpha,\beta)$ che porta l'origine O nel centro di rotazione C ed il punto $\overline{P}_1(x',y')$ nel punto $P(x,y)$. $\quad P(x,y)\to\ \overline{P}(\overline{x},\overline{y})\ \to\ \overline{P}_1(x',y')\ \to\ P'(X,Y)$

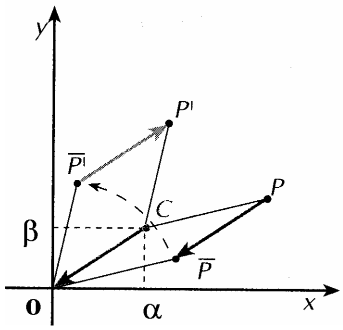
1) La traslazione di vettore $\vec{v}=(-\alpha,-\beta)$ che porta il centro di rotazione C in O , il punto $P(x,y)$ nel punto $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ dà luogo alle seguenti equazioni : $\begin{cases}\overline{x}=x-\alpha\\ \overline{y}=y-\beta\end{cases}$

2) La rotazione di centro O ad angolo ϑ che porta il punto $\overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ nel punto $\overline{P}_1(x',y')$ dà luogo alle seguenti equazioni : $\begin{cases}x'=\overline{x}\cdot\cos\vartheta-\overline{y}\cdot\sin\vartheta\\ y'=\overline{y}\cdot\sin\vartheta-\overline{y}\cdot\cos\vartheta\end{cases}$ cioè : $\begin{cases}x'=(x-\alpha)\cdot\cos\vartheta-(y-\beta)\cdot\sin\vartheta\\ y'=(x-\alpha)\cdot\sin\vartheta-(y-\beta)\cdot\cos\vartheta\end{cases}$

3) La traslazione di vettore $-\vec{v}=(\alpha,\beta)$ che porta l'origine O nel centro di rotazione C ed il punto $\overline{P}_1(x',y')$ nel punto $P(x,y)$ dà luogo alle seguenti equazioni : $\begin{cases}X=x'+\alpha\\ Y=y'+\beta\end{cases}$ cioè :

$$\begin{cases}X=\alpha+(x-\alpha)\cos\vartheta-(y-\beta)\sin\vartheta+\alpha\\ Y=\beta+(x-\alpha)\sin\vartheta+(y-\beta)\cos\vartheta+\beta\end{cases}\quad\text{cioè}$$

$$\begin{cases}X=x\cdot\cos\vartheta-y\cdot\sin\vartheta+\alpha-\alpha\cdot\cos\vartheta+\beta\cdot\sin\vartheta\\ Y=x\cdot\sin\vartheta+y\cdot\cos\vartheta+\beta-\alpha\cdot\sin\vartheta-\beta\cdot\cos\vartheta\end{cases}$$

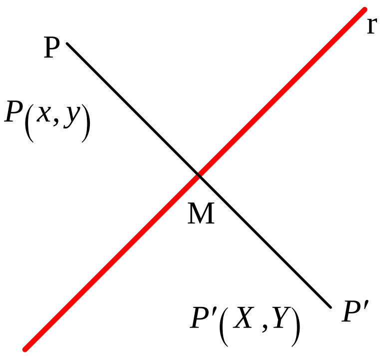


$P(x,y)\to\ \overline{P}(\overline{x},\overline{y})$ traslazione di vettore $\vec{v}=(-\alpha,-\beta)$

$\overline{P}(\overline{x},\overline{y})\ \to\ \overline{P}_1(x',y')$ rotazione di centro O ed angolo ϑ

$\overline{P}_1(x',y')\ \to\ P'(X,Y)$ traslazione di vettore $-\vec{v}=(\alpha,\beta)$

La simmetria assiale



I punti P e P' sono **simmetrici rispetto alla retta** r se si verificano le due seguenti condizioni :

1) $PP' \perp r$ 2) M è il punto medio del segmento PP'

Calcoliamo adesso le **equazioni di una simmetria assiale** . Supponiamo che sia $P(x,y)$, $P'(X,Y)$, $r : y = mx + n$ con **r** retta non parallela rispetto a ciascuno dei due assi cartesiani .

$$PP' \perp r \Rightarrow m_{PP'} = \frac{Y - y}{X - x} = -\frac{1}{m} \quad M\left(\frac{x + X}{2}, \frac{y + Y}{2}\right) \quad M \in r \Rightarrow \frac{y + Y}{2} = m \cdot \frac{x + X}{2} + n$$

$$\begin{cases} m(Y - y) = -X + x \\ y + Y = 2m(x + X) + 2n \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema rispetto alle variabili **X** ed **Y** otteniamo :

$$\begin{cases} X = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}x + \dfrac{2m}{1 + m^2}y - \dfrac{2mn}{1 + m^2} \\ Y = \dfrac{2m}{1 + m^2}x - \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}y + \dfrac{2n}{1 + m^2} \end{cases} \quad [5]$$

Risolvendo rispetto ad **x** ed **y** otteniamo :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}X + \dfrac{2m}{1 + m^2}Y - \dfrac{2mn}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{2m}{1 + m^2}X - \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}Y + \dfrac{2n}{1 + m^2} \end{cases} \quad [6]$$

Se ϑ è l'angolo formato dalla direzione positiva dell'asse x con la retta abbiamo : $m = tg\,\vartheta$,

$$\frac{1 - m^2}{1 + m^2} = \cos 2\vartheta \ , \quad \frac{2m}{1 + m^2} = \sin 2\vartheta \ , \quad \frac{2}{1 + m^2} = 1 + \cos 2\vartheta \ .$$

Le equazioni precedenti assumono la forma : $\begin{cases} X = x \cdot \cos 2\vartheta + y \cdot \sin 2\vartheta + n \cdot \sin 2\vartheta \\ Y = x \cdot \sin 2\vartheta - y \cdot \cos 2\vartheta + n \cdot (1 + \cos 2\vartheta) \end{cases}$

L'isometria indiretta $\begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = bx - ay + d \end{cases}$ rappresenta una simmetria rispetto alla retta r di equazione $y = mx + n$ e coefficiente angolare $m = tg\,\vartheta$ se risulta :

Le isometrie

$$a = \frac{1-m^2}{1+m^2} = \cos 2\vartheta \quad , \quad b = \frac{2m}{1+m^2} = \sin 2\vartheta \quad ,$$

$$c = \frac{2mn}{1+m^2} = n \cdot \sin 2\vartheta \qquad d = \frac{n2}{1+m^2} = n \cdot (1 + \cos 2\vartheta) \ .$$

La matrice associata alla simmetria assiale è : $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \end{bmatrix}$

$Det\, A = -\cos^2 2\vartheta - \sin^2 2\vartheta = -1$

Effettuate le sostituzioni $\begin{cases} x \leftarrow \dfrac{1-m^2}{1+m^2}x + \dfrac{2m}{1+m^2}y - \dfrac{2mn}{1+m^2} \\ y \leftarrow \dfrac{2m}{1+m^2}x - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}y + \dfrac{2n}{1+m^2} \end{cases}$

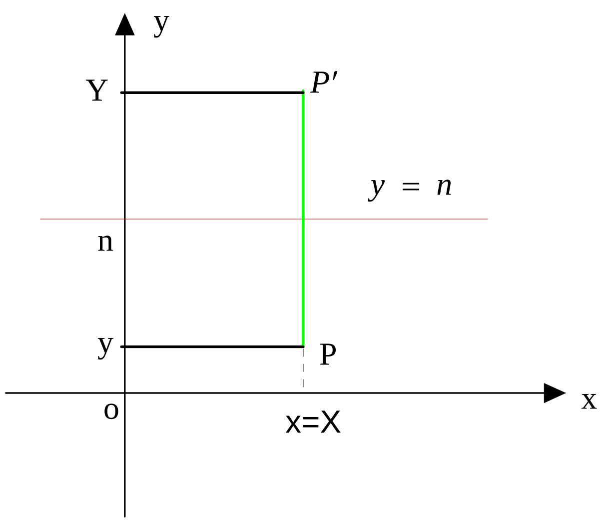
nell'equazione $y = f(x)$ della curva piana γ otteniamo una nuova equazione che rappresenta la curva piana simmetrica di γ rispetto alla retta **r** .

CASI PARTICOLARI

simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse delle ascisse

$r // Ox \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \vartheta = 0$ Le relazioni [5] e [6] assumono la seguente forma se $r : y = n$:

[7] $\begin{cases} X = x \\ Y = -y + 2n \end{cases}$ **[8]** $\begin{cases} x = X \\ y = -Y + 2n \end{cases}$



$$\begin{cases} x = X \\ \dfrac{y+Y}{2} = n \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -y + 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X \\ y = -Y + 2n \end{cases}$$

REGOLA PRATICA

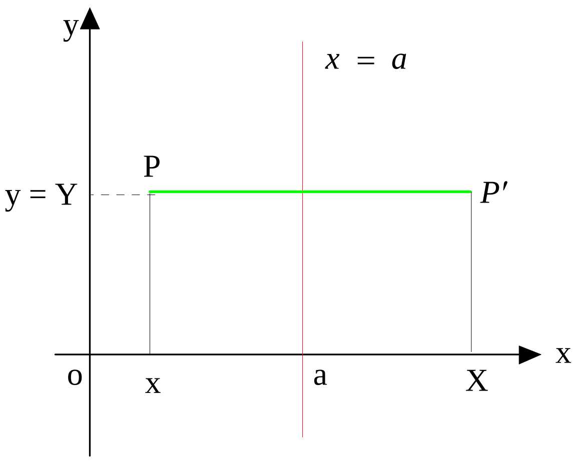
Se nell ' equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f , sostituiamo **x** con **x** ed **y** con $-y + 2n$ otteniamo l ' equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta $y = n$.

simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse delle ordinate

$r//oy \Rightarrow m = \infty$ Le relazioni [4] e [5] assumono la seguente forma se la retta r ha equazione $x = a$:

[9] $\begin{cases} X = -x + 2a \\ Y = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = -X + 2a \\ y = Y \end{cases}$ **[10]**

Dimostrazione elementare :



$\begin{cases} \dfrac{x + X}{2} = a \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -x + 2a \\ Y = y \end{cases}$ ed anche

$\begin{cases} x = -X + 2a \\ y = Y \end{cases}$

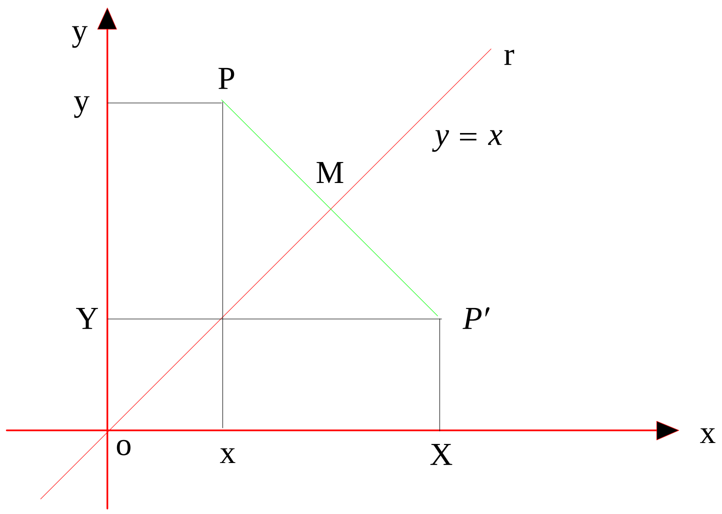
REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f , sostituiamo x con $2a - x$ ed y con y otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla retta $x = a$.

Simmetria rispetto alla bisettrice fondamentale : $y = x$, $m = 1$, $n = 0$

[11] $\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$ $\begin{cases} x = Y \\ y = X \end{cases}$ **[12]**

Le isometrie



REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione *f* , sostituiamo x con y ed y con x otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice fondamentale $y = x$.

Simmetria rispetto alla bisettrice secondaria : $y = -x$, $m = -1$, $n = 0$

[13] $\begin{cases} X = -y \\ Y = -x \end{cases}$ $\begin{cases} x = -Y \\ y = -X \end{cases}$ **[14]**

REGOLA PRATICA

Se nell'equazione $y = f(x)$, grafico γ della funzione f , sostituiamo **x** con $-y$ ed **y** con $-x$ otteniamo l'equazione della curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice secondaria $y = -x$.

Sia $\Phi(x,y) = 0$ l'equazione cartesiana di una curva piana γ . Se risulta :

$$\Phi(x,y) = \Phi(aX + bY + c, bX - aY + d) = 0$$

allora la curva γ ha la retta **r** come asse di simmetria , cioè la curva γ è simmetrica rispetto alla retta r di equazione $y = mx + n$.

Se risulta : $\Phi(x,y) = \Phi(X, -Y + 2n) = 0$ o $\Phi(x,y) = \Phi(x, -y + 2n) = 0$ allora la curva γ è **simmetrica rispetto alla retta di equazione** $y = n$

Se risulta : $\Phi(x,y) = \Phi(-X + 2a, Y) = 0$ o $\Phi(x,y) = \Phi(-x + 2a, y) = 0$ allora la curva γ è **simmetrica rispetto alla retta di equazione** $x = a$

Se risulta : $\Phi(x,y) = \Phi(X ; -Y) = 0$ o $\Phi(x,y) = \Phi(x ; -y) = 0$ allora la curva γ è **simmetrica rispetto all'asse delle ascisse** .

Le isometrie

Se risulta : $\Phi(x,y) = \Phi(-X \,;Y) = 0$ o $\Phi(x,y) = \Phi(-x\,;y) = 0$ allora la curva γ è **simmetrica rispetto all ' asse delle ordinate**.

Se risulta $\Phi(x,y) = \Phi(Y\,;X) = 0$ o $\Phi(x,y) = \Phi(y\,;x) = 0$ allora la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice** $y = x$

Se risulta : $\Phi(x,y) = \Phi(-Y\,;-X) = 0$ o $\Phi(x,y) = \Phi(-y\,;-x) = 0$ allora la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice** $y = -x$.

Se la curva γ ha equazione $y = f(x)$ allora :

$f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ γ simmetrica rispetto all'asse y , $f(x)$ **funzione pari**

$f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow$ γ simmetrica rispetto all'origine degli asso cartesiani , $f(x)$ **funzione dispari**

REGOLA PRATICA

Per avere l ' equazione della curva γ' simmetrica della curva γ rispetto alla retta r basta applicare la [6] o la [8] o la [10] o la [12] o la [14] .

SINTESI

Sia γ una curva piana di equazione $E(x,y) = 0$. Se risulta $E(y,x) = 0$ la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice fondamentale** $y = x$, se risulta $E(-y,-x) = 0$ la curva γ è **simmetrica rispetto alla bisettrice secondaria** $y = -x$.

<< Scrivere l ' equazione della circonferenza σ_1 simmetrica della circonferenza σ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ **rispetto alla retta** $y = x$ **>>**

Basta sostituire nell ' equazione della circonferenza σ **x** con **y** ed **y** con **x** .

$$\sigma : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0 \qquad , \qquad \sigma_1 : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$

<< Scrivere l ' equazione della **simmetria assiale** rispetto alla retta **r** di equazione $y = 2x$ >>

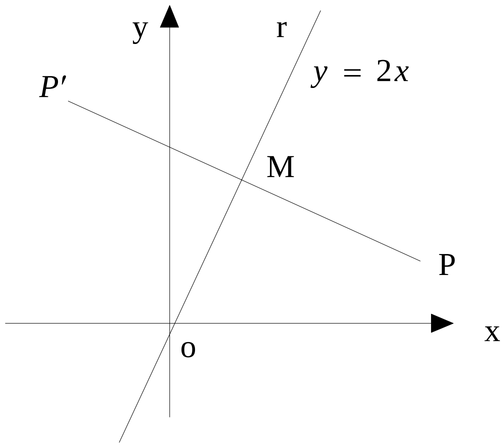
Sia $P'(\alpha',\beta') \equiv (X,Y)$ il punto simmetrico di $P(\alpha,\beta) \equiv (x,y)$ rispetto alla retta **r** di equazione $y = 2x$. Il segmento PP' deve essere perpendicolare alla retta **r** ed il suo punto medio **M** deve appartenere alla retta **r** . $M\left(\dfrac{\alpha+\alpha'}{2};\dfrac{\beta+\beta'}{2}\right)$ $M \in r \Rightarrow \alpha + \alpha' = \dfrac{\beta+\beta'}{2}$

Le isometrie

$$m_{PP'} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = -\frac{1}{2} \ ; \ 2\beta' - 2\beta = \alpha - \alpha'$$

$$\begin{cases} \alpha + \alpha' = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\beta'}{2} & \text{sommo membro} \\ \alpha - \alpha' = -2\beta + 2\beta' & \text{a membro} \end{cases} \qquad \frac{5}{2}\beta' = 2\alpha + \frac{3}{2}\beta \qquad 5\beta' = 4\alpha + 3\beta$$

$$2\alpha = -\frac{3}{2}\beta + \frac{5}{2}\beta'$$



$$\beta' = \frac{4}{5}\alpha + \frac{3}{5}\beta \qquad \boxed{Y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y}$$

Sottraendo membro a membro otteniamo :

$$2\alpha' = \frac{5}{2}\beta - \frac{3}{2}\beta' \ , \ \frac{5}{2}\beta = 2\alpha' + \frac{3}{2}\beta'$$

$$5\beta = 4\alpha' + 3\beta' \ , \qquad \beta = \frac{4}{5}\alpha' + \frac{3}{5}\beta'$$

$$\boxed{y = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + 4\alpha' = 2\beta + 2\beta' \\ \alpha - \alpha' = -2\beta + 2\beta' \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{3}{5}\alpha' + \frac{4}{5}\beta' \qquad \boxed{x = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y}$$

$$5\alpha + 4\alpha' = 4\beta'$$

$$3\alpha + 5\alpha' = 4\beta \ , \qquad \alpha' = -\frac{3}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta \qquad \boxed{X = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y}$$

Le equazioni della simmetria assiale sono :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5}X + \dfrac{4}{5}Y \\ y = \dfrac{4}{5}X + \dfrac{3}{5}Y \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y \\ Y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{cases}$$

<< **Dire se la parabola γ di equazione** $y = -2x^2 + 4$ **è simmetrica della parabola** γ' **di equazione** $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$ **rispetto alla retta** $y = 2x$ >>

Applico alla curva γ di equazione $y = -2x^2 + 4$ le equazioni della simmetria richiesta , cioè applico le seguenti equazioni precedentemente trovate : $\begin{cases} x = -\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y \\ y = \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y \end{cases}$

$$\frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y = -2\left(-\frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y\right)^2 + 4 \ , \ \frac{4}{5}X + \frac{3}{5}Y = -2\left(\frac{9}{25}X^2 + \frac{16}{25}Y^2 - \frac{24}{25}XY\right)^2 + 4$$

Questa equazione non coincide con l'equazione della parabola γ' che , pertanto , non è simmetrica di γ rispetto ad **r** .

<< **Per stabilire se la curva** γ **di equazione** $y = f(x)$ **nota è simmetrica rispetto ad una retta verticale di cui si cerca l'equazione** $x = a$ **basta determinare il valore di a in corrispondenza del quale l'uguaglianza** $f(2a - x) = f(x)$ **è una identità** >>

<< **Una curva γ di equazione** $y = f(x)$ **non può essere mai simmetrica rispetto ad una retta orizzontale in quanto una generica parallela all'asse y l'incontra sempre in un solo punto** >> .

<< **Individuare la retta di equazione** $x = a$ **rispetto alla quale le curve γ di equazione** $y = f(x)$ **e** γ' **di equazione** $y = g(x)$ **sono una simmetrica dell ' altra** >>

$\begin{cases} x = -X + 2a \\ y = Y \end{cases}$ **equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione** $x = a$

$Y = f(2a - X)$ **equazione della curva simmetrica di γ rispetto ad r**

Tale equazione può anche essere scritta nella seguente maniera : $y = f(2a - x)$

Imponiamo che questa equazione coincida con l'equazione $y = g(x)$, cioè :

$$f(2a - x) = g(x) \qquad \text{[**]}$$

Le isometrie

Si trova il valore di **a** in corrispondenza del quale l'uguaglianza **[**]** è una identità . Fatto ciò posiamo affermare che la retta richiesta ha equazione $x = a$. Naturalmente avrei potuto calcolare il valore di **a** imponendo che sia una identità l'uguaglianza $g(2a - x) = f(x)$

<< **Individuare la retta di equazione** $y = n$ **rispetto alla quale le curve γ di equazione** $y = f(x)$ **e** γ' **di equazione** $y = g(x)$ **sono una simmetrica dell ' altra** >>

$\begin{cases} x = X \\ y = 2n - Y \end{cases}$ equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione $x = a$

$2n - Y = f(X)$ equazione della curva simmetrica di γ rispetto ad r , $Y = 2n - f(X)$

Tale equazione può anche essere scritta nella seguente maniera : $y = 2n - f(x)$

Questa curva coincide con la curva γ' se : $2n - f(x) = g(x)$ cioè se :

$$f(x) + g(x) - 2n = 0$$

Esempio numerico

$\gamma : y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ $\qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

$\gamma' : y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ $\qquad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

$\frac{1}{2}x^2 - x + 1 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - 2n = 0$, $n = 1$, $y = 1$ è la retta richiesta .

Le isometrie in sintesi

Dicesi **isometria** una corrispondenza biunivoca del piano in sé che conserva le distanze tra punti :

$$d(P,Q) = d(P',Q')$$

Le **isometrie** sono **dirette** se conservano l'orientamento , **inverse** se non conservano l'orientamento. Sono **isometrie dirette** le **simmetrie centrali** , le **rotazioni** e le **traslazioni** , sono **isometrie inverse** le **simmetrie assiali** .La **isometria** è una **particolare similitudine**, precisamente , la similitudine $\begin{cases} X = ax - by + c \\ Y = bx + ay + d \end{cases}$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ è una **isometria** se $\det A = \pm 1$.

L ' **isometria** è **diretta** se $\det A = 1$ (traslazione , rototraslazione o simmetria centrale) , **inversa** se $\det A = -1$ (simmetria assiale) .

1) Due figure geometriche che si corrispondono in una isometria sono uguali

Le isometrie

2) L 'isometria ammette la trasformazione inversa .

Le isometrie ed i punti uniti

a) nella **traslazione** non ci sono punti uniti

b) nella **simmetria assiale** i punti uniti sono quelli dell'asse

c) nella **simmetria centrale** e nella **rotazione** c'è un solo punto unito : **il centro**

Le isometrie e le rette unite

a) nella traslazione le rette unite coincidono con le rette parallele al vettore associato

b) nella simmetria assiale coincidono con le perpendicolare all'asse di simmetria

c) nella simmetria centrale le rette unite sono quelle passanti per il centro

d) nelle rotazioni non ci sono rette unite .

Proprietà invarianti rispetto alle trasformazioni

Rispetto all'insieme delle affinità sono proprietà invarianti :

1) L ' allineamento 2) Il parallelismo 3) l'incidenza 4) Il rapporto tra superfici

Rispetto all'insieme delle similitudini sono proprietà invarianti , oltre alle precedenti , anche le seguenti :

1) I rapporti tra lunghezze 2) Le ampiezze degli angoli 3) La perpendicolarità

Rispetto all'insieme delle isometrie sono proprietà invarianti , oltre alle precedenti , anche le seguenti :

1) Le lunghezze ($AB = A'B'$ **) 2) L'estensione delle superfici (** $S(ABC) = S(A'B'C')$ **)**

Le isometrie