Unità Didattica N° 33
L’algebra dei vettori

Unità Didattica N° 33 L'algebra dei vettori

La nozione di vettore numerico

● Se $\mathbb{R}$ rappresenta l'insieme dei numeri reali allora i simboli $R^2 = R \times R$, R^3, ... R^n non rappresentano potenze ma prodotti cartesiani e quindi insiemi di coppie ordinate, di terne ordinate....

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali relativi

$\mathbb{R}^2$ = insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali relativi

$\mathbb{R}^3$ = insieme di tutte le terne ordinate di numeri reali relativi

$\mathbb{R}^n$ = insieme di tutte le **n-ple** (ennuple) ordinate di numeri reali relativi

● Se **n** rappresenta un numero naturale, dicesi **n-pla** ordinata di numeri reali ogni sequenza ordinata $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ costituita da n numeri reali relativi. Il numero reale relativo α_1 prende il nome di prima componente della n-pla, α_2 viene detto seconda componente, e così di seguito. Per $n = 2, 3, 4$ la ennupla viene detta, rispettivamente, coppia ordinata, terna ordinata, quaterna ordinata. Fissato il numero naturale $n \in N^*$, l'insieme formato da tutte le n-ple ordinate di numeri reali si indica col simbolo R^n. Quindi una sequenza formata da n numeri reali costituisce una ennupla ordinata di numeri reali se è importante stabilire l'ordine con cui si presentano gli elementi in una siffatta sequenza. Si definisce **vettore numerico di ordine n** una ennupla ordinata di numeri reali**.**

Generalmente i vettori si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto latino e le componenti con le lettere minuscole dell'alfabeto greco. Esempi di vettori del secondo ordine:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = (3, 2)$$

Esempi di vettori del quarto ordine:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = (3, -2, 1, 4)$$

I numeri reali che individuano un vettore si dicono le componenti del vettore. Tali componenti possono essere racchiuse o da parentesi quadre o da parentesi rotonde.

● Un vettore si dice **vettore riga** o **vettore colonna** a seconda che le sue componenti sono scritte in orizzontale o in verticale. Abbiamo quindi il vettore riga o vettore orizzontale e il **vettore colonna** o **vettore verticale**.

$$\vec{a} = [2,5,6] = (2,5,6) \quad = \quad \textbf{vettore riga del terzo ordine}$$

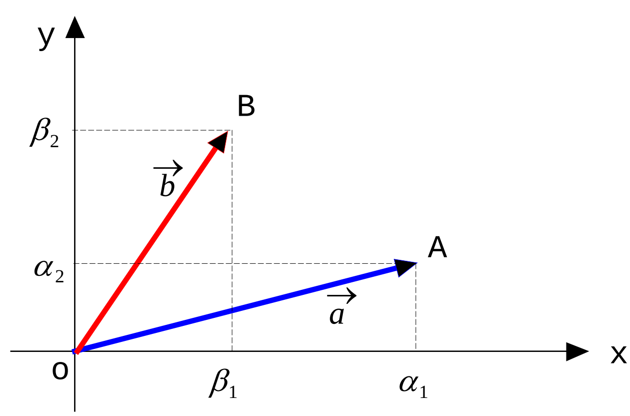
● Sia $\vec{a}$ un **vettore riga di ordine n**. Il vettore colonna di ordine n con le componenti rispettivamente uguali a quelle di $\vec{a}$, si dice **vettore trasposto** del vettore $\vec{a}$ e si indica col simbolo $\vec{a}^T$. Il trasposto del vettore riga: $[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]$ è il vettore colonna: $\vec{a}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$

Immagine geometrica di un vettore numerico

I vettori del primo, del secondo e del terzo ordine possono essere rappresentati graficamente. Un vettore del secondo ordine è individuato da una coppia ordinata di numeri reali che, a sua volta, individua nel piano cartesiano un punto. $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ $\quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2)$

I vettori, oltre ad essere rappresentati con dei punti del piano (**rappresentazione puntuale**), possono essere rappresentati mediante segmenti orientati aventi come origine, l’origine degli assi cartesiani e come estremo il punto immagine del vettore.

Rappresentazione grafica di vettori a due componenti



Si definisce **vettore nullo** il vettore avente nulle tutte le sue componenti.

Il **vettore (colonna) nullo del quarto ordine**, indicato col simbolo $\vec{o}$ è il seguente $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Si definisce **vettore unitario** o **versore** ogni vettore avente una sola componente uguale ad 1 e nulle tutte le altre. I **vettori unitari di ordine n sono n**. Un vettore unitario si indica col simbolo $\vec{e}$, in particolare abbiamo: $\vec{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.
- Due vettori dello stesso ordine si dicono **uguali** quando hanno uguali le **componenti omonime** (cioè le componenti che occupano lo stesso posto), si dicono **opposti** quando sono opposte le componenti omonime.
- Due vettori si dicono **omogenei** quando sono dello stesso ordine e sono entrambi vettori riga o vettori colonna.
- Due vettori si dicono **opposti** quando sono opposte le componenti omonime

Somma algebrica di due o più vettori

La somma algebrica di due vettori omogenei è un vettore omogeneo avente come componenti la somma algebrica delle componenti omonime dei due vettori:

$$\vec{a} = (-2,1,-3,8) \quad \vec{b} = (4,1,2,1) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = (2,2,-1,9)$$

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n) \ \wedge \ \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n) \ \Rightarrow \ \vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$$

La somma di due vettori opposti è il vettore nullo.

Prodotto di un numero reale per un vettore

Prodotto del numero reale **k** per il vettore $\vec{a}$ è il vettore ad esso omogeneo avente come componenti il prodotto del numero k per ciascuna componente del vettore $\vec{a}$

Definizione: Si definisce Prodotto del numero reale k per il vettore $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ il vettore $\vec{p}$ le cui componenti sono quelle di $\vec{a}$ moltiplicate per.

$$\forall\ k \in R \quad \forall\ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in R^n \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = k \cdot \vec{a} = k \cdot (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (k\alpha_1, k\alpha_2, ..., k\alpha_n)$$

Per il prodotto di un numero reale per un vettore valgono le seguenti proprietà formali:

$$\forall\ h, k \in R \qquad \forall\ \vec{a}, \vec{b} \in R^n$$

$$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} \qquad (h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a} \qquad k(h\vec{a}) = (hk)\vec{a} = h(k\vec{a})$$

Prodotto scalare di due vettori

Si definisce **prodotto scalare** dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (e si usa il simbolo $\vec{a}\times\vec{b}$) il numero reale relativo che si ottiene sommando algebricamente i prodotti delle componenti omonime dei due vettori.

$\vec{a}\times\vec{b}$ = somma algebrica dei prodotti delle componenti di uguale posto dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$(1,2,5)\times(-2,-1,3)=(1)(-2)+(2)(-1)+(5)(3)=-2-2+15=11$$

Il **prodotto scalare** tra due vettori è possibile solo se essi sono dello stesso ordine.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\times(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=\alpha_1\cdot\beta_1+\alpha_2\cdot\beta_2+\cdots+\alpha_n\cdot\beta_n \quad [1]$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà formali:

1) **Proprietà commutativa**: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$

2) **Proprietà distributiva** del prodotto scalare rispetto alla somma di vettori

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}$$

3) **Proprietà di omogeneità** o *proprietà associativa*

$$m\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(m\,\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(m\,\vec{b}\right)$$

4) **Proprietà di omogeneità mista** o proprietà associativa mista

$$\left(m\,\vec{a}\right)\times\left(n\,\vec{b}\right)=\left(n\,\vec{a}\right)\times\left(m\,\vec{b}\right)=m\cdot n\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

Vettori linearmente dipendenti e vettori linearmente indipendenti

Dati n vettori dello stesso ordine $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ ed n numeri reali relativi (detti **scalari**) $k_1,k_2,.....,k_n$, non tutti contemporaneamente nulli, definiamo **combinazione lineare degli n vettori** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ il vettore $\vec{a}$ dato da:

$$\vec{a}=k_1\cdot\vec{a}_1+k_2\cdot\vec{a}_2+....+k_n\cdot\vec{a}_n \qquad [2]$$

n vettori dello stesso ordine si dicono **linearmente dipendenti** quando e solo quando è possibile trovare n scalari $k_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$, non tutti contemporaneamente nulli, per i quali risulti: $k_1 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + k_n \cdot \vec{a}_n = \vec{o}$ [3]

I vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sono **linearmente indipendenti**, se comunque scegliamo n scalari $k_1, k_2, \ldots, k_n$ non tutti contemporaneamente nulli, risulta

$$k_1 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + k_n \cdot \vec{a}_n \neq \vec{o}$$

ossia se l'uguaglianza $k_1 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + k_n \cdot \vec{a}_n = \vec{o}$ può essere soddisfatta soltanto se

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

Con parole diverse possiamo dire che n vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, tutti dello stesso ordine, si dicono **linearmente indipendenti**, se l'unica combinazione lineare degli n vettori che dà come risultato il vettore nullo è quella ottenuta con coefficienti $k_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ tutti nulli.

I vettori $\vec{a} = (3,2)$ e $\vec{b} = (6,4)$ sono **linearmente dipendenti** in quanto è possibile trovare due numeri $k_1 = 2$ e $k_2 = -1$ per i quali risulta:

$$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{b} = 2(3,2) - (6,4) = (6,4) + (-6,-4) = (0,0) = \vec{o}$$

Il vettore $\vec{a}$ **dipende linearmente** dai vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, tutti dello stesso ordine di $\vec{a}$, se può essere espresso mediante una loro combinazione lineare, cioè se esistono n numeri reali k_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ per i quali risulta: $\vec{a} = k_1 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + k_n \cdot \vec{a}_n$

Se n vettori sono **linearmente dipendenti**, allora ognuno di essi può essere espresso mediante una opportuna combinazione lineare dei rimanenti vettori.

Dire, motivandolo, se i vettori $\vec{a} = [-5 \quad 5 \quad -6 \quad -4]$, $\vec{b} = [-1 \quad 1 \quad 0 \quad -2]$, $\vec{c} = [1 \quad -1 \quad 2 \quad 0]$ sono **linearmente dipendenti**. Vedo se esistono due scalari h, k, non contemporaneamente nulli, per i quali è valida la seguente relazione vettoriale: $\vec{a} = h \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c} \Rightarrow$

$$[-5 \quad 5 \quad -6 \quad -4] = h \cdot [-1 \quad 1 \quad 0 \quad -2] + k \cdot [1 \quad -1 \quad 2 \quad 0] = [-h \quad h \quad 0 \quad -2h] + [k \quad -k \quad 2k \quad 0]$$

$$[-5 \quad 5 \quad -6 \quad -4] = [-h+k \quad h-k \quad 2k \quad -2h] \Rightarrow \begin{cases} -h + k = -5 \\ h - k = 5 \\ 2k = -6 \\ -2h = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ h = 2 \end{cases}$$

$\vec{a}=2\cdot\vec{b}-3\cdot\vec{c}$ i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono **linearmente dipendenti**.

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ vettore $x=\mathbf{x}=\vec{x}$ $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ vettore $y=\mathbf{y}=\vec{y}$

$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ vettore $u=\mathbf{u}=\vec{u}$ $\mathrm{v}=(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\cdots,\mathrm{v}_n)$ vettore $\mathrm{v}=\mathbf{v}=\vec{\mathrm{v}}$

Vettori in $\mathbb{R}^n$: L'insieme di tutte le n-ple di numeri reali, indicato col simbolo $\mathbb{R}^n$, si chiama spazio ad n dimensioni. Una particolare n-pla in $\mathbb{R}^n$, diciamo $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ si chiama punto o vettore; i numeri reali $u_1,u_2,\cdots,u_n$ sono le componenti (o le coordinate) del vettore $u=\mathbf{u}=\vec{u}$.

Osservazione: Lo spazio $\mathbb{R}^n$ con le operazioni di addizione di due vettori, di moltiplicazione di uno scalare per un vettore e di prodotto scalare di due vettori prende il nome di spazio vettoriale euclideo ad n dimensioni.

La norma di un vettore

Definizione: Si chiama norma o modulo o lunghezza del vettore $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ il numero $|u|$ che si ottiene sommando i quadrati delle sue componenti ed estraendo la radice quadrata del risultato ottenuto. In simboli abbiamo: $|u|=|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\times\vec{u}}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}$

Esempio: $u=\vec{u}=(3,1,-5,0) \Rightarrow |u|=|\vec{u}|=\sqrt{3^2+1^2+(-5)^2+0^2}=\sqrt{35}$

La norma di un vettore gode delle seguenti proprietà caratteristiche:

(1) $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n \quad |\vec{x}|\geq 0$ (2) $|\vec{x}|=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{o}$ (3) $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n \wedge \forall\lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow |\lambda\,\vec{x}|=|\lambda||\vec{x}|$

(4) $|h+k|\leq|h|+|k| \quad \forall h,k\in\mathbb{R}$

La distanza in $\mathbb{R}^n$

Definizione: La distanza euclidea di due vettori $\vec{u},\vec{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^n$ è definita come la norma del loro vettore differenza, cioè la radice quadrata della somma delle differenze delle loro componenti corrispondenti. In simboli abbiamo:

$$d(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots(u_n-v_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)^2}$$

Calcolare la distanza fra i vettori $u=\vec{u}=(1,-2,4,1)$ $\quad v=\vec{v}=(3,1,-5,0)$

$$d(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(4+5)^2+(1-0)^2} = \sqrt{95}$$

La distanza fra due vettori gode delle seguenti proprietà caratteristiche:

(1) $d(\vec{u},\vec{v})\geq 0 \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ (2) $d(\vec{u},\vec{v})=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v} \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$

(3) $d(\vec{u},\vec{v})=d(\vec{v},\vec{u}) \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ (4) $d(\vec{u},\vec{v})\leq d(\vec{u},\vec{w})+d(\vec{w},\vec{v}) \quad \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$

La nozione di spazio vettoriale

L'insieme di tutti i vettori numerici di ordine **n** prende il nome di **spazio vettoriale** ad n dimensioni e viene indicato col simbolo R^n. In particolare $\mathbf{R^2}$ ($\mathbf{R^3}$) è lo **spazio vettoriale bidimensionale** o a **due dimensioni** (**tridimensionale** o a **tre dimensioni**) e rappresenta l'insieme di tutte le coppie ordinate (a,b) [terne ordinate (a,b,c)] di numeri reali. Tre o più vettori di $\mathbf{R^2}$ sono sempre linearmente dipendenti, quattro o più vettori di $\mathbf{R^3}$ sono sempre **linearmente dipendenti**. In R^n non ci possono essere più di n vettori **linearmente indipendenti**. Questo significa che il numero massimo di vettori **linearmente indipendenti** è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale. Sia B un insieme di vettori dello spazio vettoriale V = R^n. B costituisce una **base** di R^n se:

a) i vettori di B sono tutti **linearmente indipendenti** e nessuno di essi coincide col vettore nullo $\vec{o}$

b) ogni vettore di R^n può essere espresso come combinazione lineare dei vettori R^n in un solo modo. Dicesi **base B** di uno spazio vettoriale **V** (ad esempio $V=R^2$, $V=R^3$,…., $V=R^n$) il minor numero di vettori di V fra loro **linearmente indipendenti** in grado di generare tutti i vettori di V.

B è una **base ortogonale** se i vettori di B sono a due a due perpendicolari, è una **base ortonormale** se è ortogonale e tutti i suoi vettori sono **versori**.

Il numero dei vettori di una qualsiasi base di $V=R^n$ dicesi **dimensione** dello spazio vettoriale e viene indicato con uno dei due seguenti simboli: $\dim V$, $\dim R^n$. Gli n versori $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\cdots\vec{e}_n$ di R^n costituiscono la più semplice **base** (**ortonormale**) dello spazio vettoriale R^n. Un generico vettore $\vec{v} \in R^n$ può essere espresso in maniera unica come combinazione lineare degli n versori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots \vec{e}_n$, cioè:

$$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{e}_1 + k_2 \cdot \vec{e}_2 + k_3 \cdot \vec{e}_3 + \cdots + k_n \cdot \vec{e}_n \quad \text{con } \vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots \vec{e}_n \in R^n \text{ e } k_1, k_2, \cdots, k_n \in R$$

Definizione generale di spazio vettoriale R^n

Diciamo che R^n è uno spazio vettoriale su R o che è un o spazio vettoriale reale se:

a) l'operazione interna di **addizione** (indicata col simbolo +) gode delle seguenti proprietà formali:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in R^n$ (proprietà commutativa)
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^n$ (proprietà associativa)
- $\exists \vec{o} \in R^n$ tale che $\vec{o} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{o} = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in R^n$ (elemento neutro additivo)
- $\forall \vec{v} \in R^n \quad \exists -\vec{v} \in R^n$ tale che $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{o}$ (elemento opposto)

b) l'operazione esterna di moltiplicazione per uno scalare (indicata col simbolo $\cdot$) gode delle seguenti proprietà formali:

- $(h+k) \cdot \vec{v} = h \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{v} \quad \forall h, k \in R$ e $\forall \vec{v} \in R^n$ (prima proprietà distributiva)
- $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v} \quad \forall k \in R$ e $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^n$ (seconda proprietà distributiva)
- $h \cdot (k \cdot \vec{v}) = (hk) \cdot \vec{v} \quad \forall h, k \in R$ e $\forall \vec{v} \in R^n$ (proprietà associativa mista)
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot 1 = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in R^n$ (elemento neutro moltiplicativo)

Vettori nel campo complesso

Premessa: Per x ed y numeri reali ed i (unità immaginaria) definita dalla relazione $i^2 = -1$, cioè dalla relazione $i = \sqrt{-1}$, $z = x + i\,y$ prende il nome di numero complesso. Il numero reale x si chiama parte reale del numero complesso, mentre il numero reale y si chiama parte immaginaria del numero complesso. Il coniugato del numero complesso $z = x + i\,y$ è il numero complesso $\overline{z} = \overline{x + i\,y} = x - i\,y$. La somma (o il prodotto) di un qualsiasi numero complesso per il sui coniugato è un numero reale. Il valore assoluto o modulo del numero complesso $z = x + i\,y$ è dato da $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{(x+iy) \times (x-iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$

Sia $\vec{x}$ un vettore ad n (3) dimensioni nel campo complesso $\mathbb{C}$. La totalità di tali vettori costituisce lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$. Come nel caso reale gli elementi di $\mathbb{C}^n$ sono detti punti o vettori, mentre gli elementi di $\mathbb{C}$ si chiamano scalari. L'addizione di vettori e la moltiplicazione di uno scalare per un vettore su $\mathbb{C}^n$ sono date dalle seguenti relazioni:

$$z+w=(z_1,z_2,z_3)+(w_1,w_2,w_3)=(z_1+w_1,z_2+w_2,z_3+w_3) \qquad z\cdot(z_1,z_2,z_3)=(z\cdot z_1,z\cdot z_2,z\cdot z_3)$$

$$(2+3i,4-i,3)+(3-2i,5i,4-6i)=(5+i,4+4i,7-6i) \qquad 2i(2+3i,4-i,3)=(-6+4i,2+8i,6i)$$

Se $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ ed $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ sono due vettori dello spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^3$ il loro prodotto scalare o prodotto interno si definisce come: $\vec{x}\times\vec{y}=x_1\,\overline{x}_1+x_2\,\overline{x}_2+x_3\,\overline{x}_3$

La norma (lunghezza) del vettore $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ è data da: $\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\times\vec{x}}=\sqrt{x_1\,\overline{x}_1+x_2\,\overline{x}_2+x_3\,\overline{x}_3}$

$$\vec{x}=(2+3i,4-i,2i)\,,\ \vec{y}=(3-2i,5,4-6i)$$

$$\vec{x}\times\vec{y}=(2+3i)\cdot\left(\overline{3-2i}\right)+(4-i)\cdot\left(\overline{5}\right)+(2i)\cdot\left(\overline{4-6i}\right)=(2+3i)\cdot(3+2i)+(4-i)\cdot(5)+(2i)\cdot(4-6i)$$

$$\vec{x}\times\vec{y}=13i+20-5i-12+8i=8+16i$$

$$\vec{x}\times\vec{x}=(2+3i)\cdot\left(\overline{2+3i}\right)+(4-i)\cdot\left(\overline{4-i}\right)+(2i)\cdot\left(\overline{2i}\right)=(2+3i)\cdot(2-3i)+(4-i)\cdot(4+i)+(2i)\cdot(-2i)=13+17+4=34$$

$$\|\vec{x}\|=\sqrt{\vec{x}\times\vec{x}}=\sqrt{34}$$

Lo spazio $\mathbb{C}^n$, assieme alle operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore, si chiama spazio euclideo complesso ad n dimensioni.

Teorema: Ogni insieme su $\mathbb{C}$ di m vettori ad n dimensioni, non nulli e mutuamente ortogonali, è linearmente indipendente e quindi genera uno spazio vettoriale $\mathbb{C}^m$

Teorema: Ogni spazio vettoriale $\mathbb{C}^m$ contiene soltanto m vettori mutuamente ortogonali.

Una base di $\mathbb{C}^m$ consistente in vettori mutuamente ortogonali si dice base ortogonale. Se i vettori mutuamente ortogonali sono anche versori, allora la base si chiama ortonormale.