Unità Didattica N° 34

L'algebra delle matrici

La nozione di matrice

Dicesi **matrice rettangolare** ad m **righe** ed n **colonne** o matrice $m \times n$ un insieme di $m \cdot n$ elementi (numeri) disposti su m linee orizzontali (**righe**) ed n linee verticali (**colonne**), cioè una tabella del tipo: [*]

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \mathrm{m} \quad \text{righe} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & \mathrm{n} \end{array} & \text{colonne} \end{array}$$

Se $m \neq n$ $(m = n)$ la matrice è detta **rettangolare** (**quadrata**)

a_{ij} = elemento generico della matrice , intersezione della riga **i** con la colonna **j**

Le scritture **A** , $[a_{ij}]$, (a_{ij}) , $\|a_{ij}\|$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sono modi abbreviati di indicare una matrice avente **m** righe ed **n** colonne . Gli elementi a_{ii} o a_{jj} si chiamano **elementi diagonali**.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ **diagonale principale** $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \cdots, a_{n1}$ **diagonale secondaria**

Due matrici si dicono dello **stesso tipo** quando hanno lo stesso numero di righe e di colonne. In due matrici dello **stesso tipo** gli elementi che occupano lo stesso posto si dicono **corrispondenti**. Si chiama **matrice riga** o **vettore riga** una matrice con una sola riga, cioè una matrice di ordine $1 \times n$. Si chiama **matrice colonna** o **vettore colonna** una matrice con una sola colonna, cioè una matrice di ordine $m \times 1$. Si chiama **matrice nulla** o **matrice zero** una matrice i cui elementi sono tutti nulli. In una matrice quadrata i due elementi a_{ij} e a_{ji} si dicono coniugati. I loro posti sono **simmetrici** rispetto alla diagonale principale. Gli elementi che stanno sulla diagonale principale sono **coniugati di se stessi**.

Una matrice quadrata si dice **simmetrica** quando i suoi elementi coniugati (che sono simmetrici rispetto agli elementi della diagonale principale) sono uguali, cioè quando risulta: $a_{ij} = a_{ji}$

Una matrice quadrata si dice **emisimmetrica** quando i suoi elementi coniugati (che sono simmetrici rispetto agli elementi della diagonale principale) sono **opposti**, cioè quando risulta: $a_{ij} = -a_{ji}$

[*] Le righe si contano dall'alto verso il basso , le colonne si contano da sinistra verso destra

$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$, cioè gli elementi della diagonale principale di una matrice quadrata emisimmetrica sono tutti nulli .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a & b \\ a & a_{22} & c \\ b & c & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Esempi di **matrici simmetriche**

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice emisimmetrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

→ Diagonale secondaria o diagonale ascendente

→ Diagonale principale o diagonale discendente

Ogni matrice ha due diagonali: quella che va dall'angolo superiore sinistro all'angolo inferiore destro prende il nome di **diagonale principale**, quella che va dall'angolo inferiore sinistro all'angolo superiore destro è detta **diagonale secondaria**.

Una matrice può essere pensata come un insieme di **vettori colonna** o come un insieme di **vettori riga**.

Una matrice quadrata avente **nulli** tutti i suoi elementi tranne quelli della diagonale principale si chiama matrice diagonale.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

matrice diagonale

Una matrice diagonale prende il nome di **matrice scalare** se gli elementi della sua diagonale principale sono tutti uguali tra loro .

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Matrice scalare $\qquad a \neq 0$

Una matrice diagonale avente la *diagonale principale* costituita da elementi tutti uguali all'unità prende il nome di **matrice unità** o **matrice identica** (di **ordine n**) e si indica col simbolo I_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice unità di ordine **n** o matrice identica

Una matrice quadrata è detta **triangolare alta** (triangolare bassa) se gli elementi al di sotto (al di sopra) della diagonale principale sono tutti nulli.

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ **Matrice triangolare alta**

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 13 & 8 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$ **Matrice triangolare bassa**

I vettori colonna di **A** si indicano spesso con $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \cdots, \mathbf{a}^n$ e la matrice **A** si può scrivere anche come

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \cdots, \mathbf{a}^n\right]$$

Analogamente possiamo indicare con $\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^m$ i vettori riga e la matrice **A** può essere scritta nella seguente maniera:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{bmatrix}$$

L'insieme delle matrici $m \times n$ si indica col simbolo $M(m,n)$.

Due matrici **A** e **B** dello stesso tipo , cioè entrambe di ordine $m \times n$, si dicono **uguali** e si scrive $A = B$ se hanno uguali tutti gli elementi corrispondenti .

Due matrici **A** e **B** dello stesso tipo si dicono **opposte** se hanno opposti gli elementi corrispondenti.

Data la matrice $A = [a_{ij}]$ di ordine $m \times n$, dicesi **matrice trasposta di A** (e viene indicata con uno dei seguenti simboli A_T, A^T, A_{-1}, A', ${}^tA$, A^t) di ordine $n \times m$ ottenuta dalla matrice data scambiando le righe con le colonne.

Questo significa che le **righe** di **A** diventano le **colonne** di A^T, le **colonne** di **A** diventano le **righe** A^T. Una *matrice quadrata simmetrica* coincide con la sua **trasposta** e viceversa se una matrice quadrata coincide con la sua trasposta essa è simmetrica**.**

La trasposta della matrice $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & -2 & 10 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ è la matrice $\begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \\ 4 & 10 & -2 \end{bmatrix}$

La **traccia** di una matrice **A** è la somma di tutti gli elementi della sua diagonale principale:

$$tr\ A = tr[a_{ij}] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Una matrice quadrata si dice **ortogonale** se il prodotto di essa con la sua **trasposta** è uguale alla matrice **unità**, cioè la matrice **A** è **ortogonale** se risulta : $A \cdot A^T = I$

Definiamo **matrice aggiunta** della matrice **A** una matrice A^* che ha come elementi i **complementi algebrici** degli elementi di **A**.

$$A^* = A^G = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots\cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Linguaggio usato per le matrici

1) Due o più righe, due o più colonne si dicono **linee parallele** della matrice

2) Due elementi di due righe (colonne) parallele si dicono **corrispondenti** se appartengono alla stessa colonna (riga)

3) **Sommare** ad (**sottrarre** da) una linea, una linea parallela significa sommare a (sottrarre da) ciascun elemento dell'una il corrispondente dell'altro

4) **Moltiplicare** una linea per un numero **k** significa moltiplicare tutti i suoi elementi per **k**

5) **Scambiare** tra loro due linee parallele vuol dire scambiare ogni elemento dell'una col corrispondente dell'altra

6) Una **linea è nulla** se tutti i suoi elementi sono nulli

7) Due **linee** si dicono **uguali** se gli elementi corrispondenti sono uguali

8) Due linee si dicono **proporzionali** se gli elementi di una si ottengono dai corrispondenti dell'altra moltiplicandoli per uno stesso fattore $k \neq 0$

9) Due **matrici** sono **dello stesso tipo** se hanno un eguale numero di righe e di colonne

Somma algebrica di due o più matrici

Si chiama **somma algebrica** di due matrici dello stesso tipo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ la matrice dello stesso tipo $C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ ottenuta sommando gli elementi corrispondenti nelle due matrici. La somma algebrica si estende facilmente al caso in cui le matrici siano più di due.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 12 & -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 6 \\ -5 & 7 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 1 & -10 & 12 \\ -2 & 19 & -28 \end{bmatrix}$$

La **differenza di due matrici dello stesso** tipo è uguale alla somma della prima matrice con l'**opposta** della seconda.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & -2 & 10 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Prodotto di un numero reale per una matrice

Il prodotto di un numero reale **k** per una matrice **A** è la matrice **B** i cui elementi sono quelli di **A** moltiplicati per k. Si noti bene che per moltiplicare una matrice per un numero reale bisogna moltiplicare tutti gli elementi della matrice per quel numero.

Risulta : $k \cdot A = A \cdot k$ cioè moltiplicare il numero reale k per la matrice **A** equivale a moltiplicare la matrice **A** per il numero reale **k** .

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ -6 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

Prodotto scalare di una matrice riga per una matrice colonna

Si definisce **prodotto scalare** della matrice riga **A** di ordine $1 \times n$ per la matrice colonna **B** di ordine $n \times 1$ il numero che si ottiene sommando algebricamente gli n prodotti degli elementi che occupano lo stesso posto nelle due matrici .

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n-11} \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots\cdots + a_{n1} \cdot b_{n1}$$

$A \times B$ = somma algebrica dei prodotto degli elementi che occupano lo stesso posto nella matrice riga e nella matrice colonna

$$A \times B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \cdots\cdots + \alpha_n \cdot \beta_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = (1)(-2) + (2)(-1) + (5)(3) = -2 - 2 + 15 = 11$$

Osservazione

L'insieme di tutti i vettori di ordine **n** costituisce uno **spazio vettoriale**, una cui **base** è l'insieme di tutti i vettori unitari (**versori**) di ordine n. Poiché tali versori sono **n** possiamo dire che lo spazio vettoriale ha **base n**. Questo significa che gli n **versori** possono generare tutti i vettori numerici di ordine n dello spazio vettoriale considerato. Il significato di quanto scritto sarà chiarito nei prossimi paragrafi.

La moltiplicazione tra due matrici

Nell'insieme delle matrici possiamo introdurre quattro tipi di moltiplicazione tra due matrici .

1) **Prodotto righe per colonne** che può effettuarsi quando il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice

2) **Prodotto colonne per righe** che può effettuarsi quando il numero delle righe della prima matrice è uguale al numero delle colonne della seconda matrice

3) **Prodotto righe per righe** che può effettuarsi quando il numero delle righe della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice .

4) **Prodotto colonne per colonne** che può effettuarsi quando il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle colonne della seconda matrice .

Prodotto righe per colonne di due matrici

Questo prodotto può effettuarsi solo se il numero **n** delle colonne della prima matrice $A_{m,n}$ è uguale al numero **n** delle righe della seconda matrice $B_{n,p}$.

Si definisce **prodotto righe per colonne** della matrice **A** di ordine $m \times n$ per la matrice **B** di ordine $n \times p$ la matrice **C** di ordine $m \times p$ il cui elemento generico $c_{i\,j}$ si ottiene moltiplicando scalarmente la riga i-esima di **A** per la colonna j-esima di **B**. Quindi il risultato è una matrice **C** di ordine $m \times p$ avente m righe ed p colonne: $A_{m,n} \times B_{n,p} = C_{m,p} = [c_{i\,j}]$

dove $c_{i,j}$ è il prodotto scalare del vettore riga R_i di posto i della prima matrice $A_{m,n}$ per il vettore colonna C_j di posto j della seconda matrice $B_{n,p}$.

$c_{i\,j} = R_i \times C_j$ R_i = riga i della prima matrice C_j = colonna j della seconda matrice

$$c_{i\,j} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1\,j} \\ b_{2\,j} \\ \vdots \\ bn_j \end{bmatrix}$$

In questo tipo di prodotto si moltiplicano le righe (della prima matrice A) per le colonne (della seconda matrice B) e si scrive per righe.

Esempio: $c_{12} = R_1 \times C_2$, $c_{23} = R_2 \times C_3$ (si tratta di prodotti scalari fra vettori)

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \times \begin{array}{c} B \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \end{array} = \overset{C}{\begin{bmatrix} R_1 \times C_1 & R_1 \times C_2 & R_1 \times C_3 \\ R_2 \times C_1 & R_2 \times C_2 & R_2 \times C_3 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (0)(3) + (1)(-1) + (2)(1) = -1 + 2 = 1$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (0)(1) + (1)(2) + (2)(-1) = 2 - 2 = 0$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (0)(0) + (1)(1) + (2)(1) = 1 + 2 = 3$$

$$c_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0)(-1) + (1)(0) + (2)(0) = 0$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2)(3) + (1)(-1) + (3)(1) = -6 - 1 + 3 = -4$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (-2)(1) + (1)(2) + (3)(-1) = -2 + 2 - 3 = -3$$

$$c_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2)(0) + (1)(1) + (3)(1) = 0 + 1 + 3 = 4$$

$$c_{24} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2)(-1) + (1)(0) + (3)(0) = 2$$

Proprietà formali del prodotto di matrici

1) **Proprietà distributiva a sinistra rispetto alla somma** $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

2) **Proprietà distributiva a destra rispetto alla somma** $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$

3) **Proprietà associativa:** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

In generale , il prodotto righe per colonne di due matrici **non gode della proprietà commutativa** .

Trasposta di un prodotto di matrici

La matrice trasposta di un prodotto di due matrici è uguale al prodotto delle trasposte in ordine inverso, cioè: $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

La matrice trasposta di un prodotto di tre matrice è uguale al prodotto delle trasposte delle tre matrici, cioè: $\left(A\times B\times C\right)^T = A^T\times B^T\times C^T$

Il prodotto fra matrici non gode della proprietà commutativa.

Determinante di una matrice quadrata

Se una matrice è rettangolare, essa rappresenta un simbolo al quale non si fa corrispondere alcun valore numerico. Invece ad una matrice quadrata viene associato un numero, da ricavare mediante regole, detto **determinante** della matrice ed indicato col simbolo:

$$\det \mathbf{A} = \left|\mathbf{A}\right| = \left|a_{ij}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dicesi **determinante** della matrice quadrata A_n un numero che può estrarsi da una matrice quadrata moltiplicandone fra loro gli elementi n per volta e sommando tali prodotti secondo regole
La prima di queste impone che ogni prodotto contenga un solo elemento di ciascuna riga ed un solo elemento di ciascuna colonna. La seconda stabilisce il segno da attribuire a ciascun prodotto. Definiamo **termine principale** il seguente prodotto : $a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdots a_{n-1n-11}\cdot a_{nn}$

Il **determinante** di una matrice quadrata di ordine n è :

1) il numero somma di $n!$ termini [(*)] 2) ogni termine è composto da n fattori 3) ogni termine si ottiene dal termine principale tenendo fissi i primi (secondi) indici e permutando gli altri in tutti i modi possibili 4) ogni termine va preso col suo segno o col segno cambiato secondo che la **classe delle permutazione** è pari o *dispari* rispetto a quella dei primi (o dei secondi) indici considerata come **permutazione fondamentale** .

Dati i primi **n** numeri interi $1,2,3,4,\cdots\cdots,n-1,n$ e presa una qualsiasi permutazione di essi , si dice che c'è uno **inversione** tutte le volte che un numero più grande precede uno più piccolo . La somma di tutte le inversioni può essere **pari** o dispari **.** In corrispondenza si avranno le **permutazioni di classe pari** e quelle di **classe dispari** . Per esempio , per $n = 4$, 1243 è di classe dispari (una inversione) , 1423 è di classe pari (due inversioni) .

[(*)] $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$, cioè il fattoriale di un numero intero positivo n è il prodotto di n fattori decrescenti a partire da n .

Si chiama minore complementare M_{ij} di un elemento a_{ij} di una matrice quadrata A_n il **determinante** di ordine $n-1$ della *sottomatrice* quadrata ottenuta eliminando da A_n la riga **i** e la colonna **j**.

Si chiama **complemento algebrico** A_{ij} di un elemento a_{ij} di una matrice quadrata A_n , il valore del minore complementare moltiplicato per $(-1)^{i+j}$, cioè : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Sviluppo del determinante del secondo ordine

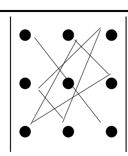
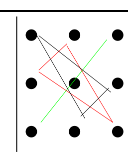
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sviluppo del determinate del terzo ordine con la regola di Sarrus

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \hline & & + & + & + \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Si trascrivono , alla destra del determinante , la prima e la seconda colonna . Si ottiene una tabella di 3 righe e 5 colonne . Si prendono col loro segno i prodotti formati con gli elementi della diagonale principale e delle sue linee parallele , col segno cambiato quelli della diagonale secondaria e delle due linee ad essa parallele . Indi si effettua la somma algebrica di tali prodotti .

Sviluppo del determinante del terzo ordine con la regola del triangolo

 col segno +	 col segno -

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ col segno +	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ col segno -
Uno dei tre vertici dei due triangoli si trova agli estremi della diagonale secondaria . Gli altri due vertici di ciascun triangolo sono linee parallele alla diagonale principale	Uno dei tre vertici dei due triangoli si trova agli estremi della diagonale principale . Gli altri due vertici di ciascun triangolo sono linee parallele alla diagonale secondaria

Primo teorema di Laplace

Il valore del determinante di una matrice A_n è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una qualsiasi linea per i rispettivi complementi algebrici.

Sviluppo del determinante secondo la prima riga

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + \cdots + a_{1n}\cdot A_{1n}$$

Sviluppo del determinante secondo la prima colonna

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + \cdots + a_{n1}\cdot A_{n1}$$

Sviluppo del determinante secondo la riga i-esima

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \cdots + a_{in}\cdot A_{in}$$

Sviluppo del determinante secondo la colonna j-esima

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj}\cdot A_{nj}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-8-2-4-4-6 = -18$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -16-16+24+24 = 16$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4(-4-4) - 3(3+8) + 3(3-8) = -16$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-4-4) - 3(3-8) + 3(3+8) = 16$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4(3+8) + 4(3-8) + 3(-6-6) = -12$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4(3-8) + 4(3+8) + 3(-6-6) = -12$$

Secondo teorema di Laplace

La somma dei prodotti degli elementi di una **riga** (**colonna**) della matrice per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti di un'altra **riga** (**colonna**) è uguale a zero.

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{2n} = 0$$

Proprietà dei determinanti

1) Se tutti gli elementi di una linea (riga o colonna) di una matrice quadrata sono **nulli**, il determinante della matrice è **uguale a zero**.

2) Il determinante di una matrice quadrata è **nullo** se e solo se le righe (e quindi anche le colonne) sono **vettori linearmente dipendenti**.

Una matrice quadrata a determinante non nullo è detta **matrice non singolare** (o *matrice regolare*).

Una matrice quadrata a determinante nullo è detta **matrice singolare** (o **degenere**).

3) Scambiando tra loro due **linee parallele** (cioè due righe o due colonne), il **determinante cambia segno** (**proprietà dell'alternanza**)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p & n & m \\ z & y & x \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

4) Se moltiplichiamo tutti gli elementi di una linea (riga o colonna) della matrice quadrata A per uno stesso numero k, il determinante di questa nuova matrice è uguale al determinate di A moltiplicato per k.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ kx & ky & kz \\ m & n & p \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} =$$

5) Se due linee (righe o colonne) di una matrice quadrata sono **proporzionali** (cioè gli elementi di una linea si ottengono moltiplicando per uno stesso numero **k** i corrispondenti elementi dell'altra linea, in particolare le linee sono **uguali** se il coefficiente di proporzionalità è uguale ad uno), allora il determinante della matrice è **nullo**.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

6) Il determinante di una matrice quadrata **non si altera** se una sua linea (riga o colonna) viene sostituita da una qualsiasi combinazione lineare di questa linea (riga o colonna) con altre sue linee (righe o colonne) parallele della matrice.

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7a+5x-3m & 7b+5y-3n & 7c+5z-3p \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} \qquad R_1 \leftarrow 7R_1 + 5R_2 - 3R_3$$

In particolare, se agli elementi di una riga (o colonna) di una matrice quadrata si sommano quelli corrispondenti di un'altra riga (o colonna), tutti moltiplicati per una stessa costante, il determinante della matrice quadrata non cambia.

7) Se una linea di una matrice quadrata è combinazione lineare di due o più linee parallele allora il determinante della matrice quadrata è **nullo**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka+hm & kb+hn & kc+hp \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \qquad R_2 = k\cdot R_1 + h\cdot R_3$$

8) Se i termini di una linea **L** (riga o colonna) di una matrice quadrata A sono espressi come **somma algebrica** di due o più addendi, il determinante di A è uguale alla somma algebrica dei determinanti di altrettante matrici , ciascuna avente le stesse linee di **A** , eccettuata la linea **L** al posto della quale si trovano, uno per volta, i vari addendi di **L** (**proprietà di multilinearità dei determinanti**)

9) Il determinante della matrice unità I_n, di qualsiasi ordine, è uguale ad **uno**.

10) Due matrici quadrate fra loro trasposte hanno lo stesso determinante, cioè la matrice quadrata **A** e la sua trasposta A^T hanno lo stesso determinante: $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix}$$

11) Il determinante del prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici (**teorema del Binet**) $|A\times B| = |A|\cdot|B|$

Minore di una matrice e minore complementare

Sia **A** una matrice di ordine $m \times n$. Possiamo estrarre da essa una **sottomatrice** scegliendo **p** righe e **q** colonne ($0 < p \leq m$, $0 < q \leq n$) di **A**, e considerando la matrice formata dagli elementi che appartengono contemporaneamente alle p righe ed alle q colonne prescelte.
Nel caso in cui la sottomatrice estratta dalla matrice **A** sia quadrata ($p = q$) il suo determinante si dice **minore di ordine p** della matrice **A** (*) .

Ulteriori considerazioni sui minori di una matrice.

Adesso cerchiamo di chiarire il concetto di **minori complementari** di una matrice $m \times n$.
Abbiamo detto che **minore di ordine k** di una matrice $m \times n$ è un qualsiasi determinante di **ordine k** ottenuto con gli elementi comuni a k righe e k colonne della matrice. Diversamente possiamo dire : << data una matrice ad m righe ed n colonne e fissato un numero intero positivo **k** non maggiore del più piccolo dei due numeri **m** ed **n** ($o < k \leq m$, $o < k \leq n$) ,consideriamo k righe qualsiasi e k colonne qualsiasi della matrice A .
Gli elementi della matrice comuni a tali k righe e k colonne (nella posizione che occupano nella matrice **A**) costituiscono una matrice quadrata il cui determinante dicesi **minore di ordine k** estratto dalla matrice A .

Rango o caratteristica di una matrice

Si chiama **rango** o **caratteristica** di una matrice **A** l'ordine massimo dei minori non tutti nulli che si possono estrarre dalla matrice A. Il rango di una matrice A $m \times n$ non può superare il più piccolo dei numeri m, n .Per indicare la **caratteristica** di una matrice possiamo usare uno dei seguenti simboli: $r(A)$, r_A , $k(A)$, k_A , $\rho(A)$, ρ_A

Dire che una matrice **A ha rango o caratteristica k** significa affermare che:

1) esiste almeno un minore di ordine **k** diverso da zero

(*) Qualche autore definisce **minore** di ordine k di una matrice **A** (quadrata o rettangolare) qualunque matrice quadrata (e non il determinante, che è un numero, della matrice quadrata) ottenuta con gli elementi comuni a k righe e k colonne della matrice scelte arbitrariamente.

2) tutti i minori della matrice **A** di ordine $k+1$ (e quindi anche quelli di ordine maggiore di $k+1$) sono nulli.

Calcolare la caratteristica della matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Tutti i minori del terzo ordine sono nulli : $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ma esistono minori del secondo ordine non nulli , come ad esempio :

$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. Dunque la caratteristica della matrice è due : $k(A) = \rho(A) = 2$

Teorema di Kronecker o teorema degli orlati

Orlare una matrice **A** di ordine $m \times n$ significa aggiungerle successivamente una riga ed una colonna in modo da trasformarla in una matrice **B** di ordine $(m+1, n+1)$. La matrice **B** così ottenuta conterrà la matrice data **A** come **sottomatrice** .

Particolarmente interessante è il caso in cui **A'** risulta essere una sottomatrice quadrata di ordine **p** di una matrice **A** $m \times n$. Se vogliamo **orlare** **A'** con una riga ed una colonna di **A** possiamo scegliere $m - p$ righe da aggiungere ad **A'** e , in corrispondenza di ognuna di esse , possiamo scegliere $n - p$ colonne . In totale vi sono $(m - p)(n - p)$ modi diversi di orlare la matrice **A'** con righe e colonne di **A**.

Teorema fondamentale**: Il rango di una matrice rappresenta il numero massimo di vettori riga e di vettori colonna linearmente indipendenti della matrice.**

Questo significa che se il rango di una matrice è 3 allora tre vettori riga (vettori colonna) della matrice sono linearmente indipendenti .Viceversa se una matrice ha k vettori riga (vettori colonna) linearmente indipendenti ha rango k .

Teorema di Kronecker

C.N.S. perché una matrice **A** di ordine $m \times n$ abbia **caratteristica k** è che esista almeno un **minore** M_k di ordine k della matrice **A** diverso da **zero** e che siano tutti nulli i minori di ordine $k+1$ ottenuti orlando (*) in tutti i modi possibili M_k con una riga ed una colonna qualsiasi di **A** .

L'uso del suddetto teorema permette in molti casi di determinare un modo assai rapido la caratteristica di una matrice .

Per calcolare la caratteristica (*) di una matrice utilizzando il teorema di Kronecker si procede nella seguente maniera:

1) Si trova un minore M_k di ordine **k** diverso da zero

2) Calcoliamo i minori di ordine $k + 1$ ottenuto **orlando** i minori M_k . Se tutti questi minori sono nulli , la caratteristica della matrice **A** è **k** .

3) Se, invece , uno di questi minori di ordine $k+1$ (ad esempio M_{k+1}) è diverso da zero , allora bisogna ripetere il procedimento orlando M_{k+1} .

Calcolare la caratteristica della matrice 5×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 6 & 12 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ La caratteristica della matrice è almeno $k = 2$ .Mi calcolo gli orlati del terzo ordine del minore **M**.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;,\; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \;,\; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \;,\; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 0 \;,\; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ La caratteristica della matrice **A** è due : $k_A = 2$.

(*) Si dice che si orla una matrice quadrata quando le si aggiungono una riga ed una colonna precedenti la prima o seguenti l'ultima . Si dice che si orla un minore M_k se si orla la **sottomatrice quadrata** di cui esso è il determinante

(*) La caratteristica di una matrice indica il numero massimo di vettori (riga o colonna) linearmente indipendenti che essa contiene .

Matrice inversa di una matrice quadrata

Si chiama **matrice inversa** di una matrice quadrata **A** di ordine **n**, e si indica col simbolo A^{-1}, una matrice quadrata (se esiste) di ordine **n** che moltiplicata a destra ed a sinistra per **A** dà la **matrice unità** di ordine n: $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$

Teorema C.N.S. perché una matrice quadrata ammetta la matrice inversa è che essa sia **regolare** (cioè *non singolare*) (*)

Per calcolare la **matrice inversa** A^{-1} della matrice quadrata **A** si procede come segue:

1) Si considera la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

2) Si calcola la **matrice aggiunta** della matrice **A**:

$$A^{*} = A^{G} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots\cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

3) Si calcola la **matrice trasposta** della matrice aggiunta $\left(A^{G}\right)^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots\cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots\cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

4) Si calcola il **determinante** della matrice **A** ricordando che deve essere $\det A \neq 0$

5) Gli elementi della **matrice inversa** A^{-1} si ottengono dividendo ogni elemento della matrice $\left(A^{G}\right)^{T}$ per il $\det A \neq 0$

Infatti sussiste il seguente **teorema**

Gli elementi dell'inversa di una matrice quadrata **A** non singolare si ottengono dividendo ogni elemento della matrice $\left(A^{G}\right)^{T}$ (**trasposta dell'aggiunta**) per il determinante della matrice **A**.

(*) Una matrice quadrata si dice regolare o non singolare quando il suo determinante è diverso da zero

In simboli abbiamo: $$A^{-1} = \frac{\left(A^G\right)^T}{\det A} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{13}}{|A|} & \ldots\ldots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \ldots\ldots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \frac{A_{n3}}{|A|} & \ldots\ldots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \det A = |A| = -11 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -13; \; A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -12 \quad A_{33} = \left|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{matrix}\,4\right| = -7$$

$$A^* = A^G = \begin{bmatrix} 11 & -13 & -3 \\ -11 & 10 & 4 \\ 11 & -12 & -7 \end{bmatrix}$$ = matrice aggiunta = Matrice che ha come elementi i complementi algebrici degli elementi della matrice A

$$\left(A^*\right)^T = \left(A^G\right)^T = \begin{bmatrix} 11 & -11 & 11 \\ -13 & 10 & -12 \\ -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$ = **matrice trasposta della matrice aggiunta**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{13}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{12}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix}$$ = **matrice inversa** Risulta: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{13}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{12}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ \frac{13}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{12}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il prodotto tra le due matrici **A** ed A^{-1} è un **prodotto righe per colonne**, cioè il prodotto scalare della prima riga della prima matrice **A** per la prima colonna della seconda matrice A^{-1} costituisce il primo elemento della matrice prodotto, il prodotto scalare della prima riga della matrice A per la seconda colonna della matrice A^{-1} costituisce il secondo elemento della matrice prodotto, e cosi di seguito. Si dice, brevemente, che si moltiplica riga per colonna e si scrive per riga.