Date le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ determinare $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $2\mathbf{A}+3\mathbf{B}$

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2a & -3b \\ a & 2b \end{pmatrix}$

23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

25. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -3b & c \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a & -b & c \\ 2a & 3b & -c \end{pmatrix}$

Calcolare il prodotto $A \times B$ nei seguenti casi

01) $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

02) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 11 & -4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

03) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \left(\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \right.$

04) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \left(\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 12 & 4 \\ 12 & 17 \end{bmatrix} \right)$

05) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 16 \end{bmatrix} \right)$

06) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \left(\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ -4 & -7 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 11 & 9 \\ 8 & 9 & 4 & 9 \end{bmatrix} \right)$

Determinare il valore dei numeri reali a,b,c,d sapendo che

01A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad (a=-2 \ , \ b=2 \ , \ b=\frac{3}{2} \ , \ c=-1)$

02A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad (a=\frac{1}{5} \ , \ b=\frac{2}{5} \ , \ c=\frac{1}{5} \ , \ d=-\frac{3}{5})$

03A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad (a=5 \ , \ b=1 \ , \ c=8 \ , \ d=2)$

03) Date le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

provare che:

$$AB = 0 \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

04) Date le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

provare che è $AB = AC$.
Quale osservazione si può fare su questa eguaglianza?

Calcolare il valore dei seguenti determinanti

01B) $\begin{vmatrix} tg\,\alpha & -1 \\ 1 & tg\,\alpha \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

02B) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = -1$

03B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

04) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

05) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$

06) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48$

07) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1$

08) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$

09) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} k & -2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & k \end{vmatrix}$ $\qquad (3k(2-k))$

11) $\begin{vmatrix} 3k & 2h & -3 \\ 5h & -7 & k \\ 6k & 4h & -6 \end{vmatrix}$ (0) **13)** $\begin{vmatrix} a & a^2 & b \\ a^2 & c & b^2 \\ a & b^2 & b \end{vmatrix}$ ($-ab(a+b)(a-b)^2$)

14) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ ($2a^2(a+x)$) **13)** $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ (0) **14)** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ ($-2(x^3+y^3)$)

15) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2(a-b) & 2b & 2 \\ b-a & -b & -c \end{vmatrix}$ (0) **16)** $\begin{vmatrix} 1 & a & 2a+2 \\ 2 & a & 2a+4 \\ 3 & a & 2a+6 \end{vmatrix}$ (0) **17)** $\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c+1 \end{vmatrix}$ (b)

Calcolare il determinante delle seguenti matrici

189 $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{bmatrix}$ [1] **190** $\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$ $[\cos 2x]$ **191** $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} 2x \\ 1 & 2\cos x \end{bmatrix}$ [0]

192 $\begin{bmatrix} \operatorname{tg} x & -1 \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$ [$2\sin x$] **193** $\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos x}{2} & -1 \\ \cos^2\dfrac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}$ [1] **199** $\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & 2\operatorname{sen} x & 3\operatorname{sen} x \\ \cos x & \cos x & 2\cos x \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ [$\sin 2x$]

200 $\begin{bmatrix} 2\operatorname{tg} x & \operatorname{tg} x & 3\operatorname{tg} x \\ 0 & 2 & 0 \\ \cos x & -\cos x & 2\cos x \end{bmatrix}$ [$2\sin x$] **201** $\begin{bmatrix} \dfrac{1-\cos x}{2} & \operatorname{sen} x & \cos\dfrac{x}{2} \\ 1 & 2\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2} & 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\left[-\dfrac{(1+\cos x)^2}{\operatorname{sen} x}\right]$

205 $\begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 3a^2 & -4a^2 & 5a^2 \\ -2a^3 & a^3 & -a^3 \end{bmatrix}$ [$-15a^6$] **207** $\begin{bmatrix} x^3 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ [x^6]

208 $\begin{bmatrix} a+3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & a-3 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & a+4 & 0 \\ a+4 & -a-4 & a+4 & 2 \end{bmatrix}$ [0]

Risolvere le seguenti equazioni

01) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & x+3 & x+2 \\ 6 & 3x & 2x \end{vmatrix} = 0$ [x = 2 , x = 3] **02)** $\begin{vmatrix} x+2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$ [x = −4 , x = −6]

03) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 15 \\ x & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 30$ [x = 3]

04) $13 + \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ [k = 9]

05) $\begin{vmatrix} -5 & -4 & -3 \\ 1 & k & 8 \\ 0 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 324$ [k = 0]

06) $3 + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & k \end{vmatrix} = 0$ [$k = \frac{1}{4}$]

07) $25 + \begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ [k = −2]

08) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ k & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -35$ [k = 2]

09) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ [$x = \frac{1}{2}$]

10) $\begin{vmatrix} y & 1 & -y & 1 \\ 1 & -y & 1 & y \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ [y = 0 , y = 2]

11) $\begin{vmatrix} 2 & x & 3x \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$ [$x = \frac{20}{11}$]

12) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

13) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$

14) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

15) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

16) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

17) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$

18) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$

13) $\begin{vmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = 0$ (3 , 4 , -2)

14) $\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} = 0$ (4 , -2)

15) $\begin{vmatrix} t-3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{vmatrix} = 0$ (4 , -2)

226 $\begin{vmatrix} x & 13 & -17 \\ 0 & x & 5 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 8$ [2]

227 $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 2 & x & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 0$ [0 , 1 , -1]

228 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & -x \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & x & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ [$1 , -\frac{19}{4}$]

229 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ x & 3 & 3(x-2) \\ x-2 & x-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $[6-2\sqrt{3}, 6+2\sqrt{3}]$

230 $\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ $\left[\pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right]$

231 $\begin{vmatrix} 2\operatorname{sen} x & \cos x \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\left[2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right]$

232 $\begin{vmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = -1$ $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right]$

234 $\begin{vmatrix} 2^x & 20 \\ 2^x & 2^x \end{vmatrix} = -64$ $[2,4]$

235 $\begin{vmatrix} 2^{3x} & 4 \\ 2^x & 2^x-1 \end{vmatrix} = -4$ $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

237 $\begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 4 \\ 3^x & 3^x \end{vmatrix} = -21$ $[\,2\,]$

238 $\begin{vmatrix} 4 & \log_8 x \\ 3 & \log_2 x \end{vmatrix} = 6$ $[\,4\,]$

240 $\begin{vmatrix} \ln(x-2) & -1 \\ \ln(x-3) & 1 \end{vmatrix} = \ln(x^2-4x)$ $[\,6\,]$

241 $\begin{vmatrix} \log(1-x) & \log(x+1) \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ $\left[\ -\frac{9}{11}\ \right]$

Risolvere le seguenti inequazioni

a) $\begin{vmatrix} 2 & k & 0 \\ k & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$ $[-1 \leq K \leq 4\,]$

b) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & x & 2 \end{vmatrix} \leq 0$ $[\,x \leq -1\ ,\ x \geq 4\,]$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}x & 0 & -\frac{2}{3}x \\ -3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & \frac{15}{2}x \end{vmatrix} < 0$ $\left[-\frac{8}{3} < x < 0\,\right]$

d) $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 3x & 0 \\ \frac{3}{4} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2x \end{vmatrix} > 0$ $\left[\ x < \frac{-4-\sqrt{7}}{3} \quad \frac{-4+\sqrt{7}}{3} < x < 0 \quad \frac{-3x(3x^2+8x+3)}{2} > 0\ \right]$

242 $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ \frac{7}{2}x & 1 \end{vmatrix} < -6$ $[1 < x < 6]$

243 $\begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} > 0$ $[a > 1]$

244 $\begin{vmatrix} 2^{2x} & 10 \\ 2^x & 1 \end{vmatrix} < -16$ $[1 < x < 3]$

245 $\begin{vmatrix} 3^x & 18 \\ -1 & 3^x-11 \end{vmatrix} > 0$ $[x < \log_3 2 \vee x > 2]$

246 $\begin{vmatrix} 5^x & 5^{x+2} \\ 1 & 5^{x+1} \end{vmatrix} > 2500$ $[x > 2]$

247 $\begin{vmatrix} \log_2 x & 6 \\ \log_2 x & \log_2 x \end{vmatrix} > -8$ $[0 < x < 4 \vee x > 16]$

248 $\begin{vmatrix} |5^x-1| & -3 \\ 5^x & 1 \end{vmatrix} < 3$ $[x < 0]$

249 $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & \operatorname{sen} x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} < 1$ $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

250 $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 x & 1+\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x & 1 \end{vmatrix} > -\sqrt{3}$ $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

251 $\begin{vmatrix} 2\sqrt{3}\cos x & \operatorname{sen} x \\ 2\cos x & \cos x \end{vmatrix} < \sqrt{3}$ $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi \right]$

Determinare il rango delle seguenti matrici

01) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$ $r = 2$

02) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ $r = 2$

03) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$ $r = 3$

04) $D = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 36 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$ $r = 2$

Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del corrispondente parametro

a) $A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}$ pag. 1

b) $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a-1 & 0 \\ a & 12a-2 & 2a-2 \end{bmatrix}$ pag. 3

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k^2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2k & 4 \end{bmatrix}$ pag. 5

d) $D = \begin{bmatrix} 4 & -\lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ pag. 7

e) $E = \begin{bmatrix} \lambda & 2+\lambda & 2 & 7 \\ 0 & \lambda & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ pag. 9

f) $F = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 2\lambda+1 & \lambda & 2\lambda-1 \end{bmatrix}$ pag. 11

g) $H = \begin{bmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{bmatrix}$ pag . 15

h) * $I = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 2k & 1 \end{bmatrix}$ Oriolo pag. 722

i) * $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 6 \end{bmatrix}$ Oriolo pag. 723

l) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & 3 \end{bmatrix}$ $r = 2 \ \forall \lambda \in R$

m) $\begin{bmatrix} h & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & h \\ 3h & 1 & 5 & 3+h \end{bmatrix}$

267 Determiniamo al variare del parametro k, il rango della seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ -1 & k+1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante della matrice:

$$\det = k(k+1).$$

Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ il determinante della matrice è diverso da zero e quindi la sua caratteristica è 3.

Se $k = 0$ o $k = -1$ il determinante è nullo e quindi la caratteristica è minore di 3.

Esaminiamo i due casi separatamente.

- $k = 0$

La matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sottomatrice costituita dagli elementi delle prime due righe e delle ultime due colonne:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ha determinante uguale a 1 e perciò tale matrice ha caratteristica 2.

- $k = -1$

La matrice diventa:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La sottomatrice costituita dagli elementi delle ultime due righe e della prima e terza colonna:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha determinante uguale a -1 e perciò tale matrice ha caratteristica 2.

Conclusioni:

se $k \neq 0$ e $k \neq -1$ la caratteristica è 3;

se $k = 0$ o $k = -1$ la caratteristica è 2.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a-1 & 0 \\ a & 2a-2 & 2a-2 \end{bmatrix}.$$

[Per $a = 0$, $k = 2$; per $a = 1$, $k = 1$; per ogni altro valore di a, $k = 3$]

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a(a-1) & a & 0 \\ 0 & a & a(a-1) \end{bmatrix}.$$

[Per $a = 0$, $k = 2$; per $a = 1$, $k = 1$; per ogni altro valore di a, $k = 3$]

$$C = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & a(a-1) & 0 \\ 0 & a(a-1) & a \end{bmatrix}.$$

[Per $a = 0$ e $a = 1$, $k = 1$; per ogni altro valore di a, $k = 3$]

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & t & 2 \end{bmatrix}.$$

[Per $t = 1$ e $t = -4$, $k = 2$; negli altri casi $k = 3$]

$$B = \begin{bmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 2 & t \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

[Per $t = 1$ e $t = -\frac{2}{3}$, $k = 2$; negli altri casi è $k = 3$]

$$C = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

[Per $t = 1$, $k = 1$; per $t = -2$, $k = 2$; negli altri casi è $k = 3$]

10) Data la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & -k & 2k \end{bmatrix}$ determinare k in modo che il suo rango sia :

a) uguale a 2 $(k \neq 0)$ b) uguale ad 1 $(k = 0)$

11) Data la matrice $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ determinare λ in modo che il suo rango sia 3

$$(\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 2)$$

12) Ricordando le proprietà dei determinanti dire perché la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 2a-1 & 0 & -a \end{bmatrix}$ ha determinante nullo $\forall\ a \in R$.

13) Ricordando le proprietà dei determinanti dire perché la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 1 & a-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2a-1 & 2 & 2a-3 \end{bmatrix}$ ha determinante nullo $\forall\ a \in R$.

14) Dire se la seguente matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile e , in caso affermativo , scrivere la matrice inversa .

15) Dire se la seguente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ è invertibile e , in caso affermativo , scrivere la matrice inversa .

16) Dire se la seguente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile e , in caso affermativo , scrivere la matrice inversa .

17) Dire se la seguente matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile e , in caso affermativo , scrivere la matrice inversa .

18) Dire per quali valori di $a \in R$ la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile e scrivere la matrice inversa . **R.** $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-2a}{2a(1-a)} & \frac{a}{2a(1-a)} & \frac{1}{2a(1-a)} \\ \frac{1}{2a(1-a)} & \frac{a}{2a(1-a)} & \frac{1-2a}{2a(1-a)} \\ \frac{-a}{2a(1-a)} & \frac{-a^2}{2a(1-a)} & \frac{a}{2a(1-a)} \end{bmatrix}$

19) Dire per quali valori di $a \in R$ la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2a-3 \\ 0 & a & -3a \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ è invertibile e scrivere la matrice inversa .

20) Dire per quali valori di $a \in R$ la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ è invertibile e scrivere la matrice inversa . (La matrice non è invertibile per $a = \pm 1$)

21) Dire per quali valori di $a \in R$ la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & a & -1 \\ a-1 & -1 & 2a-3 \end{bmatrix}$ è invertibile e scrivere la matrice inversa . (La matrice non è invertibile per $a = 0$ ed $a = 1$)

22) Dire per quali valori di $a \in R$ la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2a-3 \\ 0 & a & -3a \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ è invertibile e scrivere la matrice inversa . (La matrice non è invertibile per)

23) Dire per quali valori di $a \in R$ la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 1 & a-2 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{bmatrix}$ è invertibile e scrivere la matrice inversa .

24) Dire per quali valori di $a \in R$ la matrice $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 2a & 2-3a & 3 \end{bmatrix}$ è invertibile e scrivere la matrice inversa

25) Calcolare la matrice inversa della matrice A e verificare che $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

26) Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del corrispondente parametro

a) $A = \begin{bmatrix} 3k & 2k+1 & k+1 \\ 2k-1 & 2k-1 & k-2 \\ 4k-1 & 3k & 2k \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3\lambda-1 & 2\lambda & 3\lambda+1 \\ 2\lambda & 2\lambda & 3\lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 2(\lambda+1) \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & -\lambda-1 \\ 3\lambda & 1-2\lambda & 1-3\lambda \\ \lambda+2 & -1 & -2\lambda \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 2m+1 & -m & m+1 \\ m-2 & m-1 & m-2 \\ 2m-1 & m-1 & 2m-1 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 5\lambda+1 & 2\lambda & 4\lambda+1 \\ 4\lambda-1 & \lambda-1 & 4\lambda-1 \\ 2(3\lambda+1) & 2\lambda & 5\lambda+2 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 2(\lambda+1) & 3 & \lambda \\ 4\lambda-1 & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ 5\lambda-4 & \lambda+1 & 3\lambda-1 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 3m & 3m-7 & m-5 \\ 2m-1 & 4m-1 & 2m \\ 4m & 5m-7 & 2m-5 \end{bmatrix}$ h) $H = \begin{bmatrix} k-1 & 1 & 1-k \\ 1 & -1 & 1-2k \\ 2k-5 & 2 & 2k \end{bmatrix}$

i) $I = \begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{bmatrix}$ ℓ) $L = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 \end{bmatrix}$

m) $M = \begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-3 \\ \lambda & 3\lambda-2 & 3\lambda+1 \end{bmatrix}$ n) $N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ k & 1 & 2 & 3 \\ k+1 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}$