Unità Didattica N° 35 I sistemi lineari

1) **Sistema lineare di n equazioni in n incognite: teorema di Cramer**

2) **Sistema di m equazioni in n incognite**

3) **Teorema di Rouchè-Capelli**

4) **Sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite**

5) **Risoluzione di un sistema lineare col metodo delle eliminazioni successive o metodo di Gauss**

6) **Determinante di una matrice quadrata col metodo di Gauss**

7) **Risoluzione di un sistema lineare di n equazioni in n incognite col metodo della matrice inversa**

Sistema lineare di n equazioni in n incognite: teorema di Cramer

Dicesi **equazione lineare** nelle n incognite $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_i, \cdots\cdots x_n$ un'equazione del tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots\cdots + a_ix_i + \cdots\cdots + a_nx_n = b \qquad [1]$$

dove $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ sono numeri dati detti **coefficienti delle incognite**; il numero **b** è il **termine noto**. Quando è $b = 0$ l'equazione dicesi **omogenea**.

Dicesi **sistema lineare** di n equazioni in n incognite un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

$$\textbf{[3]} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{matrice dei coefficienti}$$

$A^{(i)}$ = matrice dell'incognita x_i = matrice ottenuta dalla matrice A mediante la sostituzione della colonna dei coefficienti dell'incognita x_i con la colonna dei termini noti

Forma matriciale di un sistema lineare di n equazioni in n incognite

Il sistema [2] , scritto in forma matriciale, assume la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ovvero, in forma compatta, $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ dove:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Teorema di Cramer

C.N.S. perché il sistema lineare [2] ammetta una sola soluzione è che risulti $\det A \neq 0$. In questo caso il valore di ciascuna incognita è uguale al rapporto tra il determinante della matrice dell'incognita ed il determinante della matrice dei coefficienti.

$$x_1 = \frac{\det A^{(1)}}{\det A} \quad x_2 = \frac{\det A^{(2)}}{\det A} \quad x_3 = \frac{\det A^{(3)}}{\det A}, \ldots\ldots, \quad x_n = \frac{\det A^{(n)}}{\det A} \qquad \textbf{[4]}$$

Se risulta $\det A = 0$ allora si applica il teorema di Rouchè-Capelli. Un sistema di n equazioni lineari in n incognite dicesi sistema di Cramer se ha diverso da zero il determinante della matrice dei coefficienti. Esso ammette sempre una sola soluzione che si ricava applicando il teorema di Cramer.

Applichiamo il teorema di Cramer per risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 53 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 31 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix} \quad Det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$Det\ A^{(1)} = \begin{vmatrix} 53 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ 31 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 30 \quad Det\ A^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 53 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 31 & -2 \end{vmatrix} = 50 \quad Det\ A^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 53 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 31 \end{vmatrix} = 80$$

$$x_1 = \frac{\det A^{(1)}}{\det A} = \frac{30}{10} = 3 \quad x_2 = \frac{\det A^{(2)}}{\det A} = \frac{50}{10} = 5 \quad x_3 = \frac{\det A^{(3)}}{\det A} = \frac{80}{10} = 8$$

La terna ordinata di numeri $(3,5,8)$ è l'unica soluzione del sistema proposto.

OSSERVAZIONE

Se risulta $\det A = 0$, per vedere se il sistema dato è compatibile (cioè ammette soluzioni) o incompatibile (cioè non ammette soluzioni) bisogna applicare il teorema di Rouchè-Capelli.

Risoluzione di un sistema di Cramer col metodo della matrice inversa

Sia $A \times X = B$ un sistema di Cramer scritto in forma matriciale. Tale sistema ammette una sola soluzione X (che è un vettore che può essere scritto sotto forma di vettore riga e vettore colonna) se

$\det A \neq 0$. In tal caso la matrice A ammette la matrice inversa A^{-1} . Moltiplico a sinistra ambo i membri dell'uguaglianza $A \times X = B$ per A^{-1} ottenendo : $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$

Poiché sappiamo che $A^{-1} \cdot A = I_n$, $I_n \cdot X = X$ possiamo scrivere : $\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$

Perveniamo alla seguente conclusione: << **Il vettore X dello spazio vettoriale R^n, soluzione del sistema di Cramer, è uguale al prodotto righe per colonne tra la matrice inversa A^{-1} della matrice A dei coefficienti per il vettore colonna dei termini noti del sistema**>>

N.B. Il metodo della matrice inversa per la risoluzione di un sistema lineare si può applicare soltanto se dobbiamo risolvere un sistema di n equazione in n incognite. Tale metodo presenta un calcolo piuttosto laborioso . E' da preferire il procedimento illustrato in precedenza.

Come esempio risolviamo il seguente sistema di Cramer:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 17 \end{cases}$$ che , scritto in **forma matriciale**, diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 17 \end{bmatrix}$$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ è la **matrice dei coefficienti**

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ è il vettore soluzione, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 17 \end{bmatrix}$ è il vettore dei termini noti

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti (matrice incompleta del sistema)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-12-2) - 2(8-6) - (2+9) = -29 \neq 0$$

Calcoliamo i **complementi algebrici** di tutti gli elementi della matrice A .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -14 \qquad A_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$$

$A^G = \begin{bmatrix} -14 & -2 & 11 \\ -9 & 7 & 5 \\ 1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ = matrice aggiunta della matrice A

$$\left(A^G\right)^T = \begin{bmatrix} -14 & -9 & 1 \\ -2 & 7 & -4 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \text{matrice trasposta della matrice aggiunta}$$

$$A^{-1} = \frac{\left(A^G\right)^T}{\det A} = \begin{bmatrix} \frac{14}{24} & \frac{9}{24} & -\frac{1}{24} \\ \frac{2}{24} & -\frac{7}{24} & \frac{4}{24} \\ -\frac{11}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{7}{24} \end{bmatrix} = \textbf{matrice inversa della matrice A}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{14}{24} & \frac{9}{24} & -\frac{1}{24} \\ \frac{2}{24} & -\frac{7}{24} & \frac{4}{24} \\ -\frac{11}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{7}{24} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Infatti, i rispettivi prodotti riga per colonna danno i seguenti risultati:

$$\frac{14}{29}\cdot 2+\frac{9}{29}\cdot 2-\frac{1}{29}\cdot 17=1 \qquad \frac{2}{29}\cdot 2-\frac{7}{29}\cdot 2+\frac{4}{29}\cdot 17=2 \qquad -\frac{11}{29}\cdot 2-\frac{5}{29}\cdot 2+\frac{7}{29}\cdot 17=3$$

La soluzione del sistema proposto coincide con la terna ordinata di numeri: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

La maggiore difficoltà nella risoluzione del sistema consiste nella ricerca della matrice inversa A^{-1}. Tale difficoltà aumenta se la matrice dei coefficienti è di ordine superiore al terzo.

Sistema lineare di m equazioni in n incognite

Consideriamo un sistema di **m** equazioni lineari nelle **n** incognite $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_i, \cdots\cdots x_n$

[5] $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Le due matrici **[6]** $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$ **[7]**

la prima formata coi coefficienti delle incognite e la seconda coi coefficienti delle incognite e dei termini noti, si dicono rispettivamente matrice incompleta (o **matrice dei coefficienti**) e matrice completa del sistema [4]. (*) Il sistema [4] può avere nessuna soluzione (**sistema incompatibile** o **sistema impossibile**), una soluzione (sistema determinato), infinite soluzioni (sistema compatibile ma indeterminato).

Teorema di Rouché-Capelli

C.N.S. perché il sistema [5] ammetta soluzioni è che la matrice incompleta **A** e la matrice completa **B** abbiano la stessa caratteristica **r** ($r \le m$, $r \le n$): $r(A) = r(B)$ (°)

Regola pratica per risolvere un sistema di m equazioni lineari in n incognite applicando il teorema di Rouché-Capelli

Per risolvere un sistema lineare di m equazioni in n incognite si procede come segue:

1) Si calcola il **rango** $r(A)$ della matrice incompleta A e quello $r(B)$ della matrice completa B

2) Se risulta $r(A) \neq r(B)$ il sistema dato non ammette soluzioni

3) Se risulta $r(A) = r(B) = r$ il sistema dato ammette soluzioni. Si calcola un qualsiasi minore di ordine **r** diverso da zero; supponiamo che sia $M_r \neq 0$

4) Si considera il sistema formato dalle r equazioni i cui coefficienti figurano nel minore $M_r \neq 0$ Se risulta $m > r$ (le equazioni sono in numero maggiore del rango) allora $m - r$ equazioni sono superflue (sono cioè combinazioni lineari delle r equazioni i cui coefficienti figurano nel minore $M_r \neq 0$) e quindi possono essere eliminate.

5) Si risolve il sistema ottenuto applicando la **regola di Cramer** ricordando di considerare come parametri (da trasportare a secondo membro) quelle incognite i cui coefficienti non figurano in $M_r \neq 0$.

- **n < m** Il numero delle equazioni supera il numero delle incognite. Si possono presentare i seguenti casi:

(*) La matrice incompleta **A** è una matrice $m \times n$, mentre la matrice completa **B** è una matrice $m \times (n+1)$

(°) La caratteristica della matrice completa **B** non può mai risultare minore della caratteristica della matrice incompleta **A**. Si potranno, pertanto, presentare due soli casi: a) la caratteristica di B è maggiore della caratteristica di A; il sistema non ammette soluzioni b) r(A) = r(B) il sistema ammette soluzioni

1) $\mathbf{r(A) \neq r(B)}$ Il sistema non ammette soluzioni. Nel sistema c'è qualche equazione incompatibile con le altre.

2) $\mathbf{r(A) = r(B)}$ Il sistema ammette soluzioni. Nel sistema esistono delle equazioni superflue in quanto combinazioni lineari delle altre equazioni indipendenti. Eliminate le equazioni superflue secondo il criterio illustrato precedentemente si possono presentare due casi:

- $r = n < m$ Il sistema dato è **equivalente** ad un sistema di n equazioni lineari in n incognite

  Il sistema, che ammette **una sola soluzione**, si risolve con la regola di Cramer

- $r < n < m$ Il sistema dato è equivalente ad un sistema di r equazioni in n incognite; $n - r$ incognite diventano parametri . Il sistema che ammette infinite (∞^{n-r}) soluzioni si risolve con la regola di Cramer

- **n > m** Il numero delle incognite supera il numero delle equazioni. Si possono presentare i seguenti casi:

1) $r(A) \neq r(B)$ Il sistema non ammette soluzioni. Nel sistema c'è qualche equazione incompatibile con le altre.

2) $r(A) = r(B)$ Si eliminano le eventuali equazioni superflue e si ottiene un sistema di r equazioni in n incognite; $n - r$ incognite diventano parametri. Si ottiene un sistema di r equazioni in n incognite. Il sistema che ammette infinite (∞^{n-r}) soluzioni si risolve con la regola di Cramer

Risolvere il seguente sistema formato da 4 equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 7 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) \leq 3$, $r(B) \leq 4$, $\det B = 0$, La matrice **B** non può avere rango 4 .

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \qquad r(A) = r(B) = 3$$

Il sistema dato è compatibile e risulta equivalente a: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

Si tratta di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite avente il determinante dei coefficienti uguale ad $M_3 \neq 0$. Esso si risolve applicando la regola di Cramer.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$ matrice dei coefficienti delle incognite

$$\det C = M_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \quad \det C^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$\det C^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -6 \qquad \det C^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$x_1 = \frac{\det C^{(1)}}{\det A} = \frac{8}{5} \quad , \quad x_2 = \frac{\det C^{(2)}}{\det A} = \frac{6}{5} \quad , \quad x_3 = \frac{\det C^{(3)}}{\det A} = -\frac{2}{5}$$

Risolvere e discutere il seguente sistema lineare $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ kx + 2y + z = k \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ k & 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} , \qquad r(A) \leq 3 \quad , \qquad r(B) \leq 3$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 2(2k - 1) + k(k - 2) =$$

$$= 3 - 4k + 2k^2 - 2k = k^2 - 6k + 5 = (k - 1)(k - 5)$$

$$\det A = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 5 = 0 \Rightarrow k = 1 \ , \ k = 5$$

1) $\det A \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$ e $k \neq 5 \quad r(A) = r(B) = 3$

Il sistema proposto ammette una sola soluzione che si ottiene applicando il teorema di Cramer

$$\det A^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \det A = (k - 1)(k - 5) \qquad x = \frac{\det A^{(1)}}{\det A} = \frac{(k-1)(k-5)}{(k-1)(k-5)} = 1$$

$$\det A^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{due colonne sono uguali} \qquad y = \frac{\det A^{(2)}}{\det A} = \frac{0}{(k-1)(k-5)} = 0$$

$$\det A^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ k & 2 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{due colonne sono uguali} \qquad z = \frac{\det A^{(3)}}{\det A} = \frac{0}{(k-1)(k-5)} = 0$$

2) k = 1 $\det A = 0$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Tutti i minori del terzo ordine estraibili dalla matrice B sono nulli in quanto i vettori riga linearmente indipendenti sono due . I primi due vettori riga sono uguali . $r(A) \le 2$, $r(B) \le 2$

Se come minore del secondo ordine diverso da zero scegliamo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

allora il sistema dato è equivalente al seguente sistema: $\begin{cases} x + 2y = 1 - z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases}$

in quanto risulta $r(B) = r(B) = 2$.

La matrice dei coefficienti di questo sistema è : $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\det M^{(1)} = \begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 1-2z & 1 \end{vmatrix} = 1 - z - 2 + 4z = 3z - 1$ $x = 1 - 3z$

$\det M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 1-2z \end{vmatrix} = 1 - 2z - 1 + z = -z$ $y = z$

Il sistema proposto è **compatibile** ed **indeterminato** in quanto ammette ∞^1 date dal vettore $[1-3z; z]$.

3) k = 5 $\det A = 0$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Tutti i minori del terzo ordine estraibili da questa matrice sono nulli , quindi risulta :

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $r(A) \le 2$, $r(B) \le 2$

Se come minore del secondo ordine diverso da zero scegliamo : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ allora il sistema dato è **equivalente** al seguente sistema : $\begin{cases} x + 2y = 1 - 5z \\ x + y = 1 - 2z \end{cases}$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è : $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det N = -1$

$$\det N^{(1)} = \begin{vmatrix} 1-5z & 2 \\ 1-2z & 1 \end{vmatrix} = 1 - 5z - 2 + 4z = -(1+z) \qquad \mathbf{x = 1 + z}$$

$$\det N^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1-5z \\ 1 & 1-2z \end{vmatrix} = 1 - 2z - 1 + 5z = -z \qquad \mathbf{y = -3z}$$

Il sistema proposto è **compatibile** ed **indeterminato** in quanto ammette ∞^1 date dal vettore $[1+z;z]$.

Sistema di m equazioni lineari omogenee in n incognite

E' un sistema riconducibile alla seguente forma:

$$\textbf{[8]} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{m} \geq n$$

Il sistema [8] ammette sempre la soluzione **nulla** o **banale** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

Se il sistema [8] ammette la soluzione **propria** o **autosoluzione** $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \cdots, \overline{x_n}$ ammette anche tutte le altre infinite soluzioni che si ottengono da questa moltiplicandola per il fattore non nullo ρ, cioè: $\rho \cdot \overline{x_1}, \rho \cdot \overline{x_2}, \rho \cdot \overline{x_3}, \cdots, \rho \cdot \overline{x_n}$.

Teorema: **C.N.S.** perché il sistema [8] ammetta **soluzioni proprie** è che la **caratteristica r** della matrice dei coefficienti sia minore del numero **n** delle incognite. Se risulta $r \geq n$ il sistema [8] non ammette soluzioni proprie. Se risulta $r < n$ il sistema [8] si risolve applicando prima il teorema di **Rouchè-Capelli** e poi quello di Cramer.

Per la **ricerca delle soluzioni proprie** si procede come segue:

1) Si calcola la **caratteristica r** della matrice

2) Se risulta $r \geq n$ il sistema è **impossibile** , cioè non ammette soluzioni proprie

3) Se risulta $r < n$ si considera un nuovo sistema formato da **r** equazioni scelte in modo che i loro coefficienti appartengano al minore **M** di ordine **r** considerato

4) Assumono il ruolo di **parametri** $n - r$ incognite i cui coefficienti non figurano nel minore **M** di ordine **r**

5) I suddetti parametri vengono trasferiti al secondo membro

6) Il sistema ottenuto è, così, formato da r equazioni in r incognite e si risolve applicando la regola di Cramer.

Un caso particolarmente importante è il seguente: <<Il sistema [8] ha n equazioni, $n + 1$ incognite e la matrice **A** dei coefficienti ha rango $r = n$>>

Detta A_i la **matrice quadrata** ottenuta dalla matrice **A** (che ha $n+1$ colonne) sopprimendo la colonna di posto i, le soluzioni del sistema [8] sono:

$$x_1 = k \cdot A_1 \ , \ x_2 = -k \cdot A_2 \ , \ x_3 = k \cdot A_3 , \ldots\ldots\ldots , \ x_n = (-1)^{n+1} k \cdot A_n$$

dove **k** è un qualsiasi coefficiente di proporzionalità diverso da zero, A_1.è la matrice ottenuta dalla matrice A eliminando la prima colonna, A_2 è la matrice ottenuta dalla matrice A eliminando la seconda colonna, e così di seguito. Se non vogliamo applicare questa regola possiamo risolvere il sistema [8] applicando prima il teorema di Rouchè-Capelli e poi ricorrendo al teorema di Cramer.

Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \det A = 0 \quad \Rightarrow r(A) < 4$$

Il sistema dato ammette soluzioni proprie .

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad r(A) = 3 < n = 4$$

. Poiché il rango della matrice dei coefficienti è minore del numero delle incognite, il sistema omogeneo proposto ammette soluzioni proprie .

Il sistema dato è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -3x_1 \\ 4x_2 - x_3 + x_4 = -3x_1 \\ -x_2 - x_3 + x_4 = -x_1 \end{cases} \qquad N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{matrice dei coefficienti } \det N = 10$$

$$\det N^{(1)} = \begin{vmatrix} -3x_1 & 1 & -3 \\ -3x_1 & -1 & 1 \\ -x_1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4x_1 \qquad \mathbf{x_2 = \frac{\det N^{(1)}}{\det N} = \frac{-4x_1}{10} = \frac{-2}{5} x_1}$$

$$\det N^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & -3x_1 & -3 \\ 4 & -3x_1 & 1 \\ -1 & -x_1 & 1 \end{vmatrix} = 30x_1 \qquad \mathbf{x_3 = \frac{\det N^{(2)}}{\det N} = \frac{30x_1}{10} = 3x_1}$$

$$\det N^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3x_1 \\ 4 & -1 & -3x_1 \\ -1 & -1 & -x_1 \end{vmatrix} = 16x_1 \qquad \mathbf{x_4 = \frac{\det N^{(3)}}{\det N} = \frac{16x_1}{10} = \frac{8}{5}x_1}$$

Risoluzione di un sistema lineare col metodo di Gauss

Operazioni elementari sulle righe di una matrice

1) **scambio di due righe**

2) **moltiplicazione o divisione di una riga per uno scalare non nullo**

3) **somma algebrica di una riga con un'altra riga moltiplicata per uno scalare**

E' quindi possibile:

1) **moltiplicare tutti gli elementi di una riga per una stessa costante diversa da zero**: questo equivale a moltiplicare entrambi i membri della corrispondente equazione per una stessa costante non nulla

2) **sostituire, ad una data riga, quella che si ottiene sommandole un'altra riga, dopo averne eventualmente moltiplicati tutti gli elementi per una stessa costante diversa da zero**; ciò equivale a sostituire una equazione del sistema con una combinazione lineare di equazioni del sistema stessa

3) **cambiare l'ordine delle righe della matrice completa**; ciò equivale a mutare l'ordine delle equazioni del dato sistema

4) **cambiare l'ordine delle colonne della matrice, eccetto l'ultima (colonna dei termini noti)**, perché ciò equivale a cambiare l'ordine delle incognite del sistema.

Vogliamo risolvere il seguente sistema lineare $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$ utilizzando il metodo di **Gauss**. Si scrive la matrice completa del sistema nella seguente forma:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow R_1 - R_2 \\ \leftarrow 2R_1 - R_3 \end{array}$$

$R_2 \leftarrow R_1 - R_2$ significa sostituire la seconda riga con la differenza tra la prima e la seconda riga

Applicando le opportune **operazioni elementari sulle righe** della matrice completa del sistema proposto trasformiamo questa matrice in una **matrice triangolare alta**. E questo ci consente di risolvere facilmente il sistema.

Applicando le predette operazioni elementari alla matrice completa del sistema proposto otteniamo

la matrice equivalente: $\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 = R_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Il sistema lineare proposto è equivalente al seguente sistema lineare: $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3y = 1 \end{cases}$

$y = \frac{1}{3} \qquad x + \frac{2}{3} + z = 1 \qquad x = \frac{1}{3} - z \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{3} - z \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ Il sistema proposto ammette ∞^1

soluzioni che possiamo esprimere mediante il vettore $\left(\frac{1}{3} - z, \frac{1}{3}, z\right)$

Risolvere il seguente sistema lineare: $\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 1} \\ \mathbf{2x + y - z = 0} \\ \mathbf{3x + 2y = 0} \end{cases}$

$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2R_1 - R_2 \\ \leftarrow 3R_1 - R_3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow R_2 - R_3 \end{array}$

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ y + 3z = 3 \end{cases}$ Questo sistema è impossibile in quanto le equazioni $y + 3z = 2$ ed $y + 3z = 3$ sono fra loro incompatibili non potendo l'espressione $y + 3z$ essere contemporaneamente uguale a 2 ed a 3. Proseguendo con l'eliminazione delle altre incognite

abbiamo : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ che è la matrice completa del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$

che è impossibile in quanto contiene la seguente uguaglianza non vera $0 = -1$.

Risolvere il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & (-1) & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right]$$

Il sistema dato è equivalente a: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ \quad - x_2 - x_3 = -3 \\ \qquad\quad - 9x_3 = -18 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

Osservazioni

1) Nell'esecuzione del procedimento di eliminazione conviene utilizzare la **matrice completa** , trascurando di trascrivere le incognite .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right] \quad \text{ed anche , più semplicemente} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{array}$$

2) Se , ad un certo punto , perveniamo ad una uguaglianza non vera come la seguente $3 = 12$, vuole dire che il sistema è impossibile in quanto c'è almeno una equazione del sistema incompatibile con le altre . La comparsa di una tale riga sta ad indicare che l'intero sistema è impossibile .

3) Se invece troviamo una identità , l'equazione corrispondente può essere eliminata in quanto è combinazione lineare delle altre

4) Se nell'ultima equazione troviamo due o più incognite il sistema è indeterminato ed alcune incognite diventano parametri

5) Il metodo di Gauss può essere applicato in modo da trasformare la matrice completa del sistema dato in una matrice triangolare alta

Tutte le operazioni che, eseguite su un sistema lineare lo trasformano in un altro ad esso equivalente, corrispondono ad operazioni eseguibili direttamente sulla matrice completa del sistema. E' quindi possibile:

1) **moltiplicare tutti gli elementi di una riga per una stessa costante diversa da zero**: questo equivale a moltiplicare entrambi i membri della corrispondente equazione per una stessa costante non nulla

2) **sostituire, ad una data riga, quella che si ottiene sommandole un'altra riga, dopo averne eventualmente moltiplicati tutti gli elementi per una stessa costante diversa da zero**; ciò equivale a sostituire una equazione del sistema con una combinazione lineare di equazioni del sistema stessa

3) **cambiare l'ordine delle righe della matrice completa**; ciò equivale a mutare l'ordine delle equazioni del dato sistema

4) **cambiare l'ordine delle colonne della matrice, eccetto l'ultima (colonna dei termini noti)**, perché ciò equivale a cambiare l'ordine delle incognite del sistema.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & (-1) & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right]$$

Il sistema dato è equivalente a: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ \quad - x_2 - x_3 = -3 \\ \qquad\quad - 9x_3 = -18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

Determinante di una matrice quadrata col metodo di Gauss

Il determinante di una matrice quadrata triangolare o diagonale è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.

Gauss si serviva di questo teorema per calcolare il determinante di una matrice quadrata.

calcolare il determinante della matrice quadrata $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ dopo averla trasformata in una matrice triangolare alta, bassa, diagonale.

Trasformiamo la matrice **A** in una matrice triangolare alta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det A = (1)(-3)(-1) = 3$$

Trasformiamo la matrice **A** in una matrice triangolare bassa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det A = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)(8) = 3$$

Trasformiamo la matrice **A** in una matrice diagonale

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\5&7&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-3&-6\\0&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \det A=3$$

Metodo di Gauss-Jordan o metodo del pivot

Questo metodo è una variabile del **metodo di Gauss**. Mediante questo metodo **diagonalizziamo la** matrice incompleta (cioè la matrice dei coefficienti) del sistema dato riconducendolo alla forma:

$$\begin{cases}x_1 & & & & = & b_1\\ & x_2 & & & = & b_2\\ & & x_3 & & = & b_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ & & & x_n & = & b_n\end{cases}$$

Costruita la **matrice completa** del sistema, si sceglie in essa un elemento non nullo a_{ij} e non appartenente alla colonna dei termini noti. Tale elemento si chiama **PIVOT** (che significa **cardine** o **elemento risolutore**). Di conseguenza la riga di posto **i** prende il nome di **riga del pivot** , mentre la colonna di posto **j** prende il nome di **colonna del pivot** . Di solito è preferibile scegliere , anche attraverso un cambiamento nell'ordine delle equazioni o delle incognite, come **pivot** l'elemento a_{ij} [(1)] . Esponiamo tale metodo facendo riferimento al seguente sistema:

$$\begin{cases}x+2y+3z+4t=5\\2x+y+2z+3t=1\\3x+2y+z+2t=1\\4x+3y+2z+t=-5\end{cases}$$

Scrivo la matrice completa di questo sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}(1)&2&3&4&5\\2&1&2&3&1\\3&2&1&2&1\\4&3&2&1&-5\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1\to Riga\ del\ pivot\\R_2\to R_2-2R_1\\R_3\to R_3-3R_1\\R_4\to R_4-4R_1\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&5\\0&(-3)&-4&-5&-9\\0&-4&-8&-10&-14\\0&-5&-10&-15&-25\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1\to\\R_2\to Riga\ del\ pivot\\R_3\to a_{22}=pivot\\R_4\to\end{array}$$

Divido tutti gli elementi della seconda riga per il **pivot**, cioè per il numero **-3** ottenendo[(2)]:

---

(1) Col metodo del **pivot**, alla fine del procedimento si ottiene direttamente la soluzione del sistema (se esiste) senza dovere ricorrere ad alcuna sostituzione

(2) Può essere più conveniente ridurre il **pivot** ad **1** dopo il procedimento di eliminazione, e non prima

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & (1) & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -25 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_2 \to Riga\ \ del\ \ pivot \\ R_3 \to R_3 + 4R_2 \\ R_4 \to R_4 + 5R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-8}{3}\right) & \frac{-10}{3} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-10}{3} & \frac{-20}{3} & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \quad Riga\ \ del\ \ pivot \\ R_4 \end{array} \qquad a_{33} = -\frac{8}{3} = pivot$$

Divido tutti gli elementi della terza riga per il **pivot** , cioè per il numero $-\frac{8}{3}$, ottenendo :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 3 \\ 0 & 0 & (1) & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-10}{3} & \frac{-20}{3} & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - \frac{1}{3}R_3 \\ R_2 \to R_2 - \frac{4}{3}R_3 \\ R_3 \to Riga\ \ del\ \ pivot \\ R_4 \to R_4 + \frac{10}{3}R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-5}{2}\right) & \frac{-15}{2} \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \to \quad Riga\ \ del\ \ pivot \end{array} \qquad a_{44} = -\frac{5}{2} = pivot$$

Divido tutti gli elementi della quarta riga per il **pivot** , cioè per il numero $-\frac{5}{2}$, ottenendo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & (1) & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - \frac{1}{4}R_4 \\ R_2 \to R_2 \\ R_3 \to R_3 - \frac{5}{4}R_4 \\ R_4 \to \quad Riga\ \ del\ \ pivot \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Le soluzioni del sistema dato sono: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -3 \\ t = 3 \end{cases}$

- Si chiamano **operazioni elementari sulle righe** di una matrice le tre seguenti operazioni:

1) Scambio di due righe

2) Moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo

3) Somma di una riga con un'altra moltiplicata per uno scalare

- Due matrice **A** e **B** sono **equivalenti per righe** se B è ottenuta da A con una successione di operazioni elementari sulle righe .

- Due matrice **A** e **B** sono **equivalenti per colonne** se B è ottenuta da A con una successione di operazioni elementari sulle colonne.