

Unità Didattica N°38

Calcolo approssimato delle radici dell'equazione $f(x) = 0$

- 01)** La risoluzione approssimata delle equazioni $f(x) = 0$
- 02)** Metodo grafico per la separazione delle radici reali dell'equazione $f(x) = 0$
- 03)** Teorema di esistenza della radici dell'equazione $f(x) = 0$
- 04)** Metodo delle tangenti o di Newton-Fourier
- 05)** Metodo delle corde o delle secanti o delle parti proporzionali
- 06)** Metodo di bisezione o metodo dicotomico

La risoluzione approssimata delle equazioni $f(x) = 0$

In questa unità didattica analizzeremo i principali metodi per la risoluzione approssimata delle equazioni algebriche o trascendenti $f(x) = 0$ con $f(x)$ funzione reale, algebrica o trascendente, della variabile reale x .

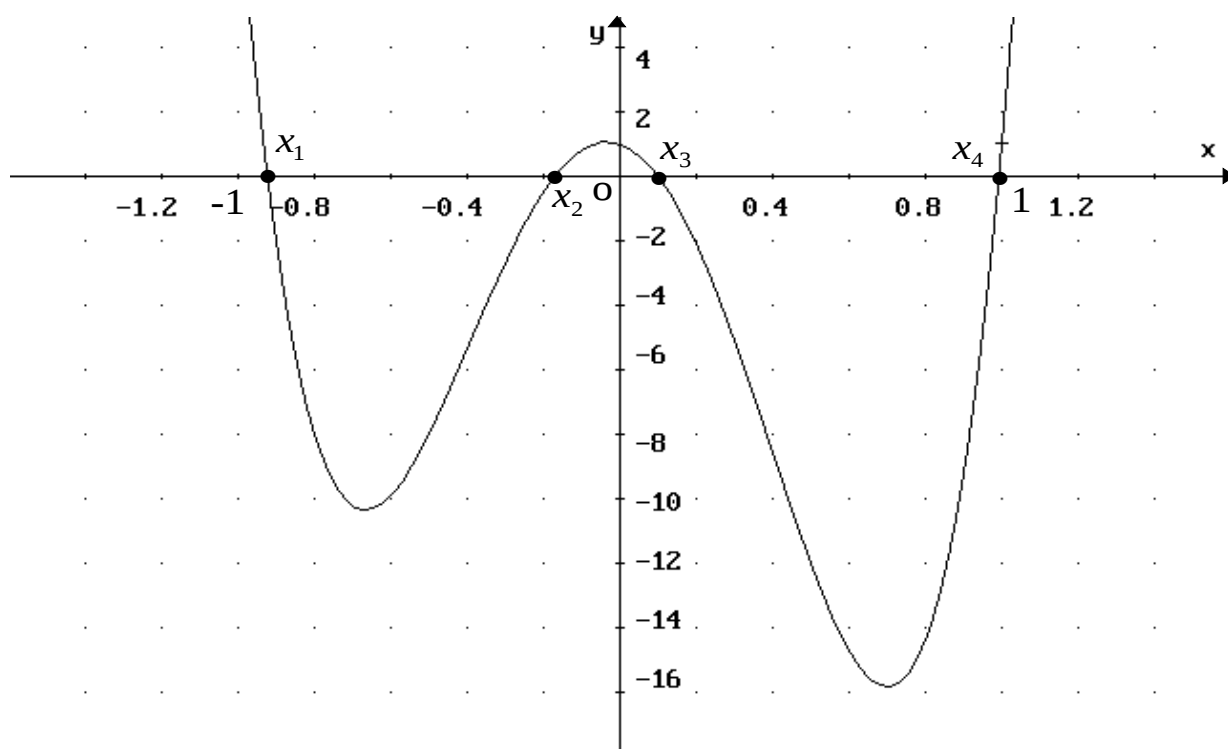
La risoluzione approssimata dell'equazione $f(x) = 0$ passa attraverso le seguenti fasi:

01) Limitazione delle radici: occorre determinare un intervallo di numeri reali $[\ell, L]$ contenente tutte le radici reali dell'equazione proposta

02) Enumerazione delle radici: bisogna stabilire quante sono le radici reali dell'equazione $f(x) = 0$ appartenenti all'intervallo $[\ell, L]$

03) Separazione delle radici: occorre determinare degli intervalli $[a, b]$ ognuno dei quali contiene una sola radice dell'equazione proposta

04) Approssimazione delle radici: approssimare una radice reale dell'equazione $f(x) = 0$ significa trovare un numero, con un predeterminato numero di cifre decimali, che approssima la radice con la precisione richiesta.

Metodo grafico per la separazione delle radici reali dell'equazione $f(x) = 0$ 

Un primo metodo grafico consiste nel tracciare la curva di equazione $y = f(x)$ ed annotare gli intervalli che contengono una sola intersezione della curva con l'asse delle ascisse.

Con questo procedimento otteniamo la **limitazione delle radici reali** e la **separazione delle radici reali**.

$$f(x) = 64x^4 - 60x^2 - 4x + 1 = 0, \quad f'(x) = 4(64x^3 - 30x - 1), \quad f''(x) = 24(32x^2 - 5)$$

Abbiamo così **limitato e separato le radici reali** dell'equazione $f(x) = 64x^4 - 60x^2 - 4x + 1 = 0$

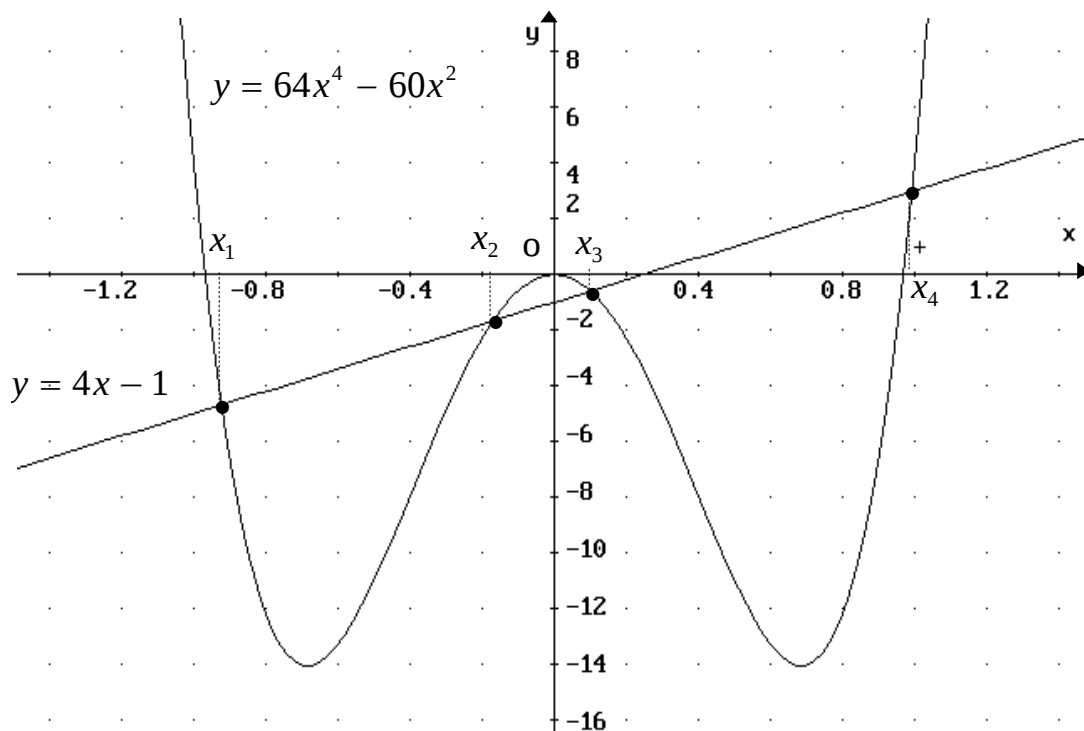
Un secondo metodo grafico è quello di scrivere la funzione $f(x)$ come differenza di due funzioni $g(x)$ ed $h(x)$ sicché l'equazione proposta assume la forma $g(x) - h(x) = 0$ e quindi $g(x) = h(x)$. Poi si costruiscono le curve σ e γ aventi rispettivamente equazioni $y = g(x)$ e $y = h(x)$.

$$y = h(x). \quad \begin{cases} y = g(x) & \sigma \\ y = h(x) & \gamma \end{cases} \quad \text{Le soluzioni dell'equazione } f(x) = 0 \text{ coincidono con le}$$

ascisse dei punti comuni alle curve σ e γ .

$$f(x) = 64x^4 - 60x^2 - 4x + 1 = 0 \quad y = 64x^4 - 60x^2 = 4x - 1 \quad \begin{cases} y = 64x^4 - 60x^2 \\ y = 4x - 1 \end{cases}$$

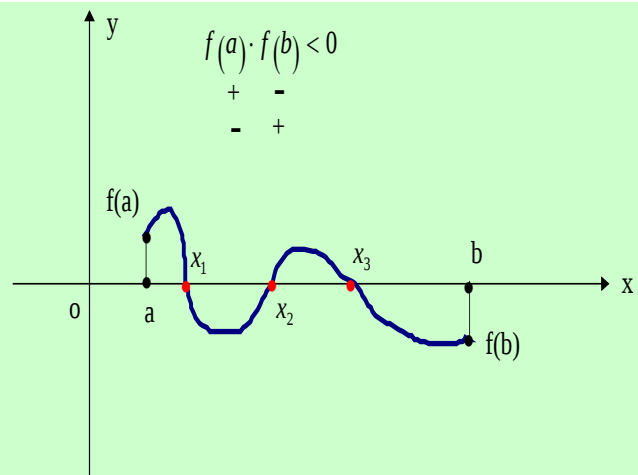
Dalle intersezioni delle due curve deduciamo che l'equazione proposta ammette 4 radici comprese tra i numeri -2 e $+2$ (tra i numeri -1 e $+1$ se notiamo che $f(-1) \cdot f(1) < 0$).



Nel caso della nostra equazione è preferibile utilizzare il secondo metodo grafico, in quanto col primo non siamo in grado di trovare i **punti stazionari** della funzione.

Teorema di esistenza della radici dell'equazione $f(x) = 0$

Se $f(x)$ è continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ e se agli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto ($f(a) \cdot f(b) < 0$), allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una radice interna all'intervallo $[a, b]$.

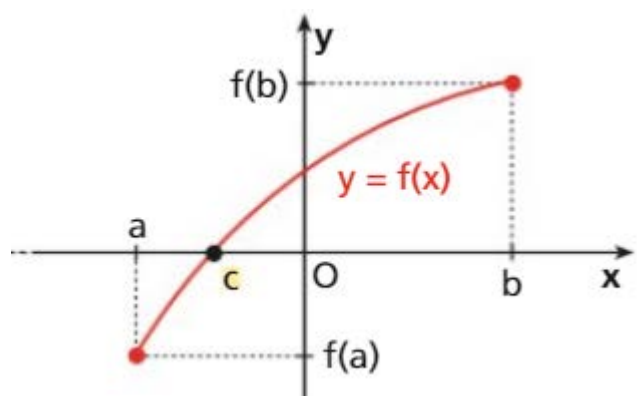
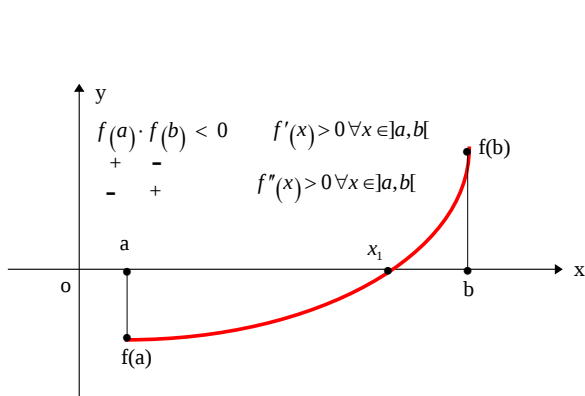


Questo teorema ci assicura l'esistenza di almeno una radice in un dato intervallo, ma non ne garantisce l'unicità. Se poi la funzione $f(x)$ è strettamente monotona in $[a, b]$ allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola radice interna all'intervallo $[a, b]$.

Resta così giustificato il seguente:

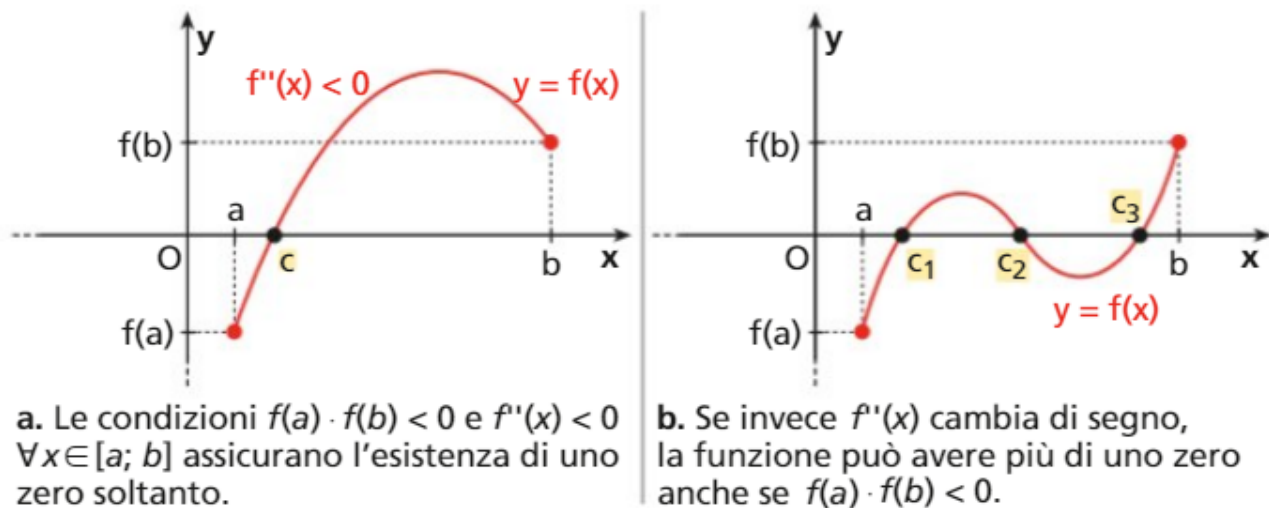
Primo teorema dell'unicità della soluzione dell'equazione $f(x) = 0$

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ e derivabile nei suoi punti interni, se risulta $f(a) \cdot f(b) < 0$ e se $f'(x) \neq 0$ nell'intervallo aperto $]a, b[$, allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione interna ad $[a, b]$.



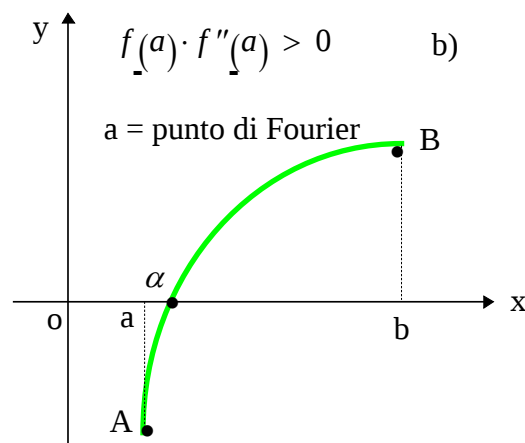
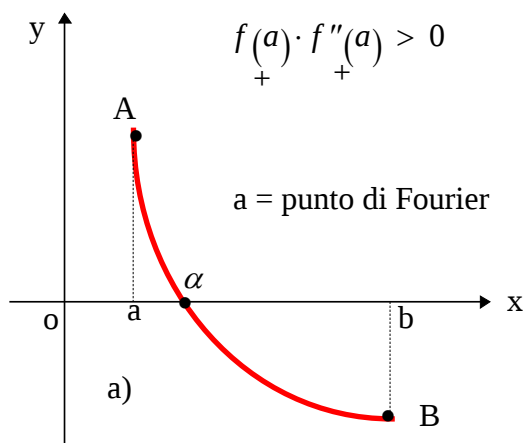
Secondo teorema dell'unicità della soluzione dell'equazione $f(x) = 0$

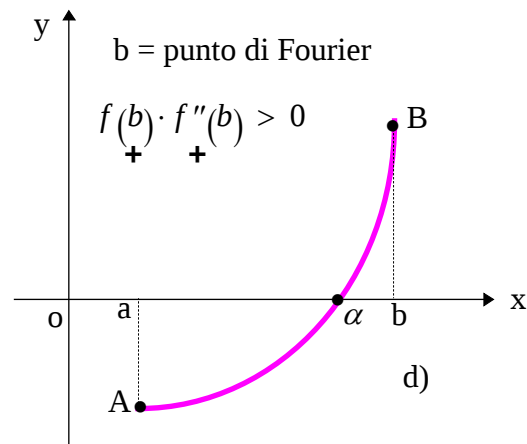
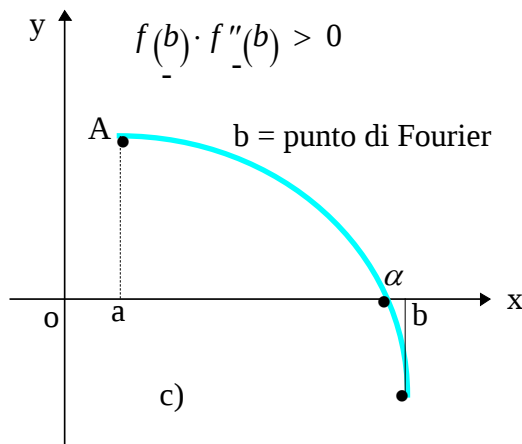
Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ e derivabile due volte nei punti interni di tale intervallo, se risulta $f(a) \cdot f(b) < 0$ e se $f''(x)$ è sempre positiva o sempre negativa nell'intervallo $]a, b[$, allora l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione interna ad $[a, b]$.



Metodo delle tangenti o di Newton-Fourier

Supponiamo di avere separato nell'intervallo $[a, b]$ la **radice reale semplice** α dell'equazione $f(x) = 0$ e supponiamo che essa sia unica. Questo significa che le funzioni $f'(x)$ ed $f''(x)$ hanno, nell'intervallo $[a, b]$, segno costante, cioè la funzione $f(x)$ è **strettamente monotona e priva di punti di flesso**. Si possono presentare i seguenti quattro casi:





Considerati i punti $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$ diremo **estremo di Fourier** quello dei due estremi dell'intervallo $[a, b]$ nel quale $f(x)$ ed $f''(x)$ hanno lo **stesso segno**, cioè:

$$f(a) \cdot f''(a) > 0 \Rightarrow a \text{ è estremo di Fourier} \quad f(b) \cdot f''(b) > 0 \Rightarrow b \text{ è estremo di Fourier}$$

Supponiamo, per fissare le idee, che a sia l'**estremo di Fourier**. $f(b) \cdot f''(b) > 0 \Rightarrow b$ è estremo di Fourier. Supponiamo, per fissare le idee, che a sia l'**estremo di Fourier**. Scriviamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $A[a, f(a)]$

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Tale tangente incontra l'asse x nel punto di ascissa $x = x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Risulta $a < x_1 < \alpha < b$ con $f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$ cioè con x_1 **estremo di Fourier** relativo all'intervallo $[x_1, b]$. Applicando lo stesso procedimento all'intervallo $[x_1, b]$ otteniamo:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{con} \quad a < x_1 < x_2 < \alpha < b$$

Applicando lo stesso procedimento all'intervallo $[x_2, b]$ otteniamo:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad \text{con} \quad a < x_1 < x_2 < x_3 < \alpha < b$$

Applicando lo stesso procedimento all'intervallo $[x_3, b]$ otteniamo:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \quad \text{con} \quad a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \alpha < b$$

Iterando il procedimento n volte otteniamo:

$$\begin{cases} a = x_0 \\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$ ed

$$x_{n-1} = a$$

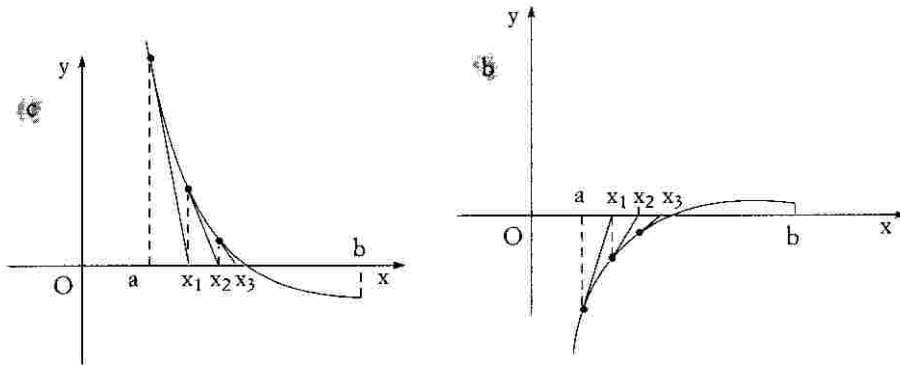
oppure:

$$\begin{cases} a = x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ed

$$x_n = a$$

Il metodo delle tangenti nel caso in cui a è l' **estremo di Fourier** fornisce dei valori di x_n approssimati per difetto della radice α .



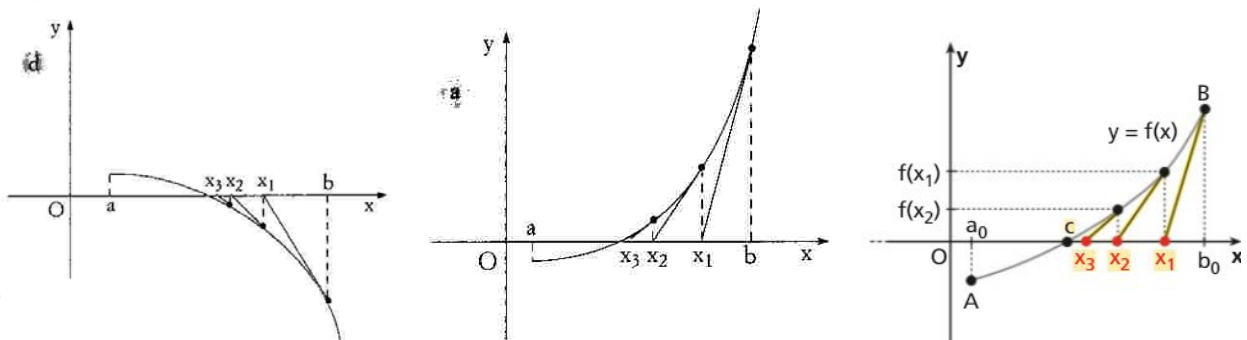
Se l' **estremo di Fourier** è b [$f(b) \cdot f''(b) > 0$] perveniamo alla formula:

$$\begin{cases} b = x_0 \\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{cases} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{ed} \quad x_{n-1} = b$$

o, alla sua equivalente, $\begin{cases} b = x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ed $x_n = b$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \quad x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

ed i valori x_n sono valori approssimati per eccesso della radice $x = \alpha$.



La condizione di arresto può essere data sotto la forma $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon = 10^{-m}$.

Riepilogo delle formule trovate:

$\begin{cases} x_0 = a = \text{estremo di Fourier} \\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$	$f(a) \cdot f''(a) > 0$
$\begin{cases} x_0 = b = \text{estremo di Fourier} \\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$	$f(b) \cdot f''(b) > 0$

$$f(x) = 64x^2 - 60x^2 - 4x + 1 \quad f'(x) = 4(64x^3 - 30x - 1)$$

$$f''(x) = 24(32x^2 - 5) \quad \alpha \in]0,5;1[\quad f(1) \cdot f''(1) > 0 \quad x_0 = b = 1$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0,992424 \quad , \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,9922789$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0,99227884 \quad |x_3 - x_2| = 0,00000005 \quad \text{Questo significa che le prime 7}$$

cifre decimali sono sicuramente esatte.

Metodo delle corde o delle secanti o delle parti proporzionali

Supponiamo di avere separato nell'intervallo $[a,b]$ la **radice reale semplice** α dell'equazione

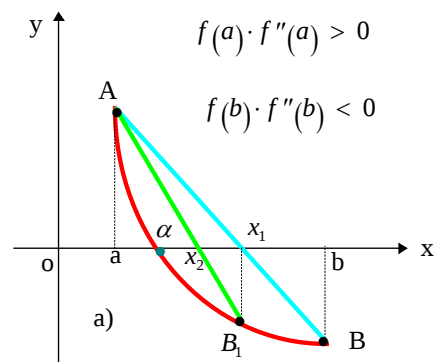
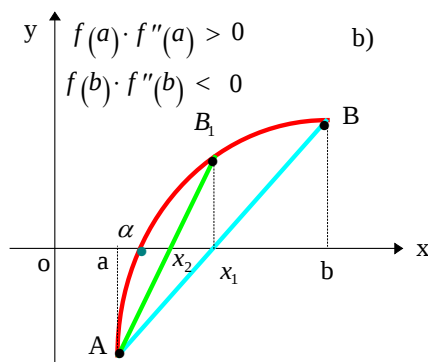
$f(x) = 0$ e supponiamo che essa sia unica. Questo significa che :

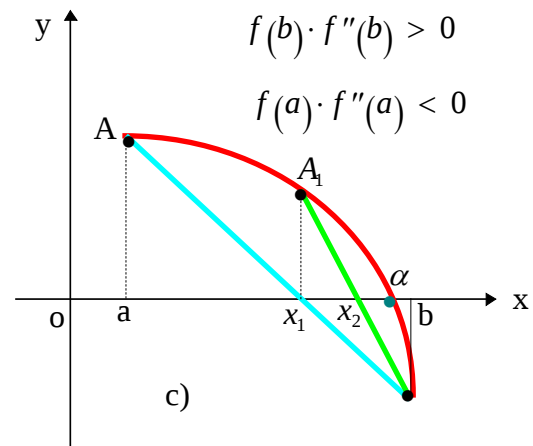
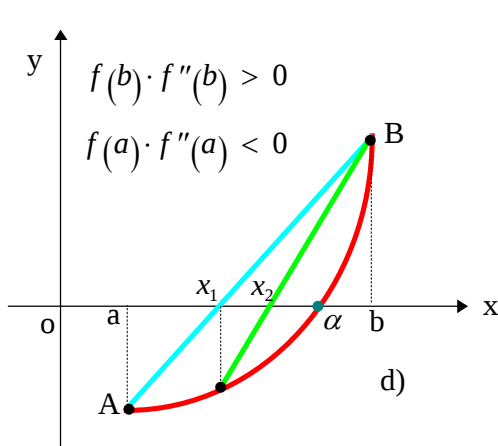
01) $f(a) \cdot f(b) < 0$

02) le funzioni $f'(x)$ ed $f''(x)$ hanno , nell'intervallo $[a,b]$, segno costante , cioè la funzione

$f(x)$ è **strettamente monotona e priva di punti di flesso**.

Sotto queste condizioni, per il grafico γ della funzione $f(x)$ relativamente all'intervallo $[a,b]$, può presentarsi soltanto uno dei quattro casi indicati nelle seguenti figure .





Col **metodo delle corde** sostituiamo il grafico della funzione $f(x)$ con la retta passante per i punti $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$. Il grafico di $f(x)$ incontra l'asse delle ascisse nel punto $x = \alpha$ che è l'unica radice dell'equazione $f(x) = 0$ interna all'intervallo $[a, b]$.

La retta **AB** incontra l'asse x nel punto $x_1 \in]a, b[$ che rappresenta un valore approssimato¹ di α .

La retta **AB** ha equazione

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \quad \text{oppure:} \quad y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - b) \quad y = 0 \Rightarrow$$

$$\text{[1]} \quad x = x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a) \quad \text{oppure} \quad x = x_1 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(b) \quad \text{[2]}$$

Utilizzeremo la formula [1] nei casi indicati nelle figure c) e d), utilizzeremo la formula [2] nei casi indicati nelle figure a) e b).

Applicando n volte il metodo delle corde o delle secanti otteniamo il seguente schema iterativo :

01) $f(b) \cdot f''(b) > 0 \Rightarrow x_0 = a \Rightarrow$ **approssimazione per difetto**

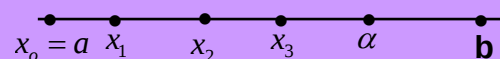
$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} \cdot f(x_0) = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a)$$



$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$$



$$x_3 = x_2 - \frac{b - x_2}{f(b) - f(x_2)} \cdot f(x_2)$$



$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [1]$$

¹ Per eccesso o per difetto

02) $f(a) \cdot f''(a) > 0 \Rightarrow x_0 = b \Rightarrow$ **approssimazione per eccesso**

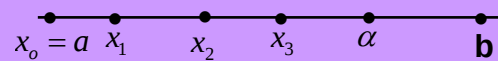
$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} \cdot f(x_0) = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a)$$



$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} \cdot f(x_1)$$



$$x_3 = x_2 - \frac{b - x_2}{f(b) - f(x_2)} \cdot f(x_2)$$



$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad [1]$$

Individuata la formula da applicare occorre porre termine alle iterazioni fissando la precisione ε con la quale si vuole approssimare la radice α . Le iterazioni hanno termine quando risulta $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ avendo scelto x_n come valore approssimato (per eccesso o per difetto) della radice α . L'errore che si commette è minore di ε . Se risulta $\varepsilon = 10^{-n}$ allora le prime n cifre decimali di x_n sono esatte.

L'equazione $f(x) = x^3 + 3x + 5 = 0$ **ammette una sola radice** $\alpha \in]-2; -1[$. **Calcolare un valore approssimato di α con la precisione $\varepsilon = 10^{-2}$ (cioè con due cifre decimali esatte) utilizzando il metodo delle corde.**

$$f(x) = x^3 + 3x + 5, \quad f'(x) = 3x^2 + 3, \quad f''(x) = 6x, \quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in]-2; -1[$$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in]-2; -1[\quad f(-2) = -9, \quad f(-1) = 1, \quad f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

$$f(a) \cdot f''(a) = f(-2) \cdot f''(-2) > 0, \quad f(b) \cdot f''(b) = f(-1) \cdot f''(-1) < 0$$

Per calcolare un valore approssimato di α utilizzeremo la formula **[2]**.

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a) = -1 - \frac{-1 + 2}{f(-2) - f(-1)} \cdot f(-1) = -1 - \frac{-1 + 2}{-9 - 1} \cdot 1 = -1,1$$

$$f(x_1) = f(-1,1) = 0,369$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - a}{f(x_1) - f(a)} \cdot f(x_1) = -1,1 - \frac{-1,1 + 2}{0,369 - (-9)} \cdot 0,369 = -1,1 - \frac{0,9}{9,369} \cdot 0,369 = -1,1354$$

$$|x_2 - x_1| = 1,1354 - 1,1 = 0,0354 > 10^{-2} = 0,01 \quad f(x_2) = f(-1,1354) = 0,1301$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - a}{f(x_2) - f(a)} \cdot f(x_2) = -1,1354 - \frac{-1,1354 + 2}{0,1301 - (-9)} \cdot 0,1301 = -1,1354 - 0,023 = -1,1477$$

$$|x_3 - x_2| = 1,1477 - 1,1354 = 0,0116 > 10^{-2} = 0,01 \quad f(x_3) = f(-1,1477) = 0,0451$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - a}{f(x_3) - f(a)} \cdot f(x_3) = -1,1477 - \frac{-1,1477 + 2}{0,0451 + 9} \cdot 0,0451 = -1,1477 - 0,004249 = -1,1519$$

$$|x_4 - x_3| = 1,1477 - 1,1434 = 0,0043 < 10^{-2} = 0,01$$

$\alpha = -1,15$ è un valore approssimato della radice α con due cifre decimali esatte.

$\alpha = -1,154171495$ è un valore approssimato di α con 9 cifre decimali esatte.

Metodo di bisezione o metodo dicotomico

Supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$ ammetta la soluzione $x = \alpha \in]a, b[$ e che essa sia unica.

Questo significa che risulta $f(a) \cdot f(b) < 0$ e la funzione $f'(x)$ ha segno costante in $]a, b[$.

- Per generalizzare il processo di iterazione poniamo:

$$a_1 = a, \quad b_1 = b \quad \text{e calcoliamo} \quad x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Calcoliamo $f(a_1) = f(a)$, $f(x_1)$, $f(b_1) = f(b)$. Se risulta $f(x_1) = 0$ la soluzione

dell'equazione $f(x) = 0$ è $\alpha = x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$, in caso contrario essa appartiene

all'intervallo $]a, x_1[$ o all'intervallo $]x_1, b[$.

$$f(a) \cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow \alpha \in]a, x_1[\quad f(x_1) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \alpha \in]x_1, b[$$

Se, ad esempio, risulta $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ allora poniamo $a_2 = x_1$, $b_2 = b$ e ci calcoliamo $x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ e

si continua l'iterazione scegliendo dei due sottointervalli $]a_2, x_2[$ o $]x_2, b_2[$ quello nei cui estremi la funzione assume valori di segno opposto. Si procede con l'iterazione sino ad ottenere l'approssimazione desiderata. Otteniamo una successione di sottointervalli ognuno contenuto nel precedente e di ampiezza uguale alla metà.

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}, \quad b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2}, \quad b_4 - a_4 = \frac{b_3 - a_3}{2}, \quad \dots, \quad b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$$

L'ultimo sottointervallo determinato ha ampiezza: $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$

- Se scegliamo $x = \alpha = x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ come valore approssimato della radice

dell'equazione commettiamo un errore E_n dato dalla seguente relazione:

$$E_n \leq \frac{b - a}{2^n}$$

Il procedimento di iterazione può essere realizzato attraverso il seguente schema:

iterazioni	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
1	$a_1 = a$	$b_1 = b$	$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$	$f(a_1) > 0$	$f(x_1) < 0$	$f(b_1) < 0$
2	$a_2 = a_1$	$b_2 = x_1$	$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$	$f(a_2) > 0$	$f(x_2) < 0$	$f(b_2) < 0$
3	$a_3 = a_2$	$b_3 = x_2$	$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$	$f(a_3) > 0$	$f(x_3) > 0$	$f(b_3) > 0$

$$64x^4 - 60x^2 - 4x + 1 = 0, \quad f(0,5) \cdot f(1) < 0, \quad f(\alpha) = 0, \quad \alpha \in]0,5, 1[$$

iterazione	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
1	$a_1 = a = 0,5$	$b_1 = b = 1$	$x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$	$f(0,5) < 0$	$f(0,75) < 0$	$f(1) > 0$
2	$a_2 = 0,75$	$b_2 = 1$	$x_2 = 0,875$	$f(a_2) < 0$	$f(x_2) < 0$	$f(b_2) > 0$
3	$a_3 = 0,875$	$b_3 = 1$	$x_3 = 0,9375$	$f(a_3) < 0$	$f(x_3) < 0$	$f(b_3) > 0$
4	$a_4 = 0,9375$	$b_4 = 1$	$x_4 = 0,96875$	$f(a_4) < 0$	$f(x_4) < 0$	$f(b_4) > 0$
5	$a_5 = 0,96875$	$b_5 = 1$	$x_5 = 0,984375$	$f(a_5) < 0$	$f(x_5) < 0$	$f(b_5) > 0$
6	$a_6 = 0,984375$	$b_6 = 1$	$x_6 = 0,992187$	$f(a_6) < 0$	$f(x_6) < 0$	$f(b_6) > 0$
7	$a_7 = 0,992187$	$b_7 = 1$	$x_7 = 0,996093$	$f(a_7) < 0$	$f(x_7) > 0$	$f(b_7) > 0$
8	$a_8 = 0,992187$	$b_8 = 0,996093$	$x_8 = 0,994139$	$f(a_8) < 0$	$f(x_8) > 0$	$f(b_8) < 0$
9	$a_9 = 0,992187$	$b_9 = 0,999439$	$x_9 = 0,995115$	$f(a_9) < 0$	$f(x_9) > 0$	$f(b_9) < 0$
10	$a_{10} = 0,992187$	$b_{10} = 0,995115$	$x_{10} = 0,993651$	$f(a_{10}) < 0$	$f(x_{10}) > 0$	$f(b_{10}) < 0$
11	$a_{11} = 0,992187$	$b_{11} = 0,993651$	$x_{11} = 0,992919$	$f(a_{11}) < 0$	$f(x_{11}) > 0$	$f(b_{11}) < 0$

$$E_{10} \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0,5}{2^{11}} = \frac{0,5}{2048} = 0,000244$$

$x_{11} = 0,992919$ solo le prime tre cifre decimali sono sicuramente esatte