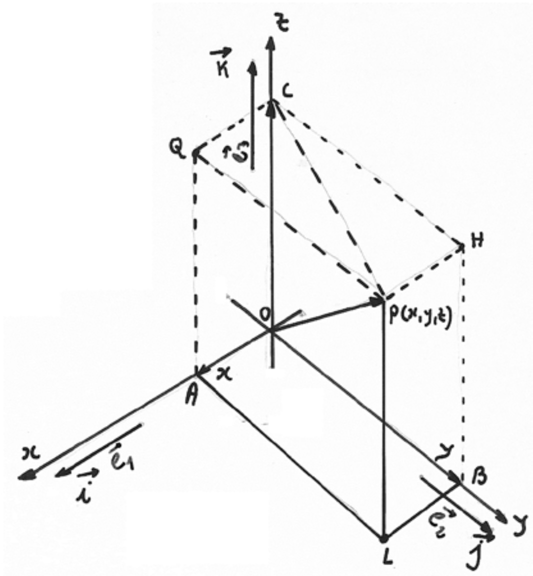
Riferimento cartesiano dello spazio $\mathbb{R}^3$

Consideriamo nello spazio $\mathbb{R}^3$ tre rette orientate x, y, z tra loro ortogonali, uscenti da uno stesso punto O ed aventi, rispettivamente, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ come versori che possono essere indicati anche con i seguenti simboli $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Il punto O e le tre rette orientate x, y, z rappresentano un riferimento cartesiano ortogonale per i punti dello spazio $\mathbb{R}^3$.

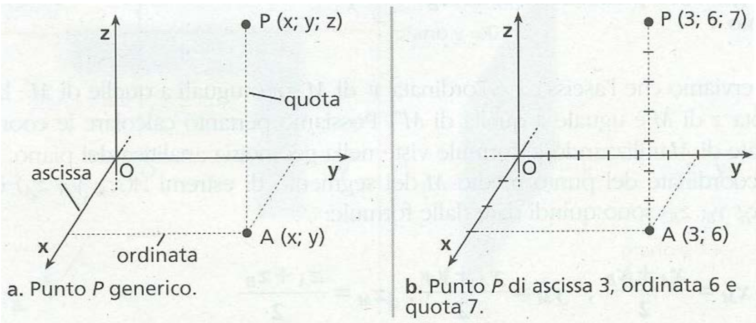


Le rette x, y, z sono gli assi coordinati cartesiani e si chiamano rispettivamente asse delle ascisse o asse delle x, asse delle ordinate o asse delle y, asse delle quote o asse delle z. I piani xy yz, xz sono i piani coordinati, mentre il punto O è l'origine del riferimento cartesiano che, simbolicamente può essere indicato con uno dei due seguenti simboli: $R\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ $Ozyz$, cioè riferimento cartesiano di origine O e base canonica $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio individua anche tre piani xy, yz, xz aventi tutti come origine il punto O e stessa unità di misura $\mathbf{u}$ (sistema monometrico) o diverse unità di misura (sistema dimetrico o sistema trimetrico). Il sistema di riferimento introdotto è detto sistema cartesiano ortonormale che i tre assi cartesiani sono a due a due ortogonali ed i tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ hanno la stessa unità di misura. Scelto un punto $P \in \mathbb{R}^3$ si diranno coordinate cartesiane del punto P le componenti del vettore $P - O$ rispetto alla base ortonormale $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cioè la terna di numeri reali relativi (x, y, z) che verifica la seguente relazione vettoriale:

$$P = O + x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Le coordinate cartesiane (x, y, z) del punto P si distinguono tra loro con la seguente terminologia: prima, seconda, terza coordinata. La terza coordinata è spesso chiamata quota del punto P. La prima e la seconda sono dette ascissa ed ordinata.

Geometricamente le coordinate cartesiane del punto P si individuano nel seguente modo. Si conducono per il punto i piani paralleli ai singoli piani coordinati yz, xz, xy. Tali piani incontreranno gli asso coordinati x, y, z rispettivamente nei punti A, B, C. Dato P, risultano individuati questi tre punti e quindi, in valore e segno, i tre numeri reali relativi $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$. Viceversa, dati ad arbitrio tre numeri reali relativi x, y, z risultano individuati sui tre assi i punti A, B, C e quindi nello spazio il punto P intersezione unica dei tre piani passanti per A, B, C e paralleli rispettivamente ai piani coordinati yz, xz, xy. Esiste pertanto una **corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio $\mathbb{R}^3$ e le terne ordinate di numeri reali**.



a. Punto *P* generico.
b. Punto *P* di ascissa 3, ordinata 6 e quota 7.

Coordinate di punti particolari

I punti dell'asse x hanno coordinate $(x, 0, 0)$ I punti dell'asse y hanno coordinate $(0, y, 0)$

I punti dell'asse z hanno coordinate $(0, 0, 0)z$

I punti del piano xy hanno coordinate $(x, y, 0)$, cioè hanno quota nulla

I punti del piano xz hanno coordinate $(x, 0, z)$, cioè hanno ordinata nulla

I punti del piano yz hanno coordinate $(0, y, z)$, cioè hanno ascissa nulla

Simmetria rispetto al piano xz

Due punti A e B simmetrici rispetto al piano xz hanno uguale ascissa, ordinata opposta, quota uguale. Per tali punti si ha: $A(x, y, z) = B(x, -y, z)$

Simmetria rispetto al piano yz

Due punti A e B simmetrici rispetto al piano yz hanno ascissa opposta, ordinata uguale, quota uguale. Per tali punti si ha: $A(x, y, z) = B(-x, y, z)$

Simmetria rispetto al piano xy

Due punti A e B simmetrici rispetto al piano xy hanno uguale ascissa, ordinata uguale, quota opposta. Per tali punti si ha: $A(x,y,z)=B(x,y,-z)$

Simmetria rispetto all'asse x

Due punti A e B simmetrici rispetto all'asse x hanno uguale ascissa, ordinata opposta, quota opposta. Per tali punti si ha: $A(x,y,z)=B(x,-y,-z)$

Simmetria rispetto all'asse y

Due punti A e B simmetrici rispetto all'asse y hanno ascissa opposta, ordinata uguale, quota opposta. Per tali punti si ha: $A(x,y,z)=B(-x,y,-z)$

Simmetria rispetto all'asse z

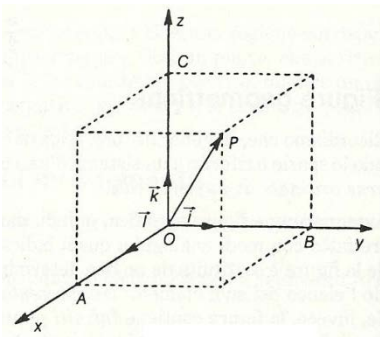
Due punti A e B simmetrici rispetto all'asse z hanno ascissa opposta, ordinata opposta, quota uguale. Per tali punti si ha: $A(x,y,z)=B(-x,-y,z)$

Simmetria rispetto all'origine degli assi cartesiani

Due punti A e B simmetrici rispetto all'origine O degli assi cartesiani hanno coordinate omonime opposte. Cioè per tali punti si ha: $A(x,y,z)=B(-x,-y,-z)$

Vettore posizione

$\vec{r}=P-O$ è il vettore posizione, cioè il vettore avente come origine l'origine del sistema di assi cartesiani e come estremo (cioè come punto terminale) il punto $P(x,y,z)$. Per tale punto vale la seguente relazione vettoriale: $P-O=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}=(x,y,z)=x\cdot\vec{e}_1+y\cdot\vec{e}_2+z\cdot\vec{e}_3$



Coordinate cartesiane dei vettori nello spazio

Definizione: Si chiama vettore l'insieme di tutti i segmenti orientati fra loro equipollenti, cioè aventi la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso. Un vettore $\vec{v}$ scritto in componenti cartesiane ha la seguente forma:

$$\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y+\vec{v}_z=v_x\cdot\vec{i}+v_y\cdot\vec{j}+v_z\cdot\vec{k}=\left(v_x,v_y,v_z\right)=\ell\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$$

I numeri $\left(v_x,v_y,v_z\right)=\left(\ell,m,n\right)$ sono le coordinate cartesiane del vettore $\vec{v}$ rispetto ai tre versori fondamentali $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

Risulta: $v=\left|\vec{v}\right|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}$ = modulo del vettore $\vec{v}$.

Le coordinate cartesiane del vettore $P_2-P_1=\overrightarrow{P_1P_2}=\left(x_2-x_1\right)\cdot\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\cdot\vec{j}+\left(z_2-z_1\right)\cdot\vec{k}$ sono:

$$\left(x_2-x_1\right),\left(y_2-y_1\right),\left(z_2-z_1\right)\quad \text{se } P_1\left(x_1,y_1,z_1\right),\ P_2\left(x_2,y_2,z_2\right),\ P_3\left(x_3,y_3,z_3\right)$$

$\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}$ Per calcolare l'angolo α individuato dai vettori $\vec{v}=\ell\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ e $\vec{u}=\ell_1\cdot\vec{i}+m_1\cdot\vec{j}+n_1\cdot\vec{k}$ basta applicare la seguente formula:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\times\vec{u}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}=\frac{\ell\,\ell_1+m\,m_1+n\,n_1}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{\ell_1^2+m_1^2+n_1^2}}$$

Equazioni della retta

Consideriamo la retta r individuata da due punti distinti $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ e $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$. Un punto $P\left(x,y,z\right)$ appartiene alla retta r se il vettore $P-A$ è parallelo al vettore $B-A$. Sotto questa ipotesi ogni punto $P\in r$ esiste un solo numero k per il quale risulta: $P-A=k\cdot\left(B-A\right)$ $[1]$ che esprime, in forma sintetica, l'equazione vettoriale della retta.

Poiché risulta: $P-A=(x-x_1)\cdot\vec{i}+(y-y_1)\cdot\vec{j}+(z-z_1)\cdot\vec{k}$

$$B-A=(x_2-x_1)\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)\cdot\vec{j}+(z_2-z_1)\cdot\vec{k}$$

possiamo scrivere; $\begin{cases} x-x_1=k(x_2-x_1) \\ y-y_1=k(y_2-y_1) \\ z-z_1=k(z_2-z_1) \end{cases}$ e quindi $[2]$ $\begin{cases} x=x_1+k(x_2-x_1) \\ y=y_1+k(y_2-y_1) \\ z=z_1+k(z_2-z_1) \end{cases}$ che esprimono le **equazioni parametriche della retta**.

Se, come vettore parallelo alla retta r, scegliamo il vettore $\vec{v}=\ell\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ e non il vettore $B-A$ otteniamo: $P-A=k\cdot\vec{v}$ $[3]$ che esprime ancora l' **equazione vettoriale** della retta r in forma sintetica.

Le equazioni parametriche della retta r, in questo caso assumono la forma: $\begin{cases} x=x_1+k\,\ell \\ y=y_1+k\,m \\ z=z_1+k\,n \end{cases}$ $[4]$

Dalle $[4]$ ricaviamo: $\dfrac{x-x_1}{\ell}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ $[5]$

$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{\ell}=\dfrac{y-y_1}{m} \\ \dfrac{x-x_1}{\ell}=\dfrac{z-z_1}{n} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{\ell}=\dfrac{z-z_1}{n} \\ \dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n} \end{cases}$ sono le **equazioni ridotte** di una retta concepita come intersezione di due particolari piani.

Indicati con $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i **coseni direttori** della retta r, cioè i coseni degli angoli (convessi) che la direzione positiva della retta r forma con le direzioni positive degli assi cartesiani, ricordato che valgono le seguenti uguaglianze: $\cos\alpha=\dfrac{x_2-x_1}{\rho}$, $\cos\beta=\dfrac{y_2-y_1}{\rho}$, $\cos\gamma=\dfrac{z_2-z_1}{\rho}$ $[6]$

con: $\rho=d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Possiamo scrivere la $[5]$ nella seguente maniera: $\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta}=\dfrac{z-z_1}{\cos\gamma}$ $[7]$

La $[5]$ o la $[7]$ sono dette equazioni normali della retta o equazioni della retta in forma normale.

Poiché possiamo prendere $\ell = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$, $n = z_2 - z_1$ abbiamo:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad [8]$$

che rappresenta l'equazione della retta r passante per due punti.

Equazioni della retta nella forma di rapporti uguali

Abbiamo dimostrato che le equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ è:

$$\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + k(z_2 - z_1) \end{cases} \Rightarrow \quad k = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad k = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad k = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} =$$

equazioni della retta nella forma di rapporti uguali o equazione della retta passante per due punti.

Tali equazioni sono equivalenti ad ognuno dei tre seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \\ \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \\ \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases}$$

Equazioni della retta come intersezione di due piani

Nello spazio cartesiano una retta può essere individuata come intersezione di due piani non paralleli. Questo significa che le equazioni di una retta sono espresse dal seguente sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1} \qquad [\sigma]$$

Tutti i punti $P(x, y, z) \in r$ soddisfano con le loro coordinate entrambe le equazioni del sistema $[\sigma]$.

Viceversa ogni punto $P(x, y, z)$ che verifica entrambe le equazioni del sistema $[\sigma]$ appartiene ad r

Condizione di allineamento di **3** punti

C.N.S. perché **3** punti distinti $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e $C(x_3, y_3, z_3)$ risultino allineati è che la matrice **2×3** $D=\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix}$ abbia rango **1**.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-x_1=k(x_2-x_1) \\ y-y_1=k(y_2-y_1) \\ z-z_1=k(z_2-z_1) \end{cases}$$ equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$.

Impongo la condizione di sufficienza: $Hp:\{r(D)=1 \quad Th:\{C(x_3, y_3, z_3)\in r$

$r(D)=1 \Rightarrow$ i due vettori riga della matrice D sono fra loro proporzionali $\Rightarrow$

$$x_3-x_1=k\cdot(x_2-x_1) \;;\; y_3-y_1=k\cdot(y_2-y_1) \;;\; z_3-z_1=k\cdot(z_2-z_1)$$

$$\begin{cases} x_3-x_1=k\cdot(x_2-x_1) \\ y_3-y_1=k\cdot(y_2-y_1) \\ z_3-z_1=k\cdot(z_2-z_1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(x_3, y_3, z_3)\in r$$

Impongo la condizione necessaria: $Hp:\{C(x_3, y_3, z_3)\in r \quad Th:\{r(D)=1$

$$C(x_3, y_3, z_3)\in r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3-x_1=k\cdot(x_2-x_1) \\ y_3-y_1=k\cdot(y_2-y_1) \\ z_3-z_1=k\cdot(z_2-z_1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r(D)=1$$ poiché i due vettori riga sono linearmente dipendenti in quanto fra loro proporzionali.

Rette complanari, rette sghembe, punto comune a due rette

$$r_1:\begin{cases} x=x_1+k\,\ell_1 \\ y=y_1+k\,m_1 \\ z=z_1+k\,n_1 \end{cases} \qquad r_2:\begin{cases} x=x_1+k\,\ell_2 \\ y=y_1+k\,m_2 \\ z=z_1+k\,n_2 \end{cases} \qquad P_o(x_o, y_o, z_0)=r_1\cap r_2$$

Se $P_o(x_o, y_o, z_0)$ esiste allora le sue coordinate (x_o, y_o, z_0) si troveranno in corrispondenza di due valori distinti del parametro k, uno per r_1 e l'altro per r_2.

$$\begin{cases} x_o = x_1 + k_1 \ell_1 \\ y_o = y_1 + k_1 m_1 \\ z_o = z_1 + k_1 n_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_o = x_2 + k_2 \ell_1 \\ y_o = y_2 + k_2 m_1 \\ z_o = z_2 + k_2 n_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_o = x_o \\ y_o = y_o \\ z_o = z_o \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + k_1 \ell_1 = x_2 + k_2 \ell_1 \\ y_1 + k_1 m_1 = y_2 + k_2 m_1 \\ z_1 + k_1 n_1 = z_2 + k_2 n_1 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare formato da tre equazioni nelle due incognite k_1 e k_2.

Il sistema formato da due di queste tre equazioni ci fornisce i valori $\overline{k}_1, \overline{k}_2$. Se $\overline{k}_1, \overline{k}_2$ verificano la terza equazione le rette r_1 ed r_2 sono incidenti (rette complanari), altrimenti le rette sono sghembe.

Ciascuna delle due rette è assegnata come intersezione di due piani.

$$r_1 : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

Se esiste un piano α che contenga entrambe le rette, allora esse sono complanari, se tale piano non esiste le due rette sono sghembe.

Si può dimostrare che $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$ è **C.N.S.** perché le rette r_1 ed r_2 siano rette complanari. Se il determinante è diverso da zero allora r_1 ed r_2 sono sghembe.

Determinare, se esiste, il punto d'intersezione tra le due seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} 7x + 4y = 0 \\ 7x + 2z = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} 4x + z + 2 = 0 \\ x \ + y - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Le rette r_1 ed r_2 sono complanari ed il loro punto d'intersezione è dato dalla soluzione del sistema lineare formato da tre delle quattro equazioni scelte ad arbitrio.

$$\begin{cases} 7x + 4y = 0 \\ 7x + 2z = 0 \\ 4x + z = -2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Det } A = 4 \qquad \det A^{(1)} = -16 \qquad \det A^{(2)} = 28$$

$$\det A^{(3)} = 56 \qquad x = \frac{\det A^{(1)}}{\det A} = \frac{-16}{4} = -4 \qquad y = \frac{\det A^{(2)}}{\det A} = \frac{28}{4} = 7 \qquad z = \frac{\det A^{(3)}}{\det A} = \frac{56}{4} = 14$$

Una rappresentazione parametrica di r_1 ed r_2 è la seguente: $r_1 : \begin{cases} x = -4t \\ y = 7t \\ z = 14t \end{cases}$ $\quad r_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$

Se esiste $P_o = r_1 \cap r_2$ deve essere: $\begin{cases} -4t_1 = -t_2 \\ 7t_1 = 3 + t_2 \\ 14t_1 = -2 + 4t_2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4t_1 = t_2 \\ 7t_1 = 3 + t_2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$

Vediamo se i valori trovati verificano la terza equazione del sistema $\begin{cases} -4t_1 = -t_2 \\ 7t_1 = 3 + t_2 \\ 14t_1 = -2 + 4t_2 \end{cases}$

$14 \cdot 1 = -2 + 4 \cdot 4 \qquad 14 = 14$

Le due rette sono incidenti ed il loro punto comune ha coordinate $P_o(-4; 7; 14)$

Trovare le equazioni parametriche di una retta r_1 assegnata come intersezione di due piani $r_1 : \begin{cases} 7x + 4y = 0 \\ 7x + 2z = 0 \end{cases}$. Basta attribuire ad una delle tre incognite un valore generico, ed esprimere le altre due incognite in funzione di questo generico valore. Si ottengono, così, le equazioni parametriche della retta, intersezione di due piani.

$$\begin{cases} 7x = -4y \\ 7x = -2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{4}{7}y \\ x = -\frac{2}{7}z \end{cases} \qquad x = -\frac{4}{7}y = -\frac{2}{7}z \qquad y = 7t \quad \Rightarrow \quad r_1 : \begin{cases} x = -4t \\ y = 7t \\ z = 14t \end{cases}$$

$$r_2:\begin{cases}4x+z+2=0\\ x\ \ +y-3=0\end{cases}\quad x=-t\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-4t+z+2=0\\ -t\ \ +y-3=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad r_2:\begin{cases}x=-t\\ y=3+t\\ z=-2+4t\end{cases}$$

Componenti di un vettore e numeri direttori di una retta

Si chiamano **numeri direttori** o **parametri direttori** di una retta r dello spazio $\mathbb{R}^3$ le componenti cartesiane di un qualsiasi vettore $\vec{v}$ (non nullo) parallelo ad r.

Se $\vec{v}=\ell\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}=(x_2-x_1)\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)\cdot\vec{j}+(z_2-z_1)\cdot\vec{k}$ è un vettore parallelo alla retta r, allora le due seguenti terne di numeri reali (ℓ,m,n) e $(x_2-x_1;y_2-y_1,z_2-z_1)$ sono terne di **numeri direttori** della retta r.

Tutte le terne di numeri direttori di una retta sono tra loro proporzionali.

Infatti se $\vec{v}$ è un vettore parallelo ad r, ogni altro vettore $\vec{w}$ parallelo ad r deve essere del tipo $\vec{w}=k\cdot\vec{v}$ e quindi $\vec{w}=(k\,\ell,k\,m,k\,n)$.

In particolare come numeri direttori della retta r si possono considerare le differenze tra le coordinate omonime di due suoi punti $A(x_1,y_1,z_1)$ e $B(x_2,y_2,z_2)$.

$$\ell=x_2-x_1,\quad m=y_2-y_1,\quad n=z_2-z_1$$

Coseni direttori di una retta

Sia $\vec{r}$ una retta orientata e sia $\vec{u}$ il suo versore. Definiamo **coseni direttori** della retta orientata $\vec{r}$ le componenti del suo versore $\vec{u}$: $\vec{u}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$

Dove α,β,γ sono gli angoli (convessi) che il versore $\vec{u}$ forma, rispettivamente, con i versori $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ degli assi cartesiani.

$$\cos\alpha=\cos(\vec{u},\vec{i})=\vec{u}\times\vec{i}\qquad\cos\beta=\cos(\vec{u},\vec{j})=\vec{u}\times\vec{j}\qquad\cos\gamma=\cos(\vec{u},\vec{k})=\vec{u}\times\vec{k}$$

Per i coseni direttori vale la seguente identità goniometrica: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Se $\vec{v}=\ell\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ è un generico vettore parallelo ed equiverso con $\vec{r}$ risulta:

$$\cos\alpha=\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}\quad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}\quad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}$$

Infatti risulta: $\vec{u}=\text{vers}\,\vec{r}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}\cdot\vec{i}+\frac{m}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}\cdot\vec{j}+\frac{n}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}\cdot\vec{k}$

essendo $|\vec{v}|=\rho=\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}$

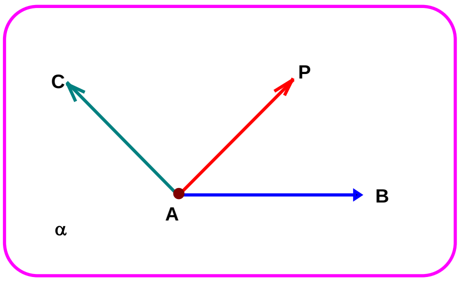
Se il versore $\vec{u}$ della retta orientata $\vec{r}$ ha lo stesso verso della retta orientata dal punto $A(x_1,y_1,z_1)$ al punto $B(x_2,y_2,z_2)$, risulta: $\ell=x_2-x_1,\ \ m=y_2-y_1,\ \ n=z_2-z_1$

N.B. Essendo i coseni direttori proporzionali ai numeri direttori di una retta, deduciamo che i coseni direttori di una retta sono particolari numeri direttori di una retta.

Equazione vettoriale del piano; equazioni parametriche del piano

Sia α un piano dello spazio $\mathbb{R}^3$ individuato da tre punti non allineati $A(x_1,y_1,z_1)$ e $B(x_2,y_2,z_2)$ $C(x_3,y_3,z_3)$.

I vettori $B-A$ e $C-A$ sono linearmente indipendenti in quanto non sono paralleli. Sia $P(x,y,z)$ un generico punto del piano α. I vettori $B-A$, $C-A$ e $P-A$, essendo complanari, sono linearmente dipendenti.



Da ciò deduciamo che $P\in\alpha$ se il vettore $P-A$ è combinazione lineare dei vettori $B-A$ e $C-A$ che sono linearmente indipendenti. Questo significa che esistono due scalare $h,k\in\mathbb{R}$ per i quali risulta: $\mathbf{P-A=h(B-A)+k(C-A)}$ equazione vettoriale del piano α

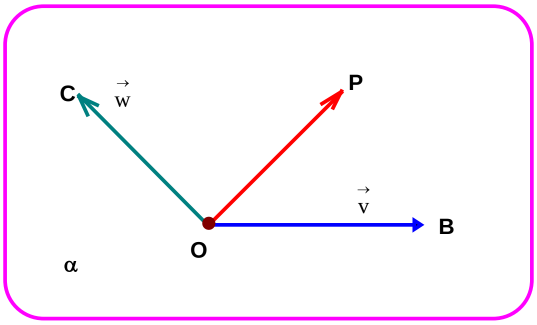
Scrivendo i vettori $B-A$, $C-A$ e $P-A$ on componenti cartesiane ed imponendo l'uguaglianza delle componenti omonime otteniamo:

$$\begin{cases} x-x_1=h(x_2-x_1)+k(x_3-x_1) \\ y-y_1=h(y_2-y_1)+k(y_3-y_1) \\ z-z_1=h(z_2-z_1)+k(z_3-z_1) \end{cases} \text{ e, quindi, anche: } \begin{cases} x=x_1+h(x_2-x_1)+k(x_3-x_1)=x_1+h\cdot\ell+k\cdot\ell' \\ y=y_1+h(y_2-y_1)+k(y_3-y_1)=y_1+h\cdot m+k\cdot m' \\ z=z_1+h(z_2-z_1)+k(z_3-z_1)=z_1+h\cdot n+k\cdot n' \end{cases}$$

che sono le equazioni parametriche del piano α.

Infatti l'equazione vettoriale del piano α può assumere la forma $\mathbf{P - A = h \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w}}$ essendo $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ due vettori non paralleli del piano α.

$$(P-O),\vec{v},\vec{w}\in\alpha$$



I vettori $B-O, P-O, C-0$ sono linearmente dipendenti in quanto sono complanari. La seguente matrice: $\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix}$

ha rango 2. Questo si verifica quando è nullo il suo determinante: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

Se il piano è individuato dai vettori $(P-O),\vec{v},\vec{w}$ otteniamo: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{vmatrix}=0$

Sviluppando questi due determinanti applicando il primo teorema di Laplace troviamo:

$$\mathbf{ax+by+cz+d=0}$$

che è l'equazione cartesiana del piano.

I coefficienti a,b,c sono scalari uguali o proporzionali ai minori del secondo ordine, presi a segno alterno, estratti da una delle due seguenti matrici: $\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{bmatrix}$

Il vettore $\vec{\mathbf{N}}=\mathbf{a}\cdot\vec{\mathbf{i}}+\mathbf{b}\cdot\vec{\mathbf{j}}+\mathbf{c}\cdot\vec{\mathbf{k}}$ è un vettore perpendicolare al piano α. Risulta: $(P-P_1)\times\vec{N}=0 \quad \Rightarrow$

$\mathbf{a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0}$ che rappresenta l'equazione del piano passante per il punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ e perpendicolare al vettore $\vec{\mathbf{N}}=\mathbf{a}\cdot\vec{\mathbf{i}}+\mathbf{b}\cdot\vec{\mathbf{j}}+\mathbf{c}\cdot\vec{\mathbf{k}}$.

I parametri direttori di un piano coincidono con i parametri direttori di una qualsiasi retta normale al piano o con le componenti cartesiane di un qualsiasi vettore ortogonale al piano.

$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$ equazione segmentaria del piano o equazione del piano in forma segmentaria

Condizioni di complanarità di quattro punti

Sia dato il piano π di equazione $ax+by+cz+d=0$. Imponendo il passaggio per i punti $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ e $C(x_3,y_3,z_3)$ otteniamo:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax_1+by_1+cz_1+d_1=0 \\ ax_2+by_2+cz_2+d_2=0 \\ ax_3+by_3+cz_3+d_3=0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema omogeneo nelle quattro incognite a,b,c,d. Questo sistema ammette autosoluzioni se il determinante dei coefficienti è nullo, cioè se:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione rappresenta il piano passante per tre punti $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ e $C(x_3,y_3,z_3)$. Se un altro punto $D(x_4,y_4,z_4)$ appartiene al piano π abbiamo:

$$\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Che esprime la condizione di complanarità di 4 punti $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$.

Punto di intersezione tra una retta ed un piano

Determinare il punto comune alla retta $r:\begin{cases} x = x_1 + k\,\ell \\ y = y_1 + k\,m \\ z = z_1 + k\,n \end{cases}$ ed al piano $\alpha: ax+by+cz+d=0$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ è un punto della retta r.

Il generico punto P della retta r ha coordinate $P(x_1+k\,\ell, y_1+k\,m, z_1+k\,n)$. $P\in\alpha \quad\Rightarrow$

$a(x_1+k\,\ell)+b(y_1+k\,m)+c(z_1+k\,n)+d=0$ equazione di primo grado nell'incognita k. Sia k_1 la soluzione di questa equazione. Il punto richiesto è: $P_1(x_1+k_1\,\ell, y_1+k_1\,m, z_1+k_1\,n)$

Se risulta: $a\,\ell+b\,m+c\,n=0$ e $ax_1+by_1+cz_1+d\neq 0$ la retta r è parallela al piano;

se risulta $a\,\ell+b\,m+c\,n=0$ e $ax_1+by_1+cz_1+d=0$ la retta r appartiene al piano.

$r:\begin{cases} x=-k \\ y=3+k \\ z=-2+4k \end{cases} \quad \alpha: x-y+2z-3=0 \quad -k-(3+k)+2(-2+2k)-3=0 \quad 6k=10 \quad k=\frac{5}{3} \quad P\left(-\frac{5}{3},\frac{14}{3},\frac{14}{3}\right)$

La retta r è data come intersezione di due piani: $r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

Possiamo scrivere le equazioni parametriche della retta r e poi procedere come prima.

Determinare la proiezione ortogonale del punto $Q(-1,3,2)$ sul piano di equazione $2x-y+4z+18=0$.

Le equazioni parametriche della retta passante per il punto $Q(-1,3,2)$ e perpendicolare al piano $2x-y+4z+18=0$ sono: $\begin{cases} x=-1+2k \\ y=3-k \\ z=2+4k \end{cases}$ Sostituendo questi valori nell'equazione del piano otteniamo: $2(-1+2k)-(3-k)+4(2+4k)+18=0 \quad 21k=21 \quad k=1 \quad Q_1(-3,4,-2)$

Supponiamo che la retta r sia data come intersezione di due piani: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

Possiamo scrivere le equazioni parametriche di r e poi procedere come prima.

Diversamente posiamo trovare le coordinate del punto P risolvendo il sistema formate con le equazioni dei tre piani: il piano α ed i due piani che individuano la retta.

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

Il punto esiste se questi tre piani fanno parte di una stella di piani. Il sistema ottenuto ammette una ed una sola soluzione se la matrice dei coefficienti $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ ha rango 3. Questo si verifica se $\det A\neq 0$. In questo caso la stella di piani generata dai 3 piani è a centro proprio.

Condizione di parallelismo tra due rette

C.N.S. perché due rette, rispettivamente di numeri direttori ℓ,m,n e ℓ',m',n', siano parallele è che la matrice $\begin{bmatrix} \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{bmatrix}$ abbia rango uguale ad uno. Tale matrice ha rango 1 solo se i vettori riga sono fra loro proporzionali. **C.N.S.** perché due rette siano parallele è che i loro numeri direttori siano ordinatamente proporzionali, cioè: $\frac{\ell_1}{\ell}=\frac{m_1}{m}=\frac{n_1}{n}=k$ cioè: $\ell_1=k\cdot\ell,\ m_1=k\cdot m,\ n_1=k\cdot n$

Condizione di perpendicolarità tra due rette

C.N.S. perché due rette dello spazio $\mathbb{R}^3$ di numeri direttori ℓ,m,n ed ℓ_1,m_1,n_1 siano perpendicolari è che valga la seguente relazione: $\ell\cdot\ell_1+m\cdot m_1+n\cdot n_1=0$

Condizione di perpendicolarità tra una retta ed un piano

C.N.S. perché una retta (di numeri direttori ℓ, m, n) ed un piano (di equazione $ax+by+cz+d=0$) siano perpendicolari è che la matrice $\begin{bmatrix} \ell & m & n \\ a & b & c \end{bmatrix}$ abbia rango uno. Questo si verifica quando i due vettori riga sono fra loro perpendicolari, cioè quando: $\frac{\ell}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=k$ cioè quando: $\ell=k\,a,\ m=k\,b,\ n=k\,c$

Condizione di perpendicolarità tra due piani

C.N.S. perché i piani, aventi rispettivamente equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, siano perpendicolari fra loro è che risulti: $a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1=0$

Condizione di parallelismo tra due piani

C.N.S. perché due piani, aventi rispettivamente equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, siano fra loro paralleli è che sia uguale ad uno il rango della matrice $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}$. Tale matrice ha rango 1 se i due vettori riga sono fra loro perpendicolari, cioè se:

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k \quad \text{cioè se:} \quad a_1=k\,a,\ b_1=k\,b,\ c_1=k\,c$$

Due piani paralleli differiscono tra loro solo per il termine noto. Le equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $ax+by+cz+d_1=0$

Condizione di parallelismo tra una retta ed un piano

C.N.S. perché una retta r di equazioni $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ sia parallela al piano α di equazione $ax+by+cz+d=0$ è che sia nullo il determinante del terzo ordine formato dai coefficienti delle incognite: $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

Se la retta r è individuata dai numeri direttori ℓ,m,n allora la condizione di parallelismo si traduce nella seguente relazione: $a\cdot\ell+b\cdot m+c\cdot n=0$

$\vec{\mathrm{v}}=\ell\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ $\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}_x\cdot\vec{i}+\mathrm{v}_y\cdot\vec{j}+\mathrm{v}_z\cdot\vec{k}$ $\vec{\mathrm{v}}=\vec{\mathrm{v}}_x+\vec{\mathrm{v}}_y+\vec{\mathrm{v}}_z$ $\vec{u}$ r $\vec{r}$ **C.N.S.** $\mathbf{2\times 3}$

$P-A=(x-x_1)\cdot\vec{i}+(y-y_1)\cdot\vec{j}+(z-z_1)\cdot\vec{k}$ $B-A=(x_2-x_1)\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)\cdot\vec{j}+(z_2-z_1)\cdot\vec{k}$

$A(x_1,y_1,z_1)$ e $B(x_2,y_2,z_2)$ $C(x_3,y_3,z_3)$ $P(x,y,z)$ $P-A$ $B-A$ $P-A=k\cdot(B-A)$

$\ell=x_2-x_1,\ m=y_2-y_1,\ n=z_2-z_1$ $\vec{u}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$ $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$