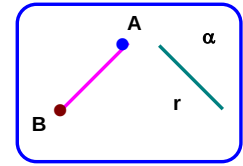


Scrivere l'equazione del piano α passante per i punti $A(1;1;2)$

e $B(0;0;1)$ e parallelo alla retta r di equazioni
$$\begin{cases} x=h \\ y=1+h \\ z=3h \end{cases}$$



$$r \parallel \vec{v} = \ell \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j} + n \cdot \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \ell=1, m=1, n=3$$

$$A-B = \ell_1 \cdot \vec{i} + m_1 \cdot \vec{j} + n_1 \cdot \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \ell_1=1, m_1=1, n_1=1$$

Le equazioni parametriche del piano α sono:

$$\begin{cases} x=x_B + \ell \cdot h + \ell_1 \cdot k \\ y=y_B + m \cdot h + m_1 \cdot k \\ z=z_B + n \cdot h + n_1 \cdot k \end{cases} \quad \alpha : \begin{cases} x=h+k \\ y=h+k \\ z=1+3h+k \end{cases} \quad \begin{cases} h+k=x \\ h+k=y \\ 3h+k=z-1 \end{cases}$$

Sistema lineare di 3 equazioni nelle 2 incognite h, k . Il sistema è compatibile solo se $\det B=0$

$$\det B \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 3 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-y=0 \text{ equazione del piano } \alpha.$$

Altro procedimento: Scrivo l'equazione della retta AB come intersezione di due piani.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad x=y=z-1$$

equazione della retta passante per i punti $A(1;1;2)$ e $B(0;0;1)$

$$\begin{cases} x=y \\ x=z-1 \end{cases} \quad AB : \begin{cases} x-y=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

Equazione del fascio di piani aventi come sostegno la retta AB

$$x-y+\lambda(x-z+1)=0 \quad \pi : (1+\lambda)x-y-\lambda z+\lambda=0$$

$$\pi \parallel r \Rightarrow a\ell + bm + cn = 0 \quad a=1+\lambda \quad b=-1 \quad c=-\lambda \quad \ell=1, m=1, n=3 \Rightarrow$$

$$1+\lambda-1-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow x-y=0 \text{ equazione del piano } \alpha.$$

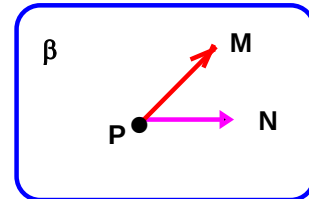
\

Scrivere l'equazione del piano α passante per il punto $A(1,2,1)$, parallelo al piano β passante per i punti $M(1,1,2)$, $N(2,2,0)$, $P(0,0,0)$ dopo avere verificato che questi punti non sono allineati.

I tre punti sono allineati se la matrice 2×3

$$B = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \text{ ha rango 1, cioè se i}$$

vettori $M - P$ ed $N - P$ sono paralleli.



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad r(B) = 2 \text{ in quanto è diverso da zero il minore del secondo ordine } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

E quindi i vettori $[1 \ 1 \ 2]$, $[2 \ 2 \ 0]$ non sono fra loro proporzionali

Se i tre punti $M(1,1,2)$, $N(2,2,0)$, $P(0,0,0)$ non sono allineati, allora essi sono complanari cioè appartengono al piano B avente equazione:

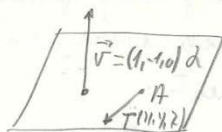
$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right| = 0 \quad \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ R_2 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_3 \leftarrow R_4 - R_3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right| = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ho applicato il} \\ \text{primo teorema} \\ \text{di Laplace alla} \\ \text{1}^a \text{ colonna} \end{array} \quad \boxed{x - y = 0} \rightarrow \beta$$

Un generico piano π parallelo a β ha equazione $A(1,2,1)$
 $x-y+k=0$ $A \in \pi \Rightarrow 1-2+k=0 \quad k=1$

(d) $x-y+1=0$

$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$



Altre soluzioni

$\vec{v} = 1\cdot\vec{i} + (-1)\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = (1, -1, 0)$ $\vec{v} \perp \beta$ e quindi anche ad α

Se $P(x, y, z)$ è un generico punto di α ha:

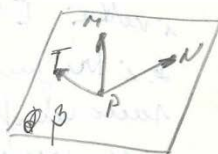
$T-A \perp \vec{v}$ e quindi $(T-A) \cdot \vec{v} = 0$

$T-A = (x-1, y-2, z-1)$ $v(1, -1, 0)$

$(x-1) \cdot (1) + (y-2) \cdot (-1) + (z-1) \cdot (0) = 0$

$x-1 - y+2 = 0$

$x-y+1=0$



Piano passante per tre punti

3 punti M, N, P non sono allineati, in quanto le componenti:
 $(1, 1, 2)$ e $(2, 2, 0)$ dei vettori $M-P$ e $N-P$ non sono proporzionali,
 e quindi i vettori non sono paralleli.

Un $T(x, y, z)$ un generico punto del piano β , i vettori:

$T-P$, $M-P$, $N-P$ sono vettori complanari, sono
 linearmente dipendenti. Questo si verifica se esistono
 due scalari $h, k \in \mathbb{R}$ per i quali risulta:

$T-P = h(M-P) + k(N-P) \Rightarrow$

$(x, y, z) = h(1, 1, 2) + k(2, 2, 0)$

$\begin{cases} x = h + 2k \\ y = h + 2k \\ z = 2h \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow x - y = 0$ β

Dato il vettore $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ scrivere l'equazione del piano α ad esso

perpendicolare e passante per la retta r di equazioni $\begin{cases} x=1+k \\ y=k \\ z=3k \end{cases}$ dopo avere

verificato che r e $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ sono ortogonali.

$$\begin{cases} x=1+y \\ z=3y \end{cases} \quad \textcircled{2} \quad \begin{cases} x-y-1=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

Scrivo la retta r come intersezione di due piani

Scrivo l'equazione del fascio di piani che ha r come sostegno

$$\pi: x-y-1+\lambda(3y-z)=0 \quad \pi \perp \vec{v} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{-1} = k$$

$$\begin{aligned} a=1 \quad b=3\lambda-1 \quad c=-\lambda \quad d=2 \quad m=1 \quad n=0-1 \\ \frac{1}{2} = \frac{3\lambda-1}{1} = \frac{-\lambda}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = 3\lambda-1 \\ \frac{1}{2} = \lambda \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

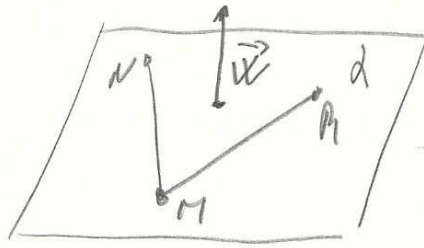
$$\begin{aligned} x + \left(\frac{3}{2}-1\right)y - \frac{1}{2}z - 1 = 0 \quad x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = 0 \\ \boxed{2x + y - z - 2 = 0} \quad \text{a} \quad \text{Per verificare parallelo ad } \vec{v}: \\ \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{v} \times \vec{w} = (2, 1, -1) \cdot (1, 1, 3) = 2+1-3=0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \perp r \end{aligned}$$

Verificare che la retta passante per il punto $P(1,1,0)$ e parallela al vettore $\vec{v}=2\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}-2\cdot\vec{k}=(2;2;-2)$ è perpendicolare al piano α passante per i punti $M(0;0;1)$, $N(-1;1;1)$, $R(-1;0;0)$.

$$\begin{cases} x = x_1 + l \cdot v \\ y = y_1 + m \cdot v \\ z = z_1 + n \cdot v \end{cases} \quad \text{sono le equazioni parametriche della retta passante per il punto } (x_1, y_1, z_1) \text{ e parallela al vettore } \vec{v} = l \cdot \vec{i} + m \cdot \vec{j} + n \cdot \vec{k}$$

Nel caso nostro abbiamo: $l=2$ $m=2$ $n=-2$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + 2k \\ z = -2k \end{cases}$$

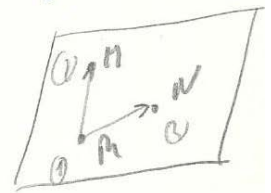


$$\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$$\vec{w} \perp \alpha$$

a, b, c sono i minori del secondo ordine, presi a ruota, e
entrati nella matrice

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad b = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad c = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\vec{w} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{w} = (-1, -1, 1) \quad \vec{v} = (2, 2, -2) = 2(1, 1, -1)$$

Equazione del piano α

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{x + y - z + 1 = 0}$$

$$\alpha \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \parallel \vec{v} \Rightarrow \frac{w_x}{v_x} = \frac{w_y}{v_y} = \frac{w_z}{v_z} = k \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Scrivere l'equazione del piano α passante per la retta di equazioni

$$\begin{cases} x=1+k \\ y=k \\ z=k \end{cases} \text{ e parallelo alla retta } s \text{ passante per l'origine degli assi cartesiani}$$

e parallela al vettore $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(2;1;1)$.

Il vettore $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(1;1;1)$ è parallelo alla retta r .

Traviamo una rappresentazione di r come intersezione di due piani.

$$r: \begin{cases} x-y-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

Equazione del fascio di piani aventi r come cardine

$$\pi: \boxed{x-y-1+\lambda(y-z)=0} \quad \pi \quad \boxed{x+(\lambda-1)y-\lambda z-1=0}$$

$$\pi \parallel r \Rightarrow a\ell + b m + c n = 0 \quad \begin{cases} a=1 \\ \ell=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=\lambda-1 \\ m=1 \end{cases} \quad \begin{cases} c=-\lambda \\ n=1 \end{cases}$$

$$2 + \lambda - 1 - \lambda = 0$$

Per il fascio di rette conviene utilizzare parametri ausiliari

$$\lambda = \frac{\ell}{h}$$

$$h(x-y-1) + \ell(y-z)=0 \quad h x - h y - h + \ell y - \ell z = 0$$

$$\underbrace{h} x + \underbrace{(\ell-h)} y - \underbrace{\ell} z - h = 0 \quad 2h + \ell - h - \ell = 0 \quad \boxed{h=0}$$

Se fanno riferimento la equazione $y-z=0$

$\begin{cases} x=2h \\ y=h \\ z=h \end{cases}$ retta passante per $O(0,0,0)$ e parallela a $\vec{v}$.

Trovare l'equazione della retta r passante per il punto $A(1;1;1)$, parallela al piano α di equazione $x+y+z=1$ e perpendicolare alla retta s di

equazione $\begin{cases} x=2h \\ y=h \\ z=1-3h \end{cases}$.

Siano l, m, n i parametri diretti della retta r .

$r \parallel \alpha \Rightarrow l \cdot l + l \cdot m + 1 \cdot n = 0$

$l + m + n = 0$

$r \perp s \Rightarrow 2l + m - 3n = 0$

Si risolve il sistema omogeneo

$\begin{cases} l + m + n = 0 \\ 2l + m - 3n = 0 \end{cases}$ ammette soluzioni infinite
la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ha rango 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

$\begin{cases} l + m = -n \\ 2l + m = 3n \end{cases}$

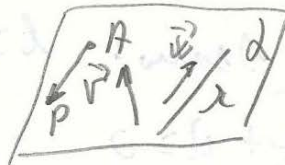
$\begin{cases} l = 4n \\ m = -5n \end{cases}$

Come numeri direttori della retta r scriviamo
 scegliere la seguente terna di numeri reali
 $l=4 \quad m=-5 \quad n=1$

$$\begin{cases} x = x_1 + l \cdot k = 1 + 4k \\ y = y_1 + m \cdot k = 1 - 5k \\ z = z_1 + n \cdot k = 1 + k \end{cases}$$

Equazioni parametriche della retta r :

Dato il vettore $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ trovare l'equazione del
 piano per $A(0,0,1)$ parallelo a $\vec{v}$ ed alla retta r d'equazione
 $r: \begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$



Un vettore parallelo ad r è $\vec{w} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ dove
 i numeri direttori l, m, n sono i numeri del secondo ordine
 calcolato alternato della matrice $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$l = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad m = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Il punto $P(x, y, z)$ appartiene al piano se i vettori $(P-A), \vec{v}, \vec{w}$ sono coplanari. Questo si verifica se sono vettori linearmente dipendenti. In questo caso è facile trovare due scalari $h, k \in \mathbb{R}$ per i quali risulta $P-A = h\vec{v} + k\vec{w}$

(equazione vettoriale della retta in forma vettoriale)

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad \vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\alpha: \begin{cases} x = h + u \\ y = h - u \\ z = 1 + 2h \end{cases}$$
 equazioni parametriche del piano α
 eliminando i parametri h e u troviamo l'equazione generale del piano.

$$\boxed{x + y - z + 1 = 0} \quad (\alpha)$$

Altra risoluzione

I numeri diretti del vettore $\vec{v}$ sono: $l_1 = 1, m_1 = 1, n_1 = 2$,
 quelli della retta sono: $l = 1, m = -1, n = 0$

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad d \parallel \vec{v} \Rightarrow$$

$$a l_1 + b m_1 + c n_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\alpha \parallel \vec{w} \Rightarrow a l + b m + c n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = -2c \\ a-b = 0 \end{cases}$$

$$2a = -2c$$

$$\begin{cases} a = -c \\ a = b = -c \end{cases}$$

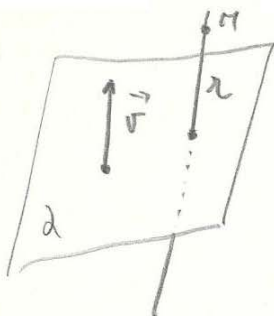
$$c = 1 \quad ; \quad a = b = -c = -1$$

$x + y - z + d = 0$ piano parallelo a $\vec{r}$ e $\vec{s}$
 Tale piano contiene il punto $A(0,0,1)$:

$$-1 + d = 0 \quad d = 1$$

$$x + y - z + 1 = 0$$

Scrivere l'equazione della retta r passante per il punto $M(1;5;2)$ e perpendicolare al piano α di equazione $x+y=0$ e quella della retta s passante per il punto $M(1;5;2)$ e parallela alla retta t di equazioni $\begin{cases} x=z \\ y=1+z \end{cases}$.



$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \perp \alpha \quad r \parallel \vec{v} \Rightarrow$$

$$l=a; m=b; n=c \quad d: x+y \neq 0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

troviamo l'equazione di una retta perpendicolare

ad un piano sono proporzionali (in particolare uguali) ai coefficienti delle incognite dell'equazione del piano.

$$\begin{cases} x = x_M + l h = x_M + e h = 1 + h \\ y = y_M + m h = y_M + b h = 4 + h \\ z = z_M + n h = z_M + 0 \cdot h = 0 \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 4 + h \\ z = 0 \end{cases}$$

□ La stella di rette d'angolo $\pi(1, 4, 0)$ ha equazione:

$$\boxed{\frac{x-1}{l} = \frac{y-4}{m} = \frac{z}{n}} \quad s: \begin{cases} x-z=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

3 numeri direttori della retta s coincidono con i minori del 2° ordine, presi con segno alternato, della matrice:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad l_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad m_1 = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$r \parallel s \Rightarrow \frac{l}{1} = \frac{m}{-1} = \frac{n}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l = m \\ m = -n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \geq 1 \\ m = -1 \\ n = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 4 + h \\ z = h \end{cases}$$

$$s: \boxed{x-1 = 4-y = z}$$

Trovare le coordinate del punto d'intersezione della retta r passante per il punto $A(1;2;1)$ e parallela al vettore $\vec{v} = \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} = (1;5;2)$ col piano α passante per i punti $M(3;1;1)$, $N(1;1;1)$, $O(0;0;0)$.

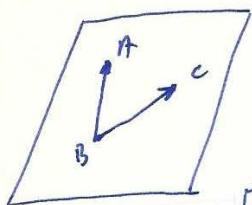
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{y-z=0} \text{ piano } d$$

retta r :
$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + 5k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \quad P(1+k, 2+5k, 1+2k) \text{ generico punto di } r$$

$P \in d \Rightarrow (1+2k) - (2+5k) = 0 \Rightarrow -3k - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{1}{3}}$

$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{3} \quad P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è l'intersezione del punto P con il piano d

Travare l'equazione del piano d passante per i punti $A(1,1,1)$, $B(3,0,0)$, $C(2,1,0)$ dopo avere accertato che essi non sono allineati. e l'equazione della retta r per A perpendicolare al piano d .



I punti A, B, C sono allineati se i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ sono paralleli. Questo si verifica se il rango è la matrice

$$M = \begin{bmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B & z_C - z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(M) = 2$ I tre punti non sono allineati e quindi sono complanari.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{equazione del piano } h: x+y+z-3=0$$

$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ è un vettore $\perp h$ Allora la retta r passa per A ed è parallela a $\vec{v}$ cioè $\perp h$.

$$\begin{cases} x = x_A + aK \\ y = y_A + bK \\ z = z_A + cK \end{cases} \quad (n) \quad \begin{cases} x = 1 + K \\ y = 1 + K \\ z = 1 + K \end{cases} \quad x-1 = y-1 = z-1$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad x+y+z-3=0$$

$$\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

