[6] Determinare l’equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta $r:\begin{cases} x=t \\ y=t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

tangente al piano $\pi: 3x-y-2z+14=0$ nel punto $T(-4,0,1)$.

M.S. 2018 Quesito 6

$\vec{n}=(a,b,c)=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}+c\,\vec{k}$ è un vettore perpendicolare al piano di equazione $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$

$\vec{n}=(3,-1,-2)=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ è un vettore perpendicolare al piano π di equazione $3x-y-2z+14=0$

La retta s passante per il punto $T(-4,0,1)$ e perpendicolare al piano π ha equazione: $\begin{cases} x=-4+3k \\ y=-k \\ z=1-2k \end{cases}$

Il centro $C(\alpha,\alpha,\alpha)$ della superficie sferica S ha coordinate uguali in quanto appartiene alla retta

$r:\begin{cases} x=t \\ y=t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$

Impongo la sua appartenenza alla retta s di equazione $\begin{cases} x=-4+3k \\ y=-k \\ z=1-2k \end{cases}$. Ottengo:

$$\begin{cases} \alpha=-4+3k \\ \alpha=-k \\ \alpha=1-2k \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-k \\ -k=-4+3k \\ -k=1-2k \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-k \\ 4k=4 \\ k=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\ -1 \\ k=1 \\ k=1 \end{cases} \quad \mathbf{C(-1;-1;-1)}$$

Indicando con $R=CT$ il raggio della sfera abbiamo: $R=\overline{CT}=\sqrt{(-4+1)^2+(0+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{14}$

$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2\ R^2$ è l’equazione di una sfera di $C(x_C,y_C,z_C)$ e raggio R abbiamo:

$$\mathbf{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14} \qquad \mathbf{x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-11=0}$$

M.S. 2018 Quesito 6

[9] Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(1;1;2)$. Dopo vere verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x+y+z-4=0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.

M.S. 2018 Quesito 9

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(3-3)^2+(-1-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2}=\sqrt{(1-3)^2+(1+1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$CA=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2+(z_A-z_C)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$AB=BC=CA \quad \Rightarrow \quad ABC$ triangolo equilatero

La geometria euclidea ci dice che per tre punti non allineati passa un solo piano. I tre punti A, B, C appartengono al piano α se le loro coordinate verificano l'equazione del piano α.

$3+1+0-4=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0 \quad \Rightarrow \quad A\in\alpha \qquad ; \qquad 3-1+2-4=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0 \quad \Rightarrow \quad B\in\alpha$

$1+1+2-4=0 \quad \Rightarrow \quad 0=0 \quad \Rightarrow \quad C\in\alpha$

Le coordinate del baricentro G del triangolo equilatero ABC sono:

$$X_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{3+3+1}{3}=\frac{7}{3} \qquad Y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{1-1+1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$Z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{0+2+2}{3}=\frac{4}{3} \qquad G\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$$

Il vettore $\vec{n}=(\ell;m;n)=(1;1;1)$ rappresenta una direzione ortogonale al piano $\alpha: x+y+z-4=0$

Il vertice P del tetraedro regolare $ABCP$ si trova sulla retta r passante per il baricentro G del triangolo ABC e perpendicolare al piano $\alpha: x+y+z-4=0$.

Le equazioni parametriche della retta r sono le seguenti: $\begin{cases} x = x_G + k\,\ell \\ y = y_G + k\,m \\ z = z_G + k\,n \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} + k \\ y = \dfrac{1}{3} + k \\ z = \dfrac{4}{3} + k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{R}$

$$P \in r \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{7}{3} + k; \frac{1}{3} + k; \frac{4}{3} + k\right)$$

Per individuare le coordinate del punto P possiamo utilizzare due procedimenti.

Primo procedimento

Basta imporre che gli spigoli del tetraedro regolare $ABCP$ sono uguali; possiamo porre:

$$PA = AB \quad \Rightarrow \quad PA^2 = AB^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{7}{3} + k - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + k - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} + k - 0\right)^2 = 8$$

$$\left(k - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(k - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(k + \frac{4}{3}\right)^2 = 8 \qquad 2\left(k^2 - \cancel{\frac{4}{3}k} + \frac{4}{9}\right) + k^2 + \cancel{\frac{8}{3}k} + \frac{16}{9} = 8$$

$$3k^2 + \frac{24}{9} = 8 \qquad k^2 = \frac{16}{9} \qquad k = \pm\frac{4}{3} \qquad k = \frac{4}{3} \Rightarrow \mathbf{P_1}\left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right) \qquad k = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2}(\mathbf{1;\text{-}1;0})$$

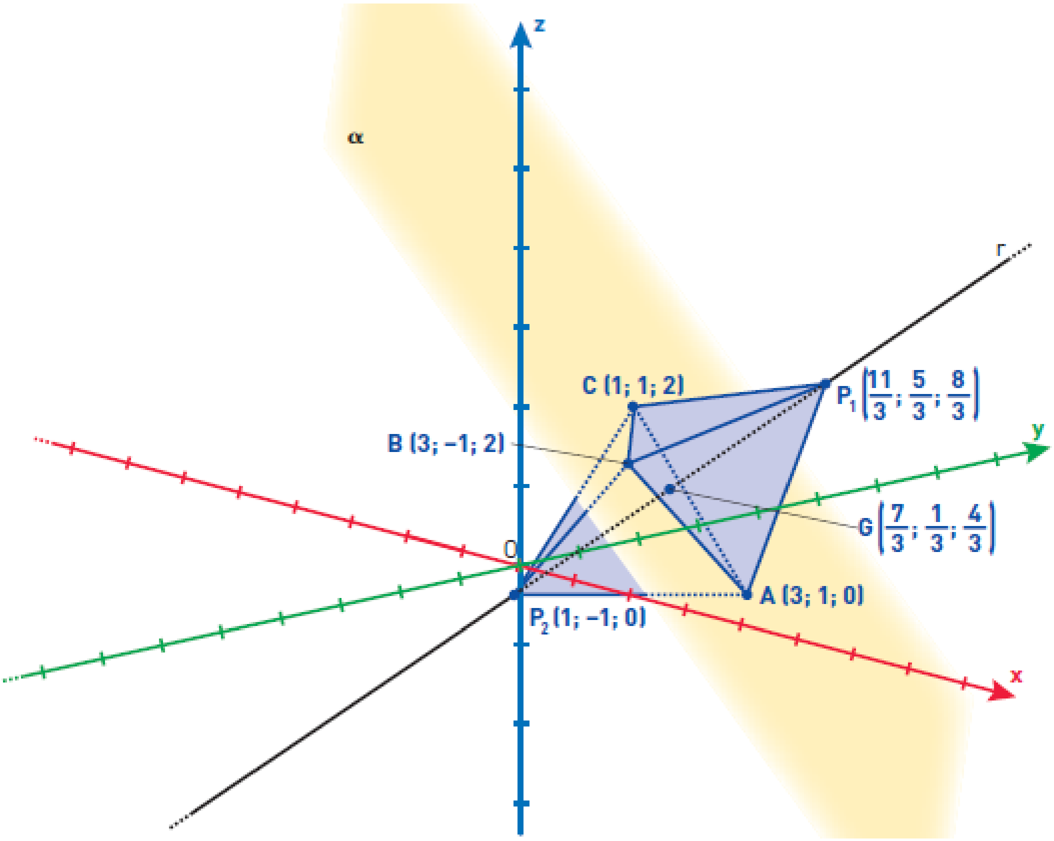
Secondo procedimento

$$AG^2 = \left(\frac{7}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 \; \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

Poiché il tetraedro è regolare risulta: $AP = AB = 2\sqrt{2}$

$$PG = \sqrt{AP^2 - AC^2} = \sqrt{8 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \qquad d(P, \alpha) = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left|\cancel{\frac{7}{3}} + k + \cancel{\frac{1}{3}} + + k + \cancel{\frac{4}{3}} + k - \cancel{4}\right|}{\cancel{\sqrt{1 + 1 + 1}}} = \frac{4}{\cancel{\sqrt{3}}}$$

$$|3k| = 4 \quad k = \pm\frac{4}{3} \quad k = \frac{4}{3} \Rightarrow \mathbf{P_1}\left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}; \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right) \qquad k = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_2}(\mathbf{1;\text{-}1;0})$$



5. Dati i punti $A(-2,3,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(2,2,-3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

M.S. 2017 Quesito 5

Equazione vettoriale della retta r in forma sintetica dove, come punto iniziale, prendo il punto $A(-2,3,1)$: $P-A=k(B-A)$ con $P(x,y,z)$ generico punto della retta:

Le equazioni parametriche della retta richiesta sono; $\begin{cases} x=x_A+k(x_B-x_A) \\ y=y_A+k(y_B-y_A) \\ x=z_A+k(z_B-z_A) \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2+5k \\ y=3-3k \\ z=1-2k \end{cases}$

$P(-2+5k,3-3k,1-2k)$

Possiamo utilizzare anche la seguente formula: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$

$\dfrac{x+2}{3+2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-1}{-1-1}$ $\quad\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$

In questo caso la retta r è l'intersezione di due piani: $\begin{cases} \frac{x+2}{5}=\frac{y+3}{-3} \\ \frac{x+2}{5}=\frac{z-1}{-2} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \frac{x+2}{5}=\frac{y+3}{-3} \\ \frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{-2} \end{cases}$

Il piano π ha gli stessi parametri direttori della retta r che sono: $(5,-3,-2)$. Poiché passa per il punto $C(2,2,-3)$ la sua equazione è:

$$5(x-x_C)-3(y-y_C)-2(z-z_C) \quad 5(x-2)-3(y-2)-2(z+3) \quad 5x-3y-2z-10=0$$

L'equazione del piano π può essere scritta come prodotto scalare: $(P-P_C)\times\vec{N}$ dove $\vec{N}$ è un vettore perpendicolare al piano π. Come vettore $\vec{N}$ possiamo prendere il vettore: $\vec{N}=(5,-3,-2)$

$$(P-P_C)\times\vec{N} \quad \Rightarrow \quad 5(x-x_C)-3(y-y_C)-2(z-z_C) \quad 5(x-2)-3(y-2)-2(z+3)$$
$$5x-3y-2z-10=0$$

L'equazione generale del piano π è: $ax+by+cz+d=0$ I coefficienti a,b,c sono i numeri direttori di una qualsiasi retta perpendicolare al piano π. Nel caso nostro sono i parametri direttori della retta r, cioè: $(5,-3,-2)$

7) Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $r=\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione $x+2y-z+1=0$ nel suo punto P di coordinate $(1;0;2)$.

I centri delle sfere richieste appartengono alla retta passante per il punto $P(1,0,2)$ e normale al piano π di equazione $x+2y-z+1=0$.

Il vettore $\vec{N}=(a,b,c)$ è un vettore perpendicolare al piano π di equazione $ax+by+cz+d=0$. Nel caso del nostro problema abbiamo: $\vec{N}=(1,2,-1)$

La retta s passante per il punto $P(1,0,2)$ e normale al piano π di equazione $x+2y-z+1=0$ ha le seguenti equazioni parametriche. $s:\begin{cases} x=1+k \\ y=0+2k \\ z=2-k \end{cases}$ $C(1+k,2k,2-k)$ è il generico punto della retta s.

$$PC=\sqrt{6} \Rightarrow PC^2=6 \Rightarrow (1+k-1)^2+4k^2+(2-k-2)^2=6 \quad k^2+4k^2+k^2=6$$

$$6k^2=6 \qquad k=\pm 1$$

Le coordinate dei centri delle sfere richieste sono: $C_1(2,2,1)$ $C_2(0,-2,3)$

M.S. 2017 Quesito 7

Quesito N°5 M.S. 2016

Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2,-1,2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x-2y+z-9=0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera? Noi sappiamo che $\vec{n}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}=(a,b,c)$ è un vettore perpendicolare al piano **α** di equazione $ax+by+cz+d=0$.

Questo ci consente di affermare che i parametri direttori di una retta perpendicolare al piano Π di equazione $2x-2y+z-9=0$ **[1]** sono i numeri $(2,-2,1)$.

Le equazioni parametriche della retta **s** passante per il punto e perpendicolare al Π sono:

$$\begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \qquad [2]$$

Risolvendo il sistema tra l'equazione del piano Π e le equazioni parametriche della retta **s** troviamo le coordinate del punto di tangenza **T**. Per fare ciò basta sostituire le **[2]** nell'equazione **[1]**. $2(-2+2\lambda)-2(-1-2\lambda)+(2+\lambda)=0$ **λ=1** **T(0,-3,3)**

$$r=KT=\sqrt{(-2-0)^2+(-1+3)^2+(2-3)^2}=3$$

$$r=d(K,\Pi)=\frac{|a\,x_K+b\,y_K+c\,z_K|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-4+2+2-9|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{9}{3}=3$$

Quesito N°9 M.S. 2016

Datele rette $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ **ed il punto** $P_1(1,0,-2)$ **determinare l'equazione del piano passante per** $P_1(1,0,-2)$ **e parallelo alle due rette.**

I parametri direttori della retta **r** sono: $(1,2,1) = \vec{v}$

I parametri direttori della retta **s** si ottengono scrivendola in forma parametrica. Nella seconda equazione poniamo $\mathbf{x = \lambda}$. Otteniamo; $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases}$

I parametri direttori della retta **s** sono: $(1,2,-3) = \vec{w}$

$ax + by + cz + d = 0$ è l'equazione di un piano α i cui parametri direttori sono (a,b,c). Questi parametri direttori sono le componenti di un vettore $\vec{n} = (a,b,c) = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ perpendicolare al piano α.

La condizione di parallelismo tra il piano α $ax + by + cz + d = 0$ e la retta individuata dal vettore $\vec{u} = (\ell, m, n)$ è data dalla seguente relazione: $a\ell + bm + cn = 0$.

$r \parallel \alpha \Rightarrow a + 2b + c = 0$ $s \parallel \alpha \Rightarrow a + 2b - 3c = 0$ Otteniamo: $\begin{cases} c = 0 \\ a = -2b \end{cases}$

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ è l'equazione del piano passante per il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ed avente parametri direttori (a,b,c). Nel caso nostro otteniamo:

$$-2b(x-1) + b(y-0) + 0 \cdot (x+2) = 0 \quad -2\cancel{b}(x-1) + \cancel{b}(y-0) = 0 \quad 2x - y - 2 = 0$$

Altra risoluzione

L'equazione vettoriale del piano richiesto è: $P - P_1 = h \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{w} = h(1,2,1) + k(1,2,-3)$

$$\begin{cases} x - 1 = h + k \\ y = 2h + 2k \\ z + 2 = h - 3k \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = h + k \\ y = 2(h+k) \\ z + 2 = h - 3k \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = h + k \\ y = 2(x-1) \\ z + 2 = h - 3k \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = h + k \\ y = 2x - 2 \\ z + 2 = h - 3k \end{cases}$$

Eliminando i parametri h, k otteniamo l'equazione del piano richiesto, cioè: $2x - y - 2 = 0$

Altra risoluzione

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell & m & n \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$ è l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e parallelo alle rette **r** di parametri direttori (ℓ, m, n) ed **s** di parametri direttori (ℓ_1, m_1, n_1)

Utilizzando i dati del problema otteniamo: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad -8(x-1)+4y=0 \quad 2x-y-2=0$$

I vettori complanari $(1,2,1)=\vec{v}$ e $(1,2,-3)=\vec{w}$ individuano rispettivamente le direzioni delle rette **r** ed **s**. Il piano parallelo alle rette **r** ed **s** ha come parametri direttori le componenti del vettore $\vec{n}$ perpendicolare ai vettori $(1,2,1)=\vec{v}$ e $(1,2,-3)=\vec{w}$. Risulta:

$$\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (-8, 4, 0)$$

L'equazione del piano richiesto è: $-8(x-1)+4y=0 \quad 2x-y-2=0$

$\vec{v} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$