Unità didattica N° 6 La retta

01) **Equazione vettoriale della retta**

02) **Equazioni parametriche della retta**

03) **Equazione della retta passante per due punti**

04) **Equazione della retta passante per un punto ed avente coefficiente angolare assegnato**

05) **Equazione generale della retta**

06) **Equazione canonica della retta**

07) **Equazione segmentaria della retta**

08) **Equazioni di rette in posizione particolare rispetto agli assi cartesiani**

09) **Rappresentazione grafica della retta**

10) **Il punto comune a due rette**

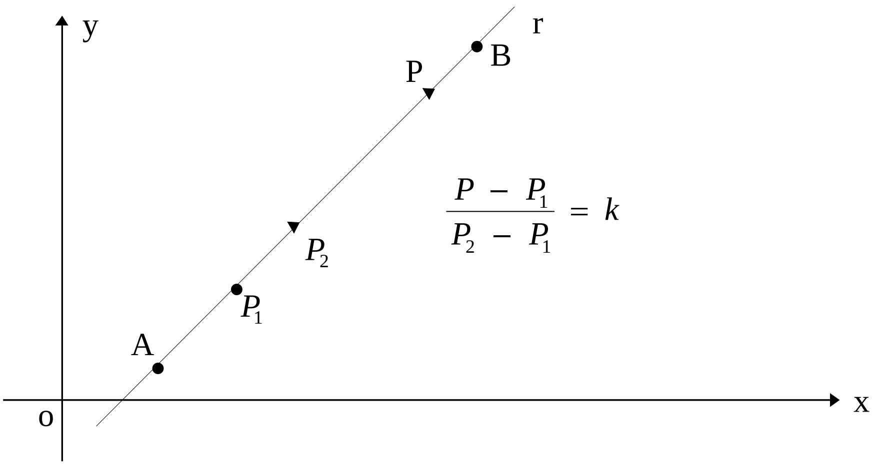
11) **La risoluzione dell'equazione a due incognite** $ax + by + c > 0$

Equazione vettoriale della retta

La retta **r** sia individuata dai punti $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$, Se $P(x,y)$ è un generico punto di **r** , vale la seguente relazione vettoriale: $\mathbf{P - P_1 = k(P_2 - P_1)}$ **[1]**

con $k \in R$ e $P - P_1$, $P_2 - P_1$ vettori paralleli aventi lo stesso sostegno. La [1] è detta equazione vettoriale della retta scritta in forma sintetica. L'equazione vettoriale [1] scritta in forma cartesiana diventa:

$$\mathbf{(x - x_1)\cdot \vec{i} + (y - y_1)\cdot \vec{j} = k(x_2 - x_1)\cdot \vec{i} + (y_2 - y_1)\cdot \vec{j}} \qquad \textbf{[2]}$$



Equazioni parametriche della retta

Dalla [2] ricaviamo: $x - x_1 = k(x_2 - x_1)$, $y - y_1 = k(y_2 - y_1)$

Ponendo $y_2 - y_1 = a$ $x_2 - x_1 = -b$ oppure $y_2 - y_1 = -a$ $x_2 - x_1 = b$ otteniamo

$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)k \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)k \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_1 - bk \\ y = y_1 + ak \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_1 + bk \\ y = y_1 - ak \end{cases}$	**[3]**

che rappresentano le equazioni parametriche della retta r.

Equazione della retta passante per due punti

Se dalle relazioni $x - x_1 = k(x_2 - x_1)$, $y - y_1 = k(y_2 - y_1)$

eliminiamo il parametro k otteniamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad [4]$$

Essa non si presta a rappresentare né rette parallele all'asse delle ascisse ($y = y_1$) né rette parallele all'asse delle ordinate ($x_2 = x_1$) in quanto, annullandosi uno dei due denominatori, verrebbe a perdere di significato.

Equazione della retta passante per un punto ed avente coefficiente angolare assegnato

Ponendo: $\mathbf{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}}$ **[5]** la [4] diventa: $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$ **[6]**

che rappresenta l'equazione della retta passante per un dato punto $P_1(x_1, y_1)$ ed avente coefficiente angolare **m** assegnato. Il numero **m** è detto coefficiente angolare della retta.

Equazione generale della retta

Dalla [6] ricaviamo: $b(y - y_1) = -a(x - x_1)$, $ax + by - (ax_1 + by_1) = 0$

Ponendo: $c = -(ax_1 + by_1)$ otteniamo l'equazione : $\mathbf{ax + by + c = 0}$ **[7]**

che è l'**equazione generale** della retta o **equazione della retta sotto forma implicita**.

<< **Scrivere l'equazione della retta individuata dai punti** $A(1,3)$ **e** $B(2,5)$ >>

equazione vettoriale: $(x - 1)\cdot\vec{i} + (y - 3)\cdot\vec{j} = k(2 - 1)\cdot\vec{i} + k(5 - 3)\cdot\vec{j}$ cioè:

$$(x - 1)\cdot\vec{i} + (y - 3)\cdot\vec{j} = k\cdot\vec{i} + 2k\cdot\vec{j}$$

Equazioni parametriche: $\begin{cases} x - 1 = k \\ y - 3 = 2k \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 3 + 2k \end{cases}$

Il punto $P(1 + k, 3 + 2k)$ appartiene alla retta AB .

Retta passante per due punti: $x - 1 = \frac{y - 3}{2}$

Equazione generale della retta: $2x - y + 1 = 0$

OSSERVAZIONE

$P \in \overline{P_2B} \Rightarrow k \in R^+ \wedge k > 1$, $P \equiv P_2 \Rightarrow k = 1$, $P \in \overline{P_1P_2} \Rightarrow 0 < k < 1$, $P \equiv P_1 \Rightarrow k = 0$

$P \in \overline{P_1A} \Rightarrow k \in R^-$

Definizione Dicesi retta il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$ verificano l'equazione di primo grado a due incognite $ax+by+c=0$.

Equazione canonica della retta

Ponendo $m = -\frac{a}{b} = tg\,\vartheta$, $n = -\frac{c}{b}$ l'equazione [7] diventa: $\mathbf{y = mx + n}$ **[8]**

che rappresenta l'**equazione canonica** della retta o **equazione della retta sotto** forma esplicita.

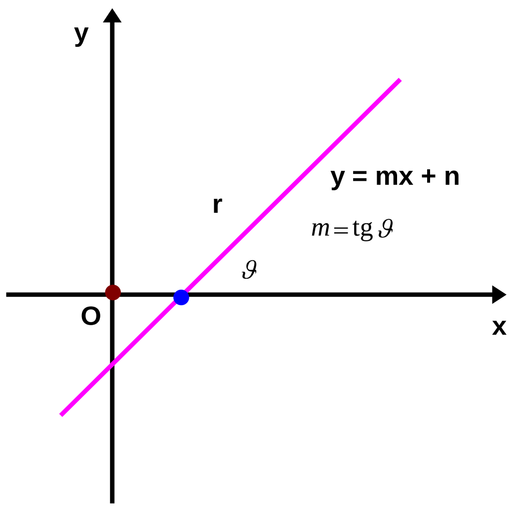
Il numero reale relativo **n** dicesi ordinata all'origine perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y , mentre **m** dicesi, come già sappiamo, **coefficiente angolare** o rapporto direttivo della retta.

ϑ è l'angolo che la direzione positiva dell'asse delle ascisse forma con la retta r.

Se l'angolo ϑ è acuto, m è positivo.

Se l'angolo ϑ è ottuso, m è negativo.

$\vartheta = 0 \Rightarrow r // x$ $\quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \perp x$



L'equazione [8] non si presta a rappresentare rette parallele all'asse delle y in quanto **m** perde di significato .

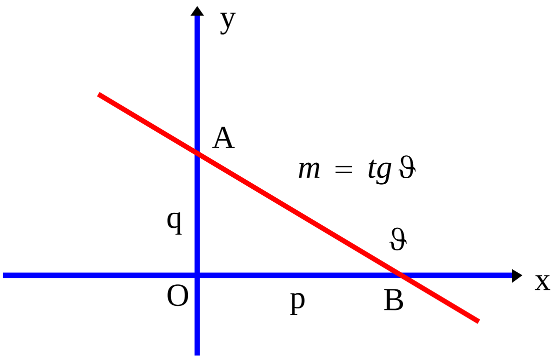
$4x + 3y - 12 = 0$ equazione generale della retta, $y = -\frac{4}{3}x + 4$ *equazione canonica della retta* , $m = -\frac{4}{3}$ = **coefficiente angolare** della retta, $n = 4$ = *ordinata all'origine*

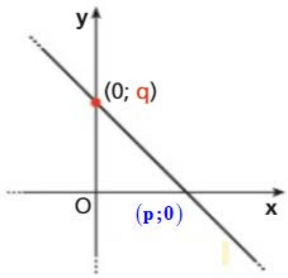
Equazione segmentaria della retta

Dall'equazione generale della retta ricaviamo: $ax + by = -c$, $\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$

$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$ Se poniamo: $p = -\frac{c}{a}$, $q = -\frac{c}{b}$ otteniamo: $\mathbf{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ **[9]**

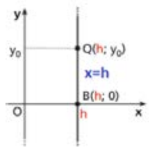
che rappresenta l'equazione segmentaria della retta. I numeri reali relativi **p** e **q** sogliono chiamarsi le **intercette** (della retta sugli assi cartesiani) in quanto il primo rappresenta l'ascissa del punto in cui la retta incontra l'asse x, il secondo l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y.



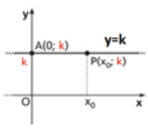


L'*equazione segmentaria* della retta $7x + 3y - 21 = 0$ è: $\mathbf{\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1}$

Equazioni di rette aventi una posizione particolare rispetto agli assi cartesiani

x = h retta parallela all'asse delle y ; 

Essa si ricava ponendo: $b = 0$, $\mathbf{h = -\frac{c}{a}}$. Risulta: $m = \infty$

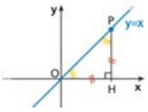
y = k retta parallela all'asse delle ascisse 

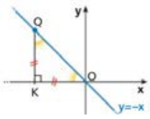
Essa si ricava ponendo: $a = 0$, $k = -\frac{c}{b}$.

Risulta: $m = 0$

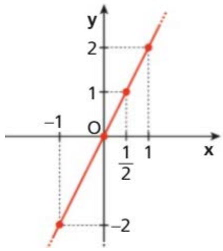
x = 0 è l'equazione dell'asse delle ordinate . Si ottiene per: $b = c = 0$, $a = 1$, $m = \infty$

y = 0 è l'equazione dell'asse delle ascisse . Si ottiene per: $a = c = 0$, $b = 1$, $m = 0$

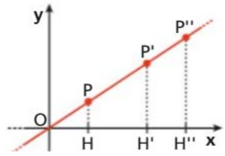
y=x equazione della bisettrice del I e III quadrante (**bisettrice fondamentale** degli assi cartesiani) 

y=-x equazione della bisettrice del II e IV quadrante (**bisettrice secondaria** degli assi cartesiani) 

ax+by=0 oppure **y=mx** equazione di una generica retta passante per l'origine degli assi



y=2x



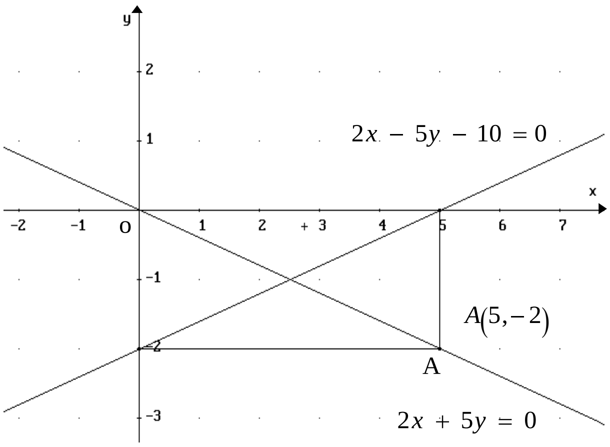
Rappresentazione grafica della retta

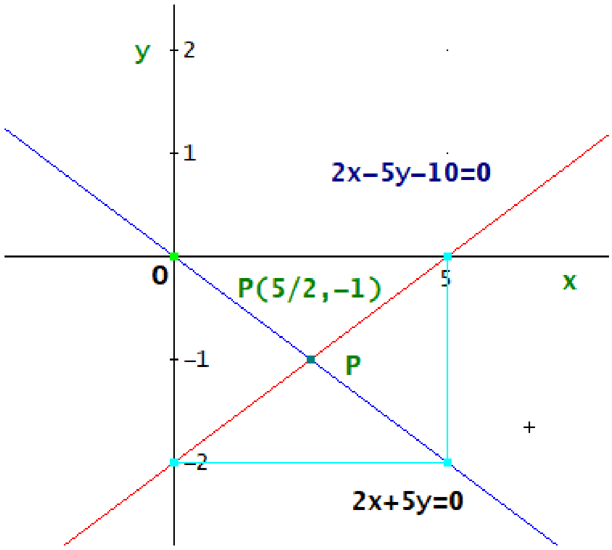
Vediamo come è possibile disegnare una retta quando conosciamo la sua equazione. Se la retta è obliqua basta trovare le coordinate dei punti d'intersezione con gli assi cartesiani. Se passa per l'origine degli assi , basta trovare un sua qualsiasi altro punto distinto dall'origine; preferibilmente quello che ha come coordinate numeri interi .

A volte è conveniente scrivere l'equazione sotto forma segmentaria e poi disegnarla utilizzando l'interpretazione geometrica dei simboli p e q . Se vogliamo disegnare la retta di equazione $2x - 5y - 10 = 0$ basta scriverla in forma segmentaria, cioè: $\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$

essendo: $p = 5$, $q = -2$.

Se invece vogliamo disegnare la retta $\boxed{2x + 5y = 0}$ bisogna calcolare le coordinate di un suo punto, ad esempio $A(5,-2)$. Infatti ponendo nell'equazione della retta $x = 5$ si ricava $y = -2$. Adesso la retta può essere disegnata in quanto conosciamo le coordinate di due suoi punti.





Il punto comune a due rette

Per calcolare le coordinate del punto $P(x,y)$ comune alle rette r ed s aventi, rispettivamente, equazioni: r: $ax + by + c = 0$ s: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{[10]}$$

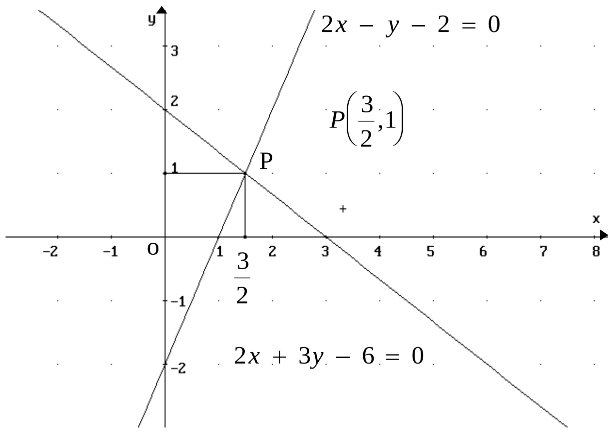
Applicando il teorema di Cramer otteniamo:

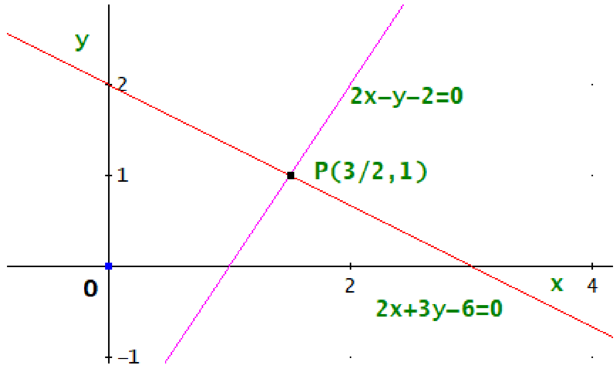
$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a_1 & -c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b} \qquad \textbf{[11]}$$

Quindi l'intersezione delle due rette è il punto $\boxed{P\left(\frac{bc_1 - b_1c}{ab_1 - a_1b}, \frac{a_1c - ac_1}{ab_1 - a_1b}\right)}$

Se vogliamo calcolare le coordinate del punto comune alle rette di equazioni $2x + 3y - 6 = 0$ e $2x - y - 2 = 0$, dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 2x = y + 2 \end{cases}$

$6 - 3y = y + 2$ $\qquad x = \frac{3}{2}$ $\quad y = 1$ $\qquad P\left(\frac{3}{2},1\right)$





$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+1 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+1 \\ 2x-x-1-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=x+1 \\ x=3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases}$ $C(3;4)$

Discutiamo le soluzioni [11] del sistema [10] .

1° caso: $\boxed{ab_1 - a_1 b \neq 0}$ cioè: $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ cioè i coefficienti omonimi delle variabili x ed y non sono proporzionali. Sotto queste ipotesi, le rette r ed s sono incidenti. Viceversa , se le rette r ed s sono incidenti , allora i coefficienti omonimi delle variabili x ed y non sono proporzionali.

2° caso: $\boxed{ab_1 - a_1 b = 0}$ cioè: $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \neq \frac{c_1}{c}$ cioè i coefficienti omonimi delle variabili x ed y sono proporzionali. Ponendo: $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, il sistema da risolvere diventa:

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ kax + kby = -c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = -c \\ ax + by = -\frac{c_1}{k} \end{cases}$$

Essendo $\frac{c_1}{k} \neq c$ il sistema non ammette soluzioni, cioè non esiste alcuna coppia di numeri (x,y) che verifica simultaneamente le due equazioni del sistema [10] . In questo caso le due rette sono parallele e distinte. Viceversa se le rette r ed s sono parallele e distinte allora i coefficienti omonimi delle variabili x ed y sono proporzionali, cioè le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare.

$r // s \Rightarrow a_1 = ka$, $b_1 = kb$ con $k \in R$.

Ponendo $k = 1$ otteniamo: $a_1 = a$, $b_1 = b$ ed anche: $m_1 = m$

Risultano fra loro parallele le rette aventi equazioni generali:

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad ax + by + h = 0$$

ed anche le rette aventi equazioni in forma canonica $y = mx + n$, $y = mx + h$

Possiamo utilizzare queste conclusioni per scrivere l'equazione della retta s passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ e parallela alla retta r di equazione $ax + by + c = 0$.

Una generica retta parallela ad r ha equazione : $ax + by + h = 0$ ($y = mx + h$)

$P_1 \in s \quad \Rightarrow \quad ax_1 + by_1 + h = 0 \quad (y_1 = mx_1 + h) \quad , \quad h = -ax_1 - by_1 \quad (h = -mx_1 - y_1)$

Quindi l'equazione della retta **s** passante per il punto $P_1(x_1, y_1)$ assume una delle due seguenti forme :

$\mathbf{a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0} \qquad \mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$ **[12]**

3° caso: $\boxed{\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k}$ $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$ con $k \in R$.

Il sistema [10] assume la forma: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ kax + kby + kc = 0 \end{cases}$

Le equazioni di questo sistema sono equivalenti e quindi rappresentano la stessa retta.

Riassumendo possiamo affermare quanto segue:

Date le rette r ed s aventi rispettivamente equazioni:

r: $ax + by + c = 0$ s: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ si ha:

r ed s incidenti $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$
r ed s coincidenti $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$ cioè : $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$
r ed s parallele e distinte $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k \neq \frac{c_1}{c}$ cioè $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 \neq kc$

La risoluzione dell'inequazione a due incognite $\mathbf{ax+by+c>0}$ o $\mathbf{ax+by+c<0}$

Analizziamo alcuni tipi di inequazioni a due incognite.

3) Inequazioni del tipo: $\mathbf{F(x,y)=ax+by+c>0}$ oppure $\mathbf{F(x,y)=ax+by+c<0}$ [4

Primo metodo

1) Si disegna la retta γ di equazione $ax+by+c=0$

2) $b>0$ i punti del semipiano S_1 che contiene la direzione positiva dell'asse delle y (la freccia di y) sono soluzioni della disequazione $ax+by+c>0$ i punti dell'altro semipiano S_2 sono soluzioni della disequazione $ax+by+c<0$.

$b<0$ i punti di S_1 (S_2) sono soluzioni della disequazione $ax+by+c<0$ ($ax+by+c>0$).

Secondo metodo

Si sostituiscono nel polinomio $F(x,y)=ax+by+c$ le coordinate di un particolare [ad esempio $O(0,0)$ oppure $A(1;0)$ etc...] punto del piano cartesiano.

Supponiamo che sia $P_1(x_1;y_1)\in S_1$. Se risulta $F(x_1;y_1)>0$ [$F(x_1;y_1)<0$] i punti di S_1 sono le soluzioni dell'inequazione $ax+by+c>0$ ($ax+by+c<0$) e quelli di S_2 sono le soluzioni dell'inequazione $ax+by+c<0$ ($ax+by+c>0$).

$F(x;y)=3x+5y+15<0$

$\forall P(x;y)\in S_2$

essendo $F(0;0)=15>0$