

## **Unità Didattica N°2**

### **La cinematica del punto materiale**

- 01) La meccanica e le sue parti
- 02) Moto e quiete di un corpo; sistemi di riferimento
- 03) Punto materiale, traiettoria, ascissa curvilinea, equazione oraria del moto
- 04) Velocità scalare media ed istantanea
- 05) Moti progressivi e moti retrogradi
- 06) Accelerazione scalare media ed istantanea
- 07) Moti accelerati e moti ritardati
- 08) Moto uniforme su traiettoria prestabilita
- 09) Moto uniformemente vario su traiettoria prestabilita

## La meccanica e le sue parti

La **Meccanica** è quella parte della fisica che studia il movimento dei corpi. Suo scopo principale è quello di descrivere in maniera univoca e nella forma più semplice possibile tutti i movimenti che si osservano in natura. La **Meccanica classica** o **galileiana** o *newtoniana* comprende i casi in cui la velocità del corpo in esame è piccola rispetto a quella della luce (che è dell'ordine di  $300000\frac{km}{s}$ ) ad esempio inferiore a  $30000\frac{km}{s}$ . Per velocità maggiori è necessario ricorrere alla **meccanica relativistica** elaborata da Einstein. Si parla di **Meccanica del punto materiale** se le dimensioni lineari del corpo in moto sono trascurabili rispetto alle dimensioni lineari dell'ambiente in cui si verifica il fenomeno, in caso contrario si parla di **Meccanica del corpo rigido**.

E' tradizione consolidata dividere la meccanica in **cinematica**, *dinamica*, **statica**. La **cinematica** (detta anche *geometria del moto*) studia il movimento dei corpi nel tempo e nello spazio indipendentemente dalle cause che lo determinano. Le grandezze fisiche che intervengono in cinematica sono la **posizione**, lo *spazio percorso* (inteso come arco di traiettoria), il **tempo**, la **VELOCITA'**, l'**accelerazione**.

La **dinamica** studia il movimento dei corpi in relazione alle cause che lo determinano o comunque lo modificano. In dinamica si introducono i concetti di **massa** (grandezza primitiva) **forza** (grandezza derivata), **lavoro**, **energia**,...

**La statica** studia le condizioni perché un corpo, soggetto all'azione di due o più forze, si trovi in equilibrio. La statica può essere considerata un capitolo particolare della dinamica.

## Moto e quiete di un corpo

Le nozioni di moto e di quiete sono concetti relativi e di difficile comprensione concettuale. Un corpo P si dice in movimento (in quiete) rispetto ad un altro corpo O quando, al trascorrere del tempo, varia (non varia) la posizione di P rispetto ad O. Non ha significato parlare di moto o di quiete se non si specifica l'ente di riferimento. Pertanto per stabilire se un corpo è in moto occorre precisare innanzitutto *rispetto a che cosa* noi intendiamo riferire l'eventuale moto. Il **sistema di riferimento** è costituito da un oggetto (considerato per il momento arbitrariamente immobile) o più oggetti le cui reciproche distanze possano ritenersi immobili nel tempo. Vedremo in seguito che non tutti i S.R. sono fra loro equivalenti, ma ne esistono di due tipi e precisamente: i **sistemi di riferimento inerziali** ed i **sistemi di riferimenti accelerati**. Generalmente se il moto avviene lungo una linea (che può essere una retta o una curva qualsiasi del piano o dello spazio) il S.R. può essere identificato con un punto fisso appartenente a tale linea. In quel punto immaginiamo la presenza di una persona, chiamata **osservatore**, che segue con lo sguardo ciò che accade al corpo in movimento. Se il moto avviene in un piano, il S.R. generalmente è costituito da due rette perpendicolari orientate nel cui punto d'incontro si colloca l'osservatore. Se il moto avviene nello spazio il S.R. generalmente è costituito da tre rette orientate, ciascuna perpendicolare al piano individuato dalle altre due. L'osservatore è posto nel loro punto d'incontro. Un particolare S.R. ,ritenuto con buona approssimazione inerziale, è quello delle **stelle fisse**. Le rette che idealizzano gli assi cartesiani del sistema di riferimento sono linee che congiungono idealmente il centro del sole con alcune stelle di "posizione privilegiata" (come ad esempio la stella polare). Noi inizialmente rivolgeremo la

nostra attenzione al **moto di un punto materiale su traiettoria prestabilita**.

Punto materiale, Traiettoria, Ascissa curvilinea, Legge oraria del moto

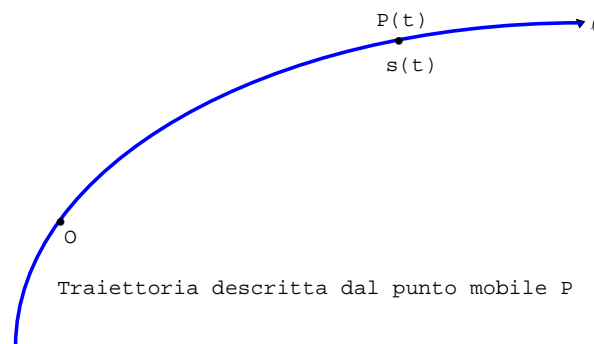
**Punto materiale** è un qualsiasi corpo le cui dimensioni geometriche sono trascurabili rispetto alle dimensioni geometriche dello spazio in cui il moto si svolge. Dunque punto materiale (o corpo puntiforme o particella elementare) è un oggetto piccolissimo in relazione alle distanze che percorre. Così per un astronomo sono spesso punti i pianeti nelle loro rivoluzioni attorno al Sole. Chiamiamo **Posizione** di un punto materiale il punto geometrico da esso occupato ad un certo istante. Matematicamente un **Punto materiale** viene concepito come un oggetto privo di dimensioni a cui non possiamo associare né moti rotazionali né moti vibrazionali ma a cui associamo una **massa  $m$** . Spesso si parla di **mobile** intendendo con ciò un punto materiale di massa  **$m$**  in movimento. Il punto materiale P durante il suo moto descrive una linea  $\ell$  detta **Traiettoria** del moto. Essa può essere rettilinea o curvilinea ed il moto dicesi **rettilineo** o **curvilineo**. Inizialmente affronteremo lo studio della **cinematica del punto materiale** supponendo di conoscere la traiettoria, cioè supporremo che il mobile percorra una traiettoria prestabilita, sulla quale introduciamo un sistema di ascisse curvilinee. Si dice che su una traiettoria prestabilita  $\ell$  percorsa dal punto materiale P si è introdotto un **sistema di ascisse curvilinee** quando, fissato un punto O di riferimento (origine) sulla traiettoria, si stabilisce su di essa un verso positivo di percorrenza e si associa ad ogni punto di questa linea un numero  $s$  che esprime, nell'unità di misura fissata, la lunghezza dell'arco di traiettoria compreso fra quel punto e l'origine. Tale numero

sarà positivo se il punto P segue l'origine O nel verso positivo di percorrenza, negativo se lo precede.

(N.B. Il verso positivo arbitrariamente scelto sulla traiettoria  $\ell$  può coincidere oppure no col verso reale del moto del punto materiale P). La **posizione** del punto P sulla traiettoria  $\ell$  varia al variare di  $t$ . Si dice che la posizione del punto P è funzione del tempo e si scrive  $P(t)$ .  $P(t)$  = posizione occupata dal punto P all'istante  $t$ . Poiché ad ogni valore del tempo corrisponde un ben determinato valore dell'ascissa curvilinea  $s$ , diciamo che  $s$  è funzione del tempo e scriviamo:  $s=s(t)$  [1]

L'equazione [1], che mi dice come varia l'ascissa curvilinea  $s$  al variare del tempo dicesi **Equazione oraria del moto** o **legge oraria del moto**. La **legge oraria** (o equazione) **del moto** esprime la relazione che intercorre tra l'ascissa curvilinea  $s$  (che individua la posizione del punto materiale al tempo  $t$ ) ed il tempo  $t$ . Ad esempio  $s = 2t^2 - 3t + 5$  rappresenta la legge oraria di un moto uniformemente vario. Se riferiamo il piano ad un sistema di assi cartesiani e riportiamo in ascissa il tempo ed in ordinata l'ascissa curvilinea  $s$ , allora l'equazione  $s=s(t)$  rappresenta una curva detta **diagramma orario** o curva oraria. Tale curva, dal punto di vista geometrico, non ha nulla a che vedere con la traiettoria  $\ell$  descritta dal mobile.

L'ascissa curvilinea  $S$  rappresenta anche lo **spazio percorso** nel tempo  $t$  solo se la posizione iniziale del mobile coincide col riferimento O scelto sulla traiettoria  $\ell$ .



## Velocità scalare media ed istantanea

La traiettoria del punto materiale P sia una curva piana  $\ell$  sulla quale fissiamo, in maniera conveniente ma arbitraria, una origine O, un verso positivo ed una unità di misura per le lunghezze. Per individuare il moto del punto P sulla traiettoria prestabilita  $\ell$  basta conoscere come varia l'ascissa curvilinea  $s$  del punto P al variare del tempo, cioè basta conoscere la funzione  $s(t)$ .

L'equazione  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$  [1] fissa la **legge oraria del moto** che dicesi anche **equazione oraria del moto**. L'istante  $t_o = 0$  dicesi **istante iniziale** del moto perché fisicamente è l'istante in cui si comincia ad osservare il moto. Per  $t < 0$  la [1] permette di calcolare le posizioni occupate dal punto P prima che se ne iniziasse l'osservazione, supposto che il punto materiale P obbedisse alla stessa legge del moto anche prima dell'istante iniziale.

Per  $t_o = 0$  la [1] dà un valore speciale  $s_o = s(0)$  di  $s$ . Questo speciale valore  $s_o$  individua una speciale posizione  $P_o$  di P (**posizione iniziale**) che solo in particolari casi è coincidente con O. Se poi risulta anche  $P_o \equiv O$ , allora l'arco di curva  $\widehat{P_o P} = \widehat{OP}$  misurato da  $s = s(t)$ , rappresenta lo spazio  $s$  percorso dal punto P nel tempo  $t$ . Se invece risulta  $P_o \neq O$  lo spazio percorso nel tempo  $t$  è:  $\widehat{P_o P} = s(t) - s_o$ . La legge del moto  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$  dà lo spazio percorso dal mobile solo nel caso particolare che l'origine O coincida con la posizione iniziale del mobile e che sia costante il verso del movimento. (Non bisogna confondere il verso della traiettoria  $\ell$  col verso reale del moto. Essi possono coincidere oppure no).

In un riferimento cartesiano riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi  $t$  in una scala opportuna e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori di  $s$  in una scala opportuna. La legge oraria del moto  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$  rappresenta l'equazione cartesiana di una curva  $\gamma$

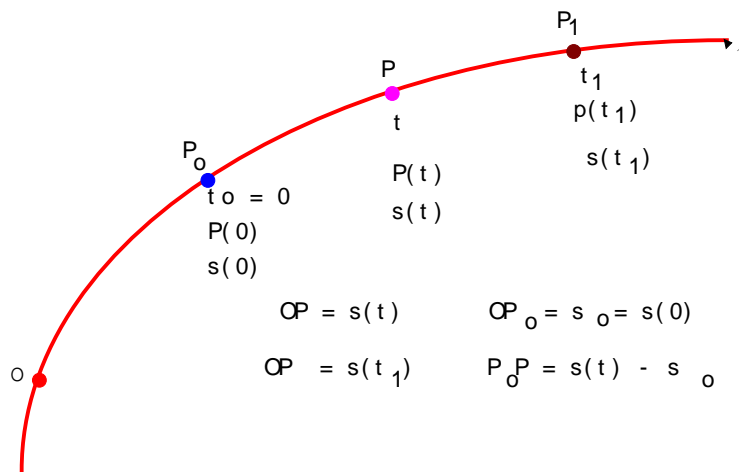
che dicesi **diagramma orario** del moto descritto dal punto P. (In generale risulta  $\gamma \neq \ell$ ). Siano  $P(t)$  e  $P(t_1)$  le posizioni del mobile occupate rispettivamente agli istanti  $t$  e  $t_1$  ( $> t$ ).  **$PP_1 = \Delta s = s(t_1) - s(t) = s_1 - s$**  è lo spazio percorso dal mobile nell'intervallo di tempo  $\Delta t = t_1 - t$ .

Definiamo **velocità scalare media** del punto materiale P relativa all'intervallo di tempo  $\Delta t$  o relativa al tratto di curva  $PP_1$  il seguente rapporto tra lo spazio percorso

$\Delta s$  ed il tempo impiegato a percorrerlo  $\Delta t$ : 
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} \quad [2]$$

Riferendosi al diagramma orario  $\gamma$  del moto possiamo dire che la velocità scalare media  $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = tg \vartheta_1$  rappresenta il coefficiente angolare della retta  $PP_1$  soltanto se l'unità di lunghezza (per noi il metro) sull'asse delle ordinate e l'unità di tempo (per noi il secondo) sull'asse delle ascisse sono rappresentati da segmenti uguali. Ciò in pratica non avviene mai per cui  $tg \vartheta_1$  non dà una misura di  $v_m$  ma è soltanto proporzionale a  $v_m$ . <<**La velocità scalare media  $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  rappresenta la**

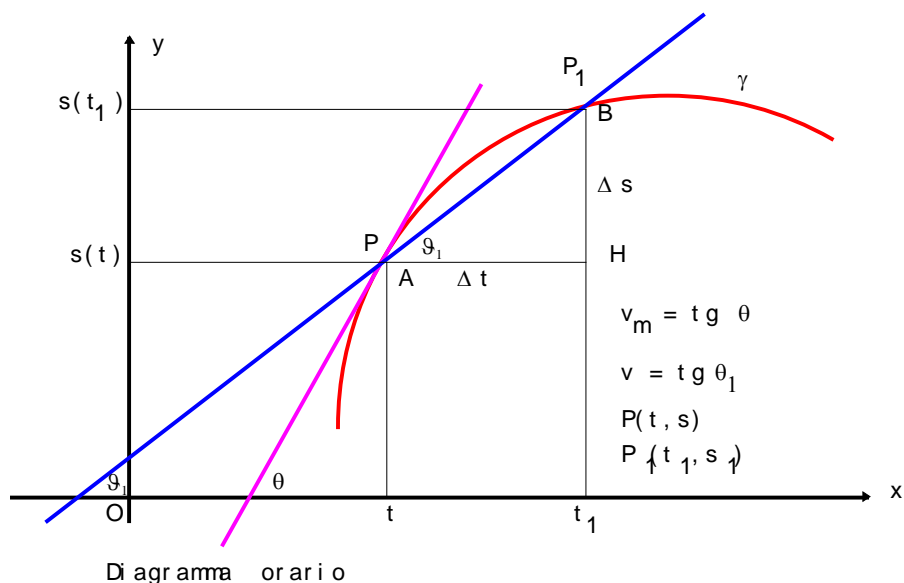
**velocità costante di un mobile fittizio Q che, muovendosi con velocità costante  $v_m$ , percorre nello stesso tempo  $\Delta t$  lo stesso spazio  $\Delta s$  percorso da P>>>.**



Se poi calcoliamo le velocità medie relative ad intervalli di tempo  $\Delta t$  sempre più piccoli otteniamo valori della velocità sempre più prossimi al valore della velocità del punto P all'istante t. Quindi possiamo immaginare un intervallo di tempo tanto piccolo che ogni sua ulteriore riduzione non alteri la velocità media. Questa velocità media limite è chiamata **velocità scalare istantanea** e viene indicata col simbolo  $v(t)$ .

$v(t)$  = velocità scalare media relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo (teoricamente infinitesimo). In termini matematici possiamo scrivere:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$



Qualitativamente la velocità può dirsi lo spazio riferito al tempo impiegato a percorrerlo. Ma quando  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $t_1 \rightarrow t$ ) il punto  $P_1 \rightarrow P$  sicché, al limite la secante  $PP_1$  diventa la tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $P$ . Pertanto la velocità del mobile all'istante  $t$  (**velocità scalare istantanea**) è uguale al coefficiente angolare ( $t g \theta$ ) della retta tangente nel punto  $P$  alla curva  $\gamma$  diagramma orario del moto.

Esempio: <<Calcolare la velocità scalare istantanea di un punto mobile la cui legge oraria è

$$s(t) = 3t^2 - 5t + 2 \quad \gg$$



$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{3t_1^2 - 5t_1 + 2 - 3t^2 + 5t - 2}{t_1 - t} =$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{3(t_1 - t)(t_1 + t) - 5(t_1 - t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} (3t_1 + 3t - 5) = 3t + 3t - 5 = 6t - 5$$

$$v(t) = 6t - 5$$

La grandezza fisica velocità è derivata dalle grandezze fondamentali lunghezza e tempo.

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{[L]}{[T]} = [L \cdot T^{-1}] \quad \{v\} = \frac{\{s\}}{\{t\}} = \frac{m}{s}$$

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 0,278 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5}{18} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{18}{5} \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

*Un punto si muove con velocità unitaria se percorre un arco di curva lungo un metro in ogni secondo*

**OSSERVAZIONE** La velocità definita in questo paragrafo è detta anche **velocità lineare** e rappresenta solo un aspetto della **velocità vettoriale**.

### Moti progressivi e retrogradi

Supponiamo che un punto materiale P descriva la traiettoria  $\ell$ , sulla quale fissiamo convenzionalmente un verso positivo di percorrenza.

**Velocità positiva** significa che il punto P si muove nel verso positivo fissato su  $\ell$ .

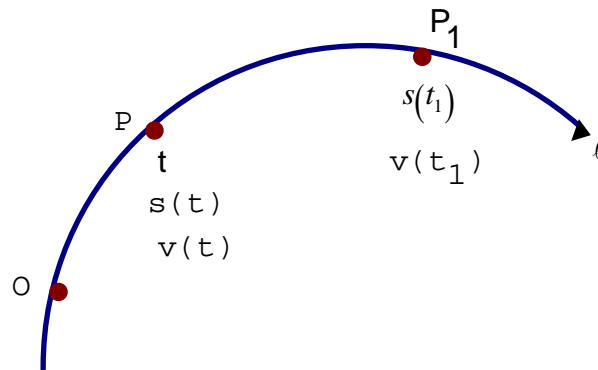
In questo caso il moto dicesi **progressivo**.

$v > 0$  significa che il punto materiale P si muove nel verso positivo fissato sulla traiettoria  $\ell$ ; il moto viene detto **progressivo**.

$v < 0$  significa che P si muove in verso opposto a quello fissato sulla traiettoria  $\ell$ ; il moto viene detto **retrogrado**.

**Velocità scalare positiva** (negativa) significa che il punto materiale P si muove realmente nello **stesso verso** (**in verso opposto**) di (a) quello fissato convenzionalmente sulla traiettoria  $\ell$  descritta da P.

### Accelerazione scalare media ed istantanea



Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la velocità scalare è una funzione del tempo  $t$ , cioè  $v = v(t)$ . Accanto a questa funzione che, istante per istante misura la variazione di posizione del mobile rispetto al tempo, ha importanza fondamentale in meccanica un'altra funzione del tempo che misura, sempre rispetto al tempo, la variazione della velocità scalare. Se al tempo  $t$  la velocità di P è  $v(t)$  ed al tempo  $t_1$  ( $> t$ ) è  $v(t_1)$ , definiamo **accelerazione scalare media** relativa all'intervallo di

tempo  $\Delta t = t_1 - t$  il seguente rapporto:  $\bar{a} = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t}$

L'accelerazione scalare media relativa ad un intervallo di tempo  $\Delta t$  piccolissimo (teoricamente infinitesimo) dicesi **accelerazione scalare istantanea**. In

simboli abbiamo:  $a = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{v(t_1) - v(t)}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = s''(t)$

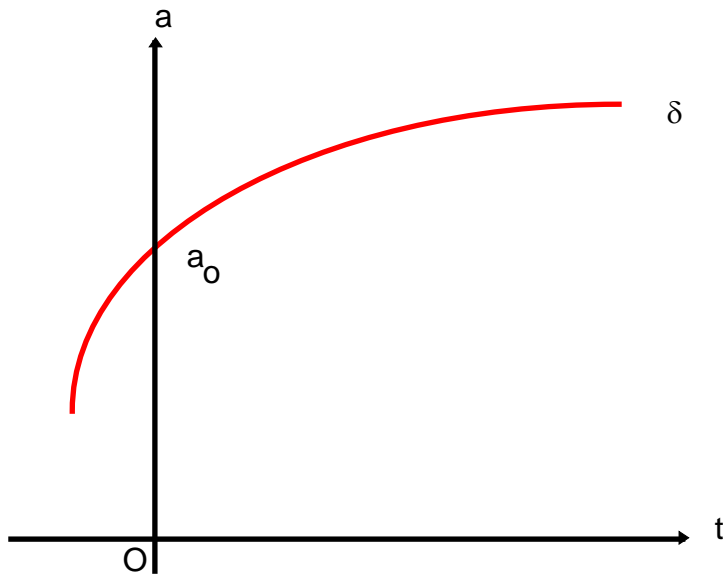


Diagramma delle accelerazioni

Anche l'accelerazione scalare istantanea è, in generale, funzione del tempo, cioè  $a = a(t)$ . Se riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi  $t$  e sull'asse delle ordinate le accelerazioni  $a$  la curva  $\delta$ , immagine geometrica dell'equazione  $a = a(t)$  è detta **diagramma delle accelerazioni**.

Qualitativamente l'accelerazione esprime la rapidità di variazione della velocità rispetto al tempo.

L'accelerazione è una grandezza derivata.

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[L \cdot T^{-1}]}{[T]} = [L \cdot T^{-2}] \quad \{a\} = \frac{\{v\}}{\{t\}} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Quindi nel S.I. l'unità di misura dell'accelerazione è il <<**metro al secondo quadrato**>> e corrisponde all'accelerazione di un punto materiale la cui velocità varia uniformemente di  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  in ogni secondo. L'accelerazione scalare, al pari della velocità scalare, può essere tanto positiva quanto negativa.

$$s(t) = 3t^2 - 5t + 2 \quad v(t) = 6t - 5$$

$$a = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{6t_1 - 5 - 6t + 5}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{6(t_1 - t)}{(t_1 - t)} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

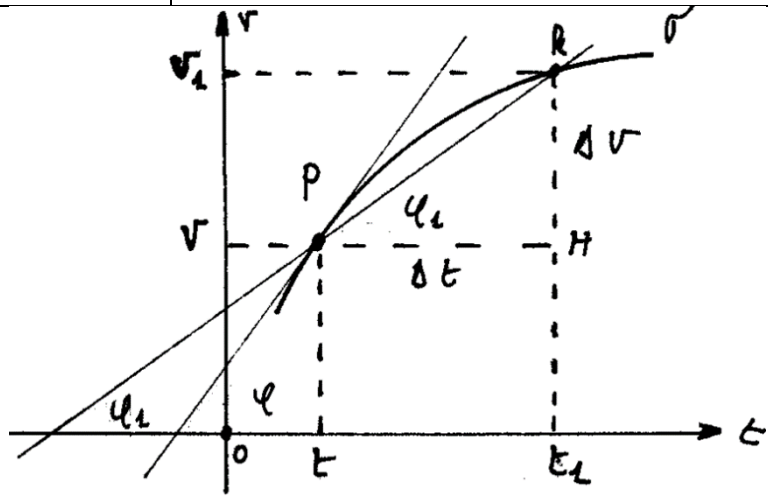
**Accelerazione scalare positiva** significa: *moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che aumenta*

**Accelerazione scalare negativa** significa: *moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che diminuisce*.

Velocità iniziale $v_i$	Velocità finale $v_f$	Accelerazione $a$
$10 \frac{m}{s}$	$20 \frac{m}{s}$	$a > 0$ <b>moto progressivo con velocità scalare che aumenta</b>
$-20 \frac{m}{s}$	$-10 \frac{m}{s}$	$a > 0$ <b>moto retrogrado con velocità scalare che aumenta</b>
$20 \frac{m}{s}$	$10 \frac{m}{s}$	$a < 0$ <b>moto progressivo con velocità scalare che diminuisce</b>
$-10 \frac{m}{s}$	$-20 \frac{m}{s}$	$a < 0$ <b>moto retrogrado con velocità scalare che diminuisce</b>

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \operatorname{tg} \varphi_1 \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \operatorname{tg} \varphi =$$

coefficiente angolare della retta tangente al diagramma della velocità



### Moti accelerati e ritardati

Un moto si dice **accelerato (ritardato)** quando l'accelerazione scalare e la velocità scalare hanno segni concordi (discordi)

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot v > 0 \\ \cdot \quad + \quad + \\ \cdot \quad - \quad - \end{array} \right\} \Rightarrow \text{moto accelerato} \quad \left. \begin{array}{l} a \cdot v < 0 \\ \cdot \quad + \quad - \\ \cdot \quad - \quad + \end{array} \right\} \Rightarrow \text{moto decelerato}$$

Fisicamente parlando, moto accelerato significa:

- 1) moto progressivo ( $v > 0$ ) con velocità scalare che aumenta ( $a > 0$ ) oppure:
- 2) moto retrogrado ( $v < 0$ ) con velocità scalare che diminuisce in valore relativo ma aumenta in valore assoluto ( $a < 0$ )

Moto accelerato significa:

- 1) moto **progressivo** ( $v > 0$ ) con velocità scalare che aumenta ( $a > 0$ ) oppure
- 2) moto **retrogrado** ( $v < 0$ ) con velocità scalare che aumenta in valore relativo ma

diminuisce in valore assoluto  $[v(t_1) = -5 \frac{m}{s} \quad v(t) = -8 \frac{m}{s}]$

Sinteticamente possiamo affermare quanto segue:

**Moto accelerato** (**decelerato**) è un moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che aumenta (diminuisce) in valore assoluto.

Se risulta  $v(t) = 0$  allora esiste un istante  $t^*$  detto (istante di arresto) in cui il mobile si ferma. Ad esso corrisponde sulla traiettoria  $l$  una posizione di arresto. Nel moto accelerato (decelerato) non esiste (esiste) un istante di arresto.

**Osservazione:** **Moto decelerato significa che, se permangono le cause che hanno determinato il moto, il mobile è destinato a fermarsi. Sotto queste ipotesi, dopo l'istante di arresto, il moto diventa accelerato.**

### Moto uniforme su traiettoria prestabilita

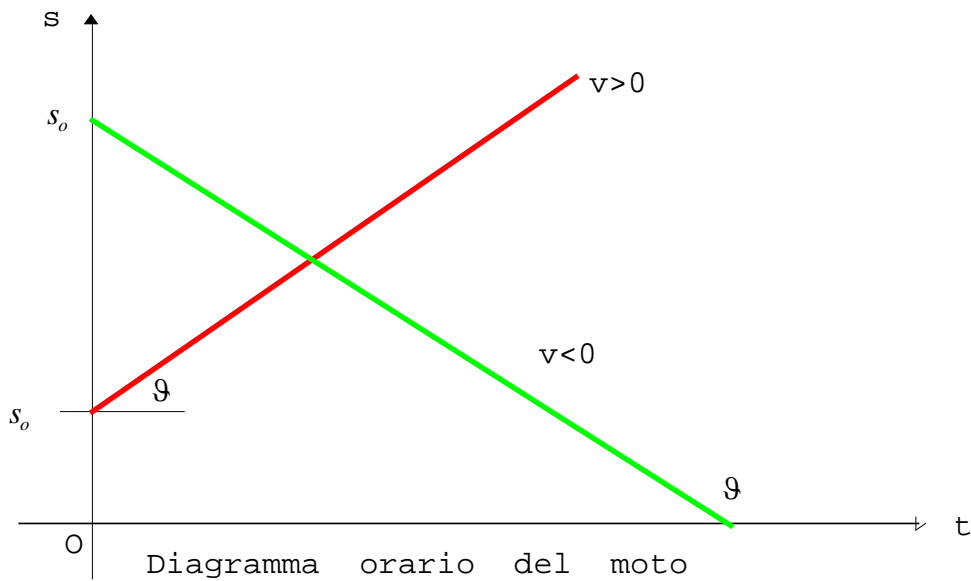
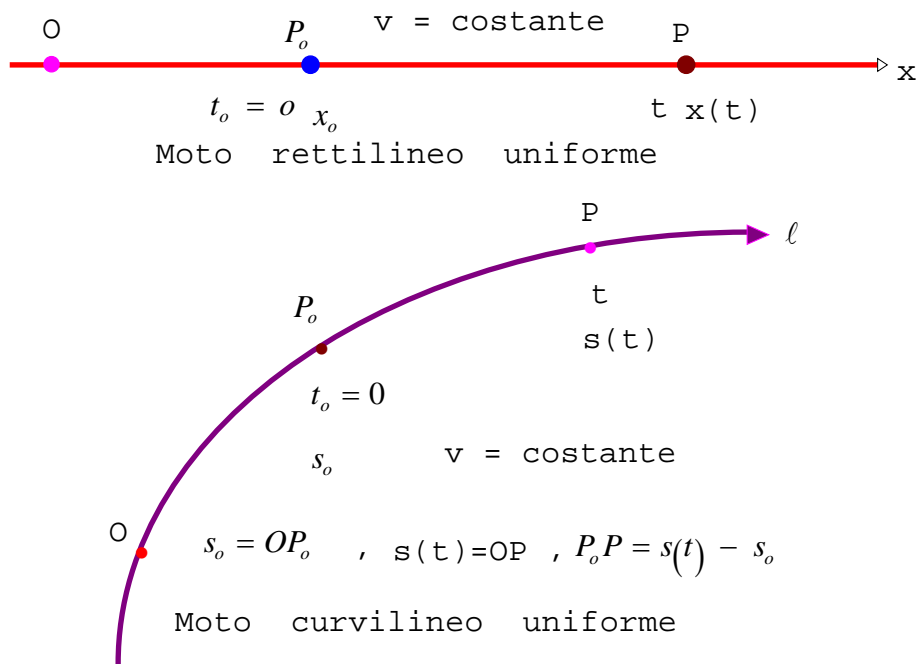
È il moto di un punto che percorre una traiettoria prestabilita con **velocità scalare costante**. In questo caso la *« velocità scalare istantanea coincide con quella media »*. Se la traiettoria  $l$  è una curva qualsiasi il moto dicesi **curvilineo uniforme**, se è una retta (in questo caso diviene un asse cartesiano  $x$ ) il moto dicesi **rettilineo uniforme**.

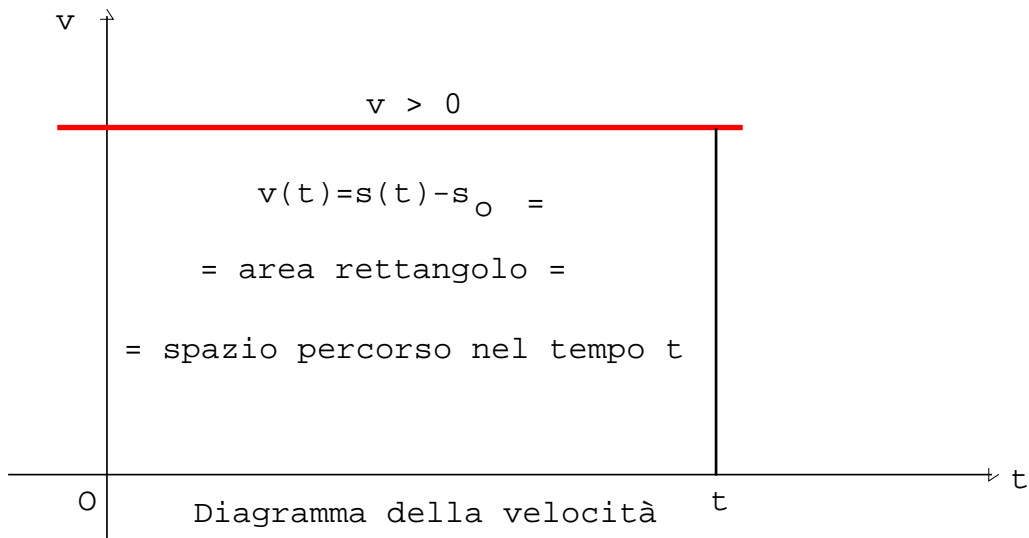
accelerazione scalare nulla  $\Rightarrow: a = 0 \quad v = \frac{s(t) - s_0}{t}$

**$s(t) = s_0 + vt$**  **legge oraria del moto**  $v = \frac{x(t) - x_0}{t} \quad x(t) = x_0 + vt$

$s_0$  (oppure  $x_0$ ) è la *posizione iniziale* del moto.

Data la traiettoria  $\ell$  e la velocità  $v$  di un moto uniforme, il moto stesso non è ancora completamente individuato; occorre conoscere anche la **posizione iniziale**  $s_o$  ( $x_o$ ) del mobile.





**Osservazione N°1:**  $v = tg \vartheta$  se l'unità di misura per le lunghezze (il metro) e per il tempo (il secondo) sono rappresentati da segmenti uguali, altrimenti ne differisce per una costante di proporzionalità.

**Osservazione N°2:** Il moto rettilineo uniforme è fondamentale in fisica perché è il moto di un punto materiale al quale non è applicata nessuna forza, è il **moto per inerzia**.

### Moto uniformemente vario su traiettoria prestabilita

E' il moto di un punto materiale che descrive una traiettoria prestabilita  $\ell$  con accelerazione scalare costante. Se  $\ell$  è una retta il moto dicesi **rettilineo uniformemente vario**, in caso contrario dicesi **moto curvilineo uniformemente vario**. In un moto uniformemente vario l'accelerazione scalare istantanea coincide con quella media , per cui possiamo scrivere:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0}{t} \quad \text{e quindi:} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

$\mathbf{v}_0$  è la **velocità iniziale**, cioè la velocità del mobile all'istante  $t=0$ .

<< **Nel moto uniformemente vario la velocità è funzione lineare del tempo**>>.

Per calcolare la legge oraria del moto occorre il calcolo differenziale che noi, allo stato attuale, non conosciamo. La **velocità scalare media** relativa all'intervallo di

tempo  $t$  vale per definizione:  $v_m = \frac{s(t) - s_o}{t}$  e quindi:  $s(t) = s_o + v_m \cdot t$  [A]

Per calcolare  $v_m$  ricorriamo al seguente **teorema** che si dimostra in analisi matematica: <<Se una grandezza è funzione lineare del tempo, allora il suo valore medio relativo all'intervallo di tempo  $t_2 - t_1$  è uguale alla media aritmetica fra il suo valore all'istante  $t_1$  e quello all'istante  $t_2$ >>.

Nel caso nostro abbiamo  $t_1 = 0$  è  $[v(t_1) = v_o]$  e  $t_2 = t$   $[v(t_2) = v(t)]$  e quindi

possiamo scrivere: 
$$v_m = \frac{v_o + v(t)}{2} = \frac{v_o + v_o + at}{2} = v_o + \frac{1}{2}at$$

Sostituendo nella [A] otteniamo: 
$$s(t) = s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

che esprime la << **legge oraria del moto uniformemente vario** >>

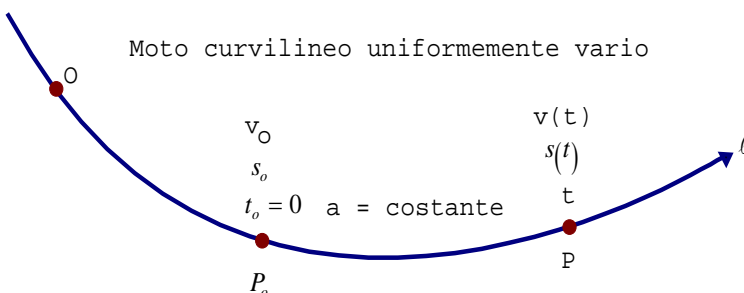
Se  $P_o \equiv O$  abbiamo: 
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t$$

Se  $P_o \equiv O$  e  $v_o = 0$  abbiamo: 
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2$$

$s(t) - s_o = \frac{1}{2}at^2 + v_o t$  = spazio percorso dal mobile nel tempo  $t$  o meglio in  $t$  secondi

Data l'accelerazione  $a$  costante, il moto non è ancora completamente individuato.

Sono ancora indeterminati la **posizione iniziale**  $s_o$  e la **velocità iniziale**  $v_o$ .



Un moto uniformemente vario è completamente individuato quando conosciamo la traiettoria, l'accelerazione a costante, la velocità iniziale  $v_o$  e la posizione iniziale  $s_o$ .



E' possibile esprimere la velocità scalare in funzione dello spazio percorso.

$$\begin{cases} v(t) = v_o + at \\ s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o \end{cases} \quad t = \frac{v(t) - v_o}{a} \quad s(t) - s_o = \frac{1}{2}a \left[ \frac{v(t) - v_o}{a} \right]^2 + v_o \left[ \frac{v(t) - v_o}{a} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2(t) + v_o^2 - 2v_o \cdot v(t)}{a} + \frac{v_o \cdot v(t) - v_o^2}{a} = \frac{v^2(t) - v_o^2}{2a}$$

$$v^2(t) - v_o^2 = 2a[s(t) - s_o] \quad v(t) = \pm \sqrt{v_o^2 + 2a[s(t) - s_o]}$$

$$s_o = 0 \Rightarrow v(t) = \pm \sqrt{v_o^2 + 2a \times s(t)} \quad ; \quad s_o = 0, v = 0 \Rightarrow v(t) = \pm \sqrt{2a \times s(t)}$$

Si prende il segno + (-) se il moto è **progressivo** (*retrogrado*).

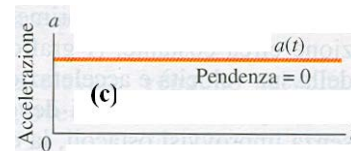
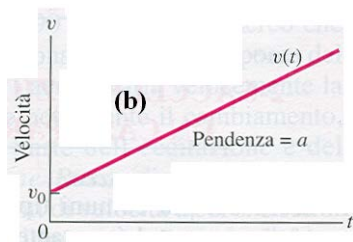
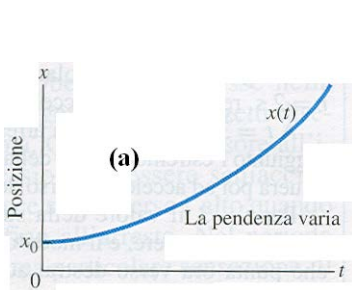


Diagramma orario del moto uniformemente vario. E' una parabola  $\gamma$ .

Il diagramma della velocità è una retta r. In ascissa riportiamo il tempo ed in ordinata la velocità scalare.  $v(t)$  coincide, in segno e modulo, col coefficiente angolare della tangente a  $\gamma$  nel punto  $P(x, t)$

Diagramma dell'accelerazione. In ascissa riportiamo il tempo ed in ordinata l'accelerazione. L'accelerazione scalare coincide, in segno e modulo, col coefficiente angolare della retta r, diagramma della velocità.

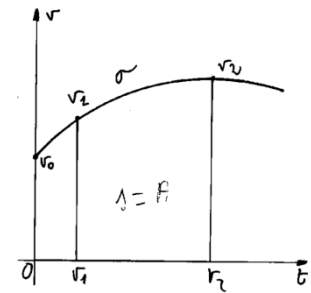
### Osservazione N°1

Se la legge oraria di un moto uniformemente vario è  $s = \frac{1}{2}t^2 - 4t - 10$  allora

possiamo dire che:  $a = 1 \frac{m}{s^2}$ ,  $v_o = -4 \frac{m}{s}$ ,  $s_o = -10m$ ,  $v(t) = -4 + t$

**Osservazione N°2**

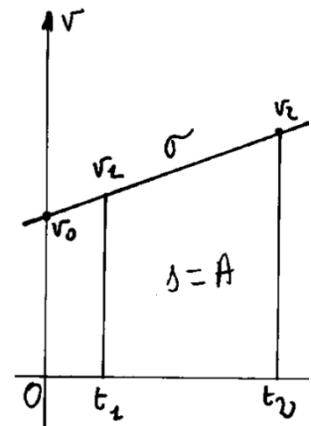
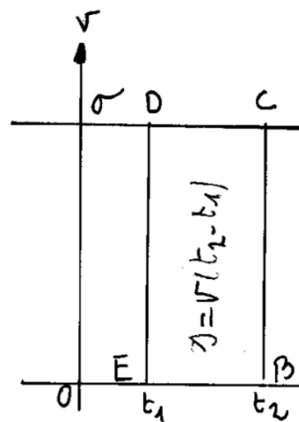
La velocità scalare istantanea di un punto che descrive una traiettoria prestabilita qualsiasi è una funzione del tempo, cioè:  $v = v(t)$ . Se riferiamo il piano ad un sistema ortogonale di assi cartesiani e riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi  $t$  e sull'asse delle ordinate i valori della velocità  $v$ , la curva  $\sigma$  immagine geometrica dell'equazione  $v = v(t)$  è il **diagramma della velocità**.



Lo spazio percorso  $s = s_2 - s_1$  dal punto materiale O nell'intervallo di tempo  $t_2 - t_1$ , cioè quando passa dalla posizione  $P_1$  alla posizione  $P_2$ , coincide numericamente con l'area  $A$  individuata dalla curva  $\sigma$ , dall'asse dei tempi, e dalle rette  $t = t_1$  e  $t = t_2$ . Infatti:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt$$

Se la **velocità scalare** è **costante**, moto uniforme su traiettoria prestabilita, allora lo spazio percorso coincide numericamente con l'area del **rettangolo**  $EBCD$  di base  $t_2 - t_1$  ed altezza  $v$ . Se l'**accelerazione scalare** è **costante** allora lo spazio percorso coincide numericamente con l'area del trapezio indicato in figura.



$$\text{Infatti: } v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v \cdot dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at) \cdot dt \Rightarrow$$

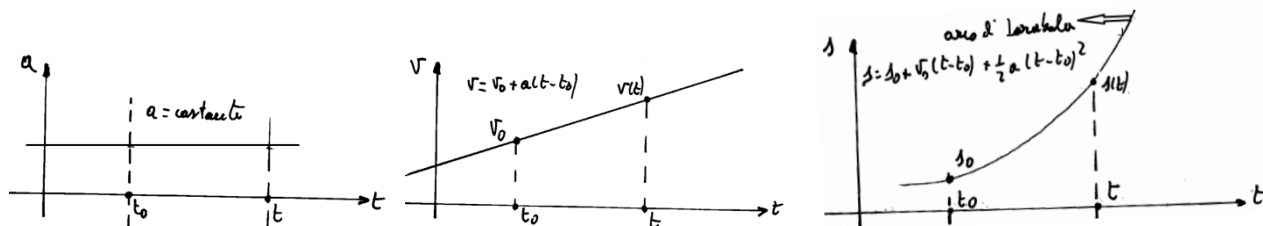
$$[s]_{t_1}^{t_2} = \left[ v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right]_{t_1}^{t_2} \Rightarrow s_2 - s_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a (t_2 - t_1)^2 = \text{spazio percorso nell'intervallo di}$$

tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$      $v_2 = at_2$      $v_1 = at_1$      $\Rightarrow$      $v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1)$      $\Rightarrow$      $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

$$s = s_2 - s_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} (t_2 - t_1)^2 = \left( v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2} \right) (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) (t_2 - t_1) = \frac{(b + B)h}{2}$$

che è l'area del trapezio della figura dove  $b = v_1$ ,  $B = v_2$ ,  $h = t_2 - t_1$

<p>Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto in cui <math>v = f(t)</math>. L'area colorata in azzurro è lo spazio percorso nell'intervallo di tempo <math>\Delta t = t_f - t_i</math></p>	<p>Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto rettilineo uniforme con velocità <math>v_i</math>. L'area del rettangolo colorato è <math>v_i \cdot t</math> e rappresenta lo spazio percorso dall'istante iniziale al tempo <math>t</math>.</p>	<p>Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto uniformemente accelerato con velocità <math>v_i</math>. L'area del trapezio colorato rappresenta lo spazio percorso dall'istante iniziale al tempo <math>t</math>.</p>



**Diagrammi** dell'**accelerazione**, della **velocità**, della **posizione** per un moto uniformemente accelerato su una traiettoria prestabilita quando il mobile passa dalla posizione  $P_0$ , individuata dall'ascissa curvilinea  $s_0$ , alla posizione  $P$  individuata dall'ascissa curvilinea  $S$ .

Vediamo come l'uso del calcolo integrale permetta di semplificare il procedimento per ricavare le equazioni del moto con accelerazione costante.

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{costante} \Rightarrow dv = a \cdot dt$$

Integrando ambo i membri tra l'istante iniziale  $t_0$  (quando la velocità del punto materiale è  $v_0$ ) e l'istante generico  $t$  [quando la velocità è  $v(t)$ ] abbiamo:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a \cdot dt \quad [v]_{v_0}^{v(t)} = a \cdot [t]_{t_0}^t \quad v(t) - v_0 = a \cdot (t - t_0) \quad \mathbf{v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)}$$

per  $t_0 = 0$  abbiamo:  $\mathbf{v(t) = v_0 + a \cdot t}$

$$\bullet \quad v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v \cdot dt \Rightarrow \int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v \cdot dt = \int_{t_0}^t (v_0 + at) \cdot dt \Rightarrow$$

$$[s]_{s_0}^s = \left[ v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \right]_{t_0}^t \Rightarrow s(t) - s_0 = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2 \quad \mathbf{s(t) = s_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2}$$

per  $t_0 = 0$  abbiamo:  $\mathbf{s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2}$

Il **calcolo integrale**, inverso del calcolo differenziale, fornisce un mezzo potente e nello stesso tempo pratico per determinare la velocità e la posizione di un punto materiale mobile in funzione del tempo.

Utilizzando le proprietà algebriche dei differenziali è possibile ricavare un'espressione per l'accelerazione in funzione dell'ascissa curvilinea  $s$  che ci fornisce la posizione del punto materiale.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = v \cdot \frac{dv}{ds} \Rightarrow v \cdot dv = a \cdot ds \Rightarrow \int_{v_0}^v v \cdot dv = \int_{s_0}^s a \cdot ds = a \cdot \int_{s_0}^s ds$$

$$\left[ \frac{1}{2} v^2 \right]_{v_0}^v = a \cdot [s]_{s_0}^s \quad \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = a [s - s_0] \quad \mathbf{v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)}$$

**Problema:** Un corpo inizialmente in quiete parte dall'origine con una accelerazione data da  $a = -3t^2 + 6t$ . Determinare dopo quanto tempo il corpo passa nuovamente per l'origine e con quale velocità scalare vi giunge.

$$t_o=0 \quad v_o=0 \quad v(t)=\int_0^t a(t) \cdot dt = \int_0^t (-3t^2+6t) \cdot dt = \left[-t^3+3t^2\right]_0^t = -t^3+3t^2 \quad \mathbf{v(t)=-t^3+3t^2}$$

$$s(t)=\int_0^t (-t^3+3t^2) \cdot dt = -\frac{1}{4}t^4+t^3 \quad \mathbf{s(t)=-\frac{1}{4}t^4+t^3} \quad s_o=0$$

$$s(t)=s_o=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}t^4+t^3=0 \Rightarrow t^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}t+1\right)=0 \Rightarrow t=0 \text{ istante iniziale}$$

$$-\frac{1}{4}t+1=0 \Rightarrow t=4s \quad v(t)=v(4)=-4^3+3 \cdot 4^2=-16\frac{m}{s} \quad a(t)=a(4)=-3 \cdot 4^2+6 \cdot 4=-26\frac{m}{s^2}$$

Dopo 4 secondi il moto è **accelerato** ( $a$  e  $v$  hanno lo stesso segno) **retrogrado** ( $v$  è negativa).