Unità Didattica N°2

La cinematica del punto materiale

La meccanica e le sue parti

La **Meccanica** è quella parte della fisica che studia il movimento dei corpi. Suo scopo principale è quello di descrivere in maniera univoca e nella forma più semplice possibile tutti i movimenti che si osservano in natura. La **Meccanica classica** o **galileiana** o *newtoniana* comprende i casi in cui la velocità del corpo in esame è piccola rispetto a quella della luce (che è dell'ordine di $300\,000 \frac{km}{s}$) ad esempio inferiore a $30\,000 \frac{km}{s}$. Per velocità maggiori è necessario ricorrere alla meccanica relativistica elaborata da Einstein. Si parla di **Meccanica del punto materiale** se le dimensioni lineari del corpo in moto sono trascurabili rispetto alle dimensioni lineari dell'ambiente in cui si verifica il fenomeno, in caso contrario si parla di **Meccanica del corpo rigido.**

E' tradizione consolidata dividere la meccanica in **cinematica**, *dinamica*, **statica**. La **cinematica** (detta anche *geometria del moto*) studia il movimento dei corpi nel tempo e nello spazio indipendentemente dalle cause che lo determinano. Le grandezze fisiche che intervengono in cinematica sono la **posizione**, lo *spazio percorso* (inteso come arco di traiettoria), il **tempo**, la *VELOCITA'*, l'**accelerazione**.

La **dinamica** studia il movimento dei corpi in relazione alle cause che lo determinano o comunque lo modificano. In dinamica si introducono i concetti di massa (grandezza primitiva) forza (grandezza derivata), lavoro, energia,...

La statica studia le condizioni perché un corpo, soggetto all'azione di due o più forze, si trovi in equilibrio. La statica può essere considerata un capitolo particolare della dinamica.

Moto e quiete di un corpo

Le nozioni di moto e di quiete sono concetti relativi e di difficile comprensione concettuale. Un corpo P si dice in movimento (in quiete) rispetto ad un altro corpo O quando, al trascorrere del tempo, varia (non varia) la posizione di P rispetto ad O. Non ha significato parlare di moto o di quiete se non si specifica l'ente di riferimento. Pertanto per stabilire se un corpo è in moto occorre precisare innanzitutto ***rispetto a che cosa*** noi intendiamo riferire l'eventuale moto. Il sistema di riferimento è costituito da un oggetto (considerato per il momento arbitrariamente immobile) o più oggetti le cui reciproche distanze possano ritenersi immobili nel tempo. Vedremo in seguito che non tutti i S.R. sono fra loro equivalenti, ma ne esistono di due tipi e precisamente: i **sistemi di riferimento inerziali** ed i sistemi di riferimenti accelerati. Generalmente se il moto avviene lungo una linea (che può essere una retta o una curva qualsiasi del piano o dello spazio) il S.R. può essere identificato con un punto fisso appartenente a tale linea. In quel punto immaginiamo la presenza di una persona, chiamata **osservatore**, che segue con lo sguardo ciò che accade al corpo in movimento. Se il moto avviene in un piano, il S.R. generalmente è costituito da due rette perpendicolari orientate nel cui punto d'incontro si colloca l'osservatore. Se il moto avviene nello spazio il S.R. generalmente è costituito da tre rette orientate, ciascuna perpendicolare al piano individuato dalle altre due. L'osservatore è posto nel loro punto d'incontro. Un particolare S.R. ,ritenuto con buona approssimazione inerziale, è quello delle **stelle fisse**. Le rette che idealizzano gli assi cartesiani del sistema di riferimento sono linee che congiungono idealmente il centro del sole con alcune stelle di "posizione privilegiata" (come ad esempio la stella polare). Noi inizialmente rivolgeremo la nostra attenzione al **moto di un punto materiale su traiettoria prestabilita**.

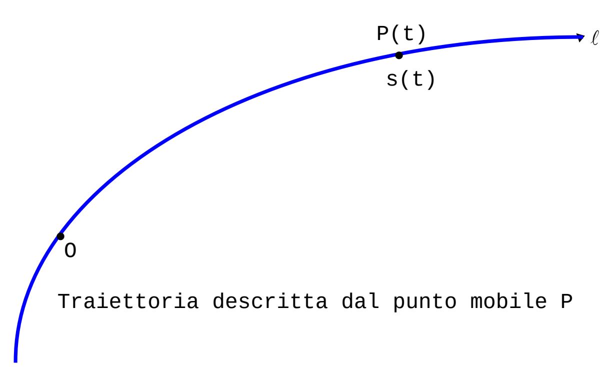
Punto materiale, Traiettoria, Ascissa curvilinea, Legge oraria del moto

Punto materiale è un qualsiasi corpo le cui dimensioni geometriche sono trascurabili rispetto alle dimensioni geometriche dello spazio in cui il moto si volge. Dunque punto materiale (o corpo puntiforme o particella elementare) è un oggetto piccolissimo in relazione alle distanze che percorre. Così per un astronomo sono spesso punti i pianeti nelle loro rivoluzioni attorno al Sole. Chiamiamo Posizione di un punto materiale il punto geometrico da esso occupato ad un certo istante. Matematicamente un Punto materiale viene concepito come un oggetto privo di dimensioni a cui non possiamo associare né moti rotazionali né moti vibrazionali ma a cui associamo una massa **m**. Spesso si parla di mobile intendendo con ciò un punto materiale di massa **m** in movimento. Il punto materiale P durante il suo moto descrive una linea ℓ detta Traiettoria del moto. Essa può essere rettilinea o curvilinea ed il moto dicesi rettilineo o curvilineo. Inizialmente affronteremo lo studio della cinematica del punto materiale supponendo di conoscere la traiettoria, cioè supporremo che il mobile percorra una traiettoria prestabilita, sulla quale introduciamo un sistema di ascisse curvilinee. Si dice che su una traiettoria prestabilita ℓ percorsa dal punto materiale P si è introdotto un sistema di ascisse curvilinee quando, fissato un punto O di riferimento (origine) sulla traiettoria, si stabilisce su di essa un verso positivo di percorrenza e si associa ad ogni punto di questa linea un numero s che esprime, nell'unità di misura fissata, la lunghezza dell'arco di traiettoria compreso fra quel punto e l'origine. Tale numero sarà positivo se il punto P segue l'origine O nel verso positivo di percorrenza, negativo se lo precede.

(N.B. Il verso positivo arbitrariamente scelto sulla traiettoria ℓ può coincidere oppure no col verso reale del moto del punto materiale P). La posizione del punto P sulla traiettoria ℓ varia al variare di t. Si dice che la posizione del punto P è funzione del tempo e si scrive $P(t)$. $P(t)$ = posizione occupata dal punto P all'istante t. Poiché ad ogni valore del tempo corrisponde un ben determinato valore dell'ascissa curvilinea s, diciamo che s è funzione del tempo e scriviamo: $\mathbf{s=s(t)}$ [1]

L'equazione [1], che mi dice come varia l'ascissa curvilinea s al variare del tempo dicesi Equazione oraria del moto o legge oraria del moto. La **legge oraria** (o equazione) **del moto** esprime la relazione che intercorre tra l'ascissa curvilinea s (che individua la posizione del punto materiale al tempo t) ed il tempo t. Ad esempio $s = 2t^2 - 3t + 5$ rappresenta la legge oraria di un moto uniformemente vario. Se riferiamo il piano ad un sistema di assi cartesiani e riportiamo in ascissa il tempo ed in ordinata l'ascissa curvilinea s, allora l'equazione $\mathbf{s=s(t)}$ rappresenta una curva detta diagramma orario o curva oraria. Tale curva, dal punto di vista geometrico, non ha nulla a che vedere con la traiettoria ℓ descritta dal mobile.

L'ascissa curvilinea s rappresenta anche lo **spazio percorso** nel tempo t solo se la posizione iniziale del mobile coincide col riferimento O scelto sulla traiettoria ℓ.



Traiettoria descritta dal punto mobile P

Velocità scalare media ed istantanea

La traiettoria del punto materiale P sia una curva piana ℓ sulla quale fissiamo, in maniera conveniente ma arbitraria, una origine O, un verso positivo ed una unità di misura per le lunghezze. Per individuare il moto del punto P sulla traiettoria prestabilita ℓ basta conoscere come varia l'ascissa curvilinea s del punto P al variare del tempo, cioè basta conoscere la funzione s(t).

L'equazione **s = s(t)** [1] fissa la legge oraria del moto che dicesi anche equazione oraria del moto. L'istante $t_o = 0$ dicesi l'istante iniziale del moto perché fisicamente è l'istante in cui si comincia ad osservare il moto. Per $t < 0$ la [1] permette di calcolare le posizioni occupate dal punto P prima che se ne iniziasse l'osservazione, supposto che il punto materiale P obbedisse alla stessa legge del moto anche prima dell'istante iniziale.

Per $t_o = 0$ la [1] dà un valore speciale $s_o = s(0)$ di s. Questo speciale valore s_O individua una speciale posizione P_O di P (posizione iniziale) che solo in particolari casi è coincidente con O. Se poi risulta anche $P_o \equiv O$, allora l'arco di curva $\overset{\frown}{P_oP} = \overset{\frown}{OP}$ misurato da $s = s(t)$, rappresenta lo spazio s percorso dal punto P nel tempo t.

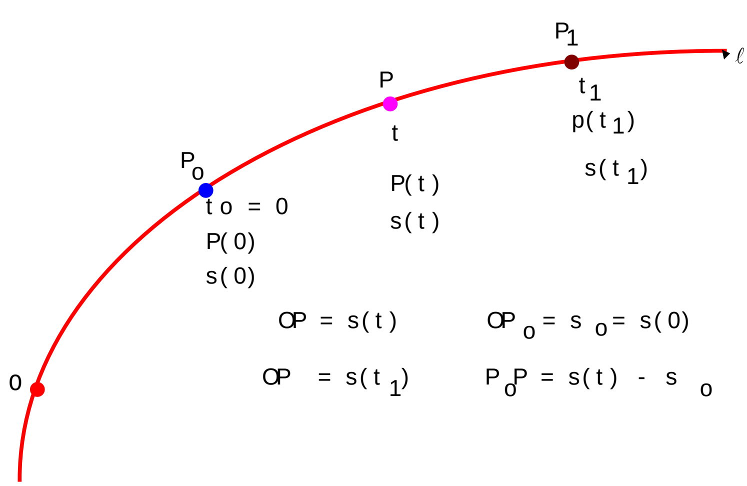
Se invece risulta $P_o \neq O$ lo spazio percorso nel tempo t è: $\overset{\frown}{P_oP} = s(t) - s_o$. La legge del moto **s = s(t)** dà lo spazio percorso dal mobile solo nel caso particolare che l'origine O coincida con la posizione iniziale del mobile e che sia costante il verso del movimento. (Non bisogna confondere il verso della traiettoria ℓ col verso reale del moto. Essi possono coincidere oppure no).

In un riferimento cartesiano riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi t in una scala opportuna e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori di s in una scala opportuna. La legge oraria del moto **s = s(t)** rappresenta l'equazione cartesiana di una curva γ

che dicesi **diagramma orario** del moto descritto dal punto P. (In generale risulta $\gamma \neq \ell$). Siano $P(t)$ e $P(t_1)$ le posizioni del mobile occupate rispettivamente agli istanti t e t_1 (> t). $\mathbf{PP_1 = \Delta s = s(t_1) - s(t) = s_1 - s}$ è lo spazio percorso dal mobile nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$.

Definiamo velocità scalare media del punto materiale P relativa all'intervallo di tempo Δt o relativa al tratto di curva PP_1 il seguente rapporto tra lo spazio percorso Δs ed il tempo impiegato a percorrerlo Δt: $$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} \quad [2]$$

Riferendosi al diagramma orario γ del moto possiamo dire che la velocità scalare media $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = tg\,\vartheta_1$ rappresenta il coefficiente angolare della retta PP_1 soltanto se l'unità di lunghezza (per noi il metro) sull'asse delle ordinate e l'unità di tempo (per noi il secondo) sull'asse delle ascisse sono rappresentati da segmenti uguali. Ciò in pratica non avviene mai per cui $tg\,\vartheta_1$ non dà una misura di v_m ma è soltanto proporzionale a v_m. <<**La velocità scalare media** $\mathbf{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$ **rappresenta la velocità costante di un mobile fittizio Q che, muovendosi con velocità costante** v_m**, percorre nello stesso tempo Δt lo stesso spazio Δs percorso da P**>>.



Se poi calcoliamo le velocità medie relative ad intervalli di tempo Δt sempre più piccoli otteniamo valori della velocità sempre più prossimi al valore della velocità del punto P all'istante t. Quindi possiamo immaginare un intervallo di tempo tanto piccolo che ogni sua ulteriore riduzione non alteri la velocità media. Questa velocità media limite è chiamata **velocità scalare istantanea** e viene indicata col simbolo $v(t)$.

$v(t)$ = velocità scalare media relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo (teoricamente infinitesimo). In termini matematici possiamo scrivere:

$$\mathbf{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)}$$

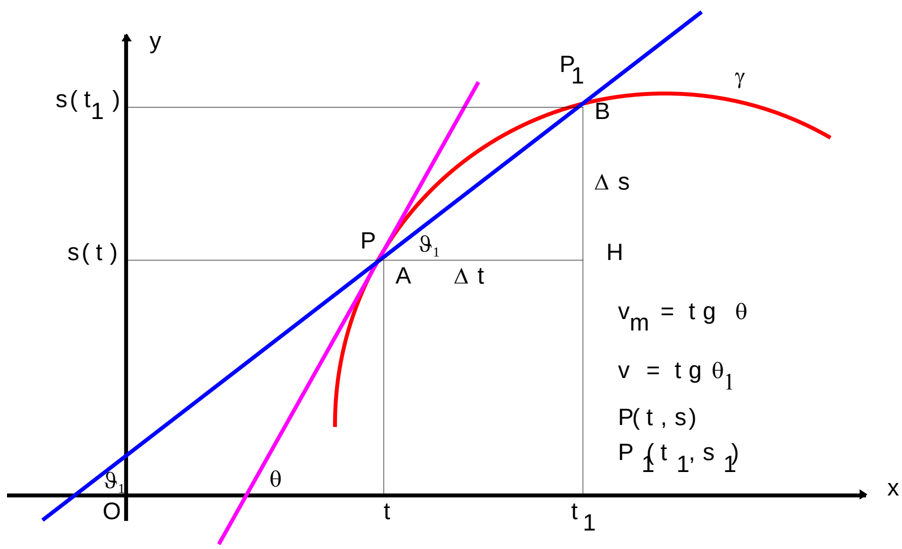


Diagramma orario

Qualitativamente la velocità può dirsi lo spazio riferito al tempo impiegato a percorrerlo. Ma quando $\Delta t \to 0$ $(t_1 \to t)$ il punto $P_1 \to P$ sicché, al limite la secante PP_1 diventa la tangente alla curva γ nel punto P. Pertanto la velocità del mobile all'istante t (**velocità scalare istantanea**) è uguale al coefficiente angolare ($\mathrm{tg}\,\vartheta$) della retta tangente nel punto P alla curva γ diagramma orario del moto.

Esempio: **<<Calcolare la velocità scalare istantanea di un punto mobile la cui legge oraria è** $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ >>

$$v(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{3t_1^2 - 5t_1 + 2 - 3t^2 + 5t - 2}{t - t} =$$

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{3(t_1 - t)(t_1 + t) - 5(t_1 - t)}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} (3t_1 + 3t - 5) = 3t + 3t - 5 = 6t - 5$$

$$v(t) = 6t - 5$$

La grandezza fisica velocità è derivata dalle grandezze fondamentali lunghezza e tempo.

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{[L]}{[T]} = [L \cdot T^{-1}] \qquad \{v\} = \frac{\{s\}}{\{t\}} = \frac{m}{s}$$

$$1\,\frac{km}{h} = 0{,}278\,\frac{m}{s} = \frac{5}{18}\,\frac{m}{s} \qquad 1\,\frac{m}{s} = 3{,}6\,\frac{km}{h} = \frac{18}{5}\,\frac{km}{h}$$

Un punto si muove con velocità unitaria se percorre un arco di curva lungo un metro in ogni secondo

OSSERVAZIONE La velocità definita in questo paragrafo è detta anche **velocità lineare** e rappresenta solo un aspetto della **velocità vettoriale**.

Moti progressivi e retrogradi

Supponiamo che un punto materiale P descriva la traiettoria ℓ, sulla quale fissiamo convenzionalmente un verso positivo di percorrenza.

Velocità positiva significa che il punto P si muove nel verso positivo fissato su ℓ.

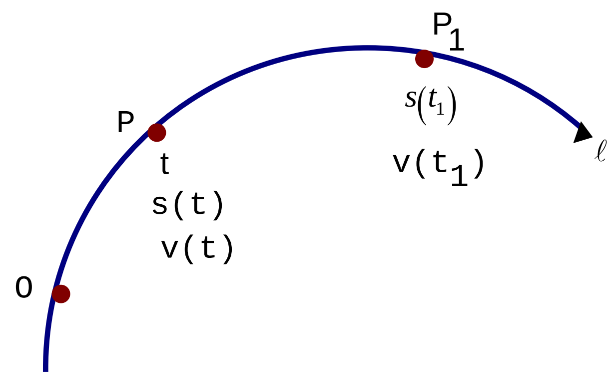
In questo caso il moto dicesi progressivo.

$v > 0$ significa che il punto materiale P si muove nel verso positivo fissato sulla traiettoria ℓ; il moto viene detto progressivo.

$v < 0$ significa che P si muove in verso opposto a quello fissato sulla traiettoria ℓ; il moto viene detto retrogrado.

Velocità scalare positiva (**negativa**) significa che il punto materiale P si muove realmente nello **stesso verso** (**in verso opposto**) di (a) quello fissato convenzionalmente sulla traiettoria ℓ descritta da P.

Accelerazione scalare media ed istantanea



Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la velocità scalare è una funzione del tempo t, cioè $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t)$. Accanto a questa funzione che, istante per istante misura la variazione di posizione del mobile rispetto al tempo, ha importanza fondamentale in meccanica un'altra funzione del tempo che misura, sempre rispetto al tempo, la variazione della velocità scalare. Se al tempo t la velocità di P è v(t) ed al tempo t_1 (> t) è $\mathrm{v}(t_1)$, definiamo **accelerazione scalare media** relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t$ il seguente rapporto: $\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_m = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta \mathbf{t}} = \dfrac{\mathbf{v}(\mathbf{t}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{t})}{\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}}$

L'accelerazione scalare media relativa ad un intervallo di tempo Δt piccolissimo (teoricamente infinitesimo) dicesi **accelerazione scalare istantanea**. In simboli abbiamo: $a = \lim\limits_{t_1 \to t} \dfrac{\mathrm{v}(t_1) - \mathrm{v}(t)}{t_1 - t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}}{t_1 - t} = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = \mathrm{v}'(t) = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = s''(t)$

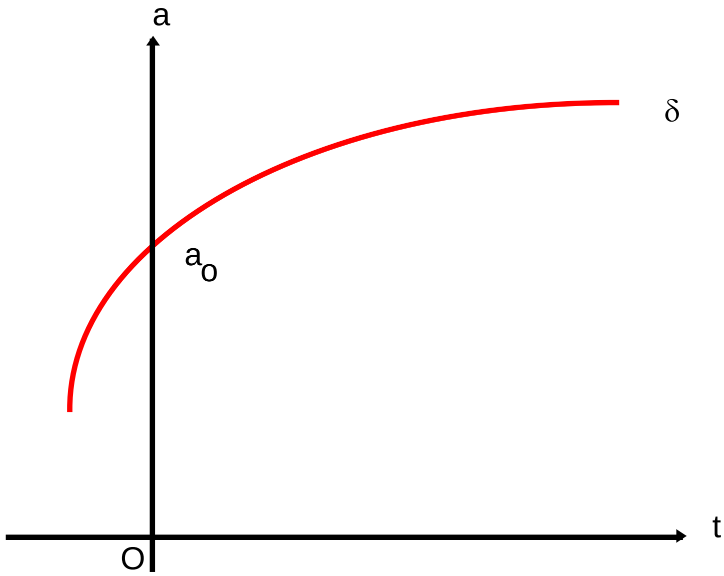


Diagramma delle accelerazioni

Anche l'accelerazione scalare istantanea è, in generale, funzione del tempo, cioè $a = a(t)$. Se riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate le accelerazioni a la curva δ, immagine geometrica dell'equazione $a = a(t)$ è detta **diagramma delle accelerazioni**.

Qualitativamente l'accelerazione esprime la rapidità di variazione della velocità rispetto al tempo.

L'accelerazione è una grandezza derivata.

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[L \bullet T^{-1}]}{[T]} = [L \bullet T^{-2}] \qquad \{a\} = \frac{\{v\}}{\{t\}} = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$$

Quindi nel S.I. l'unità di misura dell'accelerazione è il <<**metro al secondo quadrato**>> e corrisponde all'accelerazione di un punto materiale la cui velocità varia uniformemente di $1\frac{m}{s}$ in ogni secondo. L'accelerazione scalare, al pari della velocità scalare, può essere tanto positiva quanto negativa.

$$s(t) = 3t^2 - 5t + 2 \qquad v(t) = 6t - 5$$

$$a = \lim_{t_1 \to t} \frac{6t_1 - 5 - 6t + 5}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{6(t_1 - t)}{(t_1 - t)} = 6 \frac{m}{s^2}$$

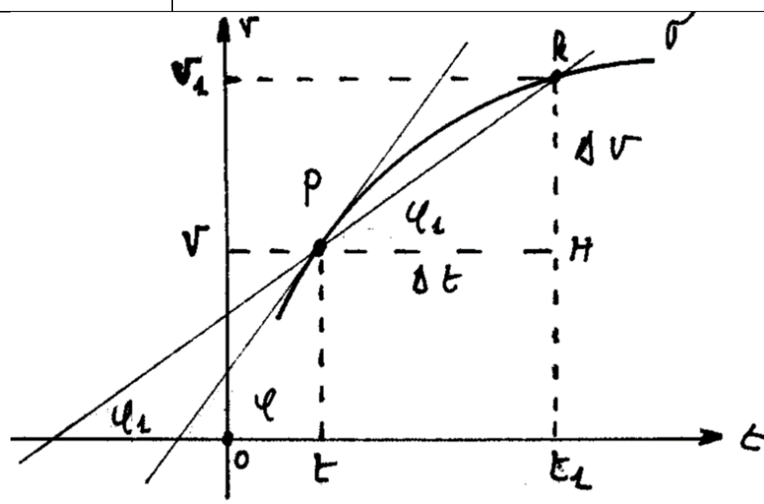
Accelerazione scalare positiva significa: *moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che aumenta*

Accelerazione scalare negativa significa: *moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che diminuisce*.

Velocità iniziale v_i	**Velocità finale** v_f	**Accelerazione a**
$10\dfrac{m}{s}$	$20\dfrac{m}{s}$	$a > 0$ **moto progressivo con velocità scalare che aumenta**
$-20\dfrac{m}{s}$	$-10\dfrac{m}{s}$	$a > 0$ **moto retrogrado con velocità scalare che aumenta**
$20\dfrac{m}{s}$	$10\dfrac{m}{s}$	$a < 0$ **moto progressivo con velocità scalare che diminuisce**
$-10\dfrac{m}{s}$	$-20\dfrac{m}{s}$	$a < 0$ **moto retrogrado con velocità scalare che diminuisce**

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\,\varphi_1 \qquad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = tg\,\varphi \;=$$

coefficiente angolare della retta tangente al diagramma della velocità



Moti accelerati e ritardati

Un moto si dice **accelerato** (**ritardato**) quando l'accelerazione scalare e la velocità scalare hanno segni concordi (discordi)

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot v > 0 \\ + \;\; + \\ - \;\; - \end{array}\right\} \Rightarrow \text{moto accelerato} \qquad \left.\begin{array}{l} a \cdot v < 0 \\ + \;\; - \\ - \;\; + \end{array}\right\} \Rightarrow \text{moto decelerato}$$

Fisicamente parlando, moto accelerato significa:

1) moto progressivo ($v>0$) con velocità scalare che aumenta ($a>0$) oppure:

2) moto retrogrado ($v<0$) con velocità scalare che diminuisce in valore relativo ma aumenta in valore assoluto ($a<0$)

Moto accelerato significa:

1) moto **progressivo** $(v>0)$ con velocità scalare che aumenta $(a>0)$ oppure

2) moto **retrogrado** $(v<0)$ con velocità scalare che aumenta in valore relativo ma diminuisce in valore assoluto $[\,v(t_1)=-5\frac{m}{s} \quad v(t)=-8\frac{m}{s}\,]$

Sinteticamente possiamo affermare quanto segue:

Moto accelerato (decelerato) è un moto progressivo o retrogrado con velocità scalare che aumenta (diminuisce) in valore assoluto.

Se risulta $v(t)=0$ allora esiste un istante t^* detto (istante di arresto) in cui il mobile si ferma. Ad esso corrisponde sulla traiettoria l una posizione di arresto. Nel moto accelerato (decelerato) non esiste (esiste) un istante di arresto.

Osservazione: Moto decelerato significa che, se permangono le cause che hanno determinato il moto, il mobile è destinato a fermarsi. Sotto queste ipotesi, dopo l'istante di arresto, il moto diventa accelerato.

Moto uniforme su traiettoria prestabilita

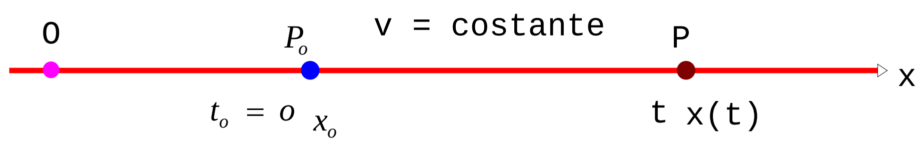
E' il moto di un punto che percorre una traiettoria prestabilita con **velocità scalare costante**. In questo caso la << *velocità scalare istantanea coincide con quella media* >>. Se la traiettoria ℓ è una curva qualsiasi il moto dicesi **curvilineo uniforme**, se è una retta (in questo caso diviene un asse cartesiano x) il moto dicesi **rettilineo uniforme**.

accelerazione scalare nulla $\Rightarrow$: $a = 0$ $\qquad v = \dfrac{s(t) - s_o}{t}$

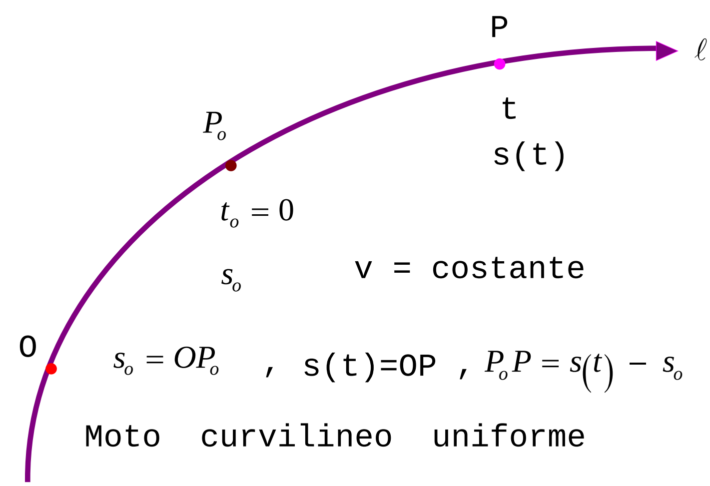
$\mathbf{s(t) = s_o + vt}$ **legge oraria del moto** $\qquad \mathbf{v = \dfrac{x(t)-x_o}{t}} \qquad \mathbf{x(t)=x_o+vt}$

s_o (oppure x_o) è la *posizione iniziale* del moto.

Data la traiettoria ℓ e la velocità v di un moto uniforme, il moto stesso non è ancora completamente individuato; occorre conoscere anche la **posizione iniziale** s_o (x_o) del mobile.



Moto rettilineo uniforme



Moto curvilineo uniforme

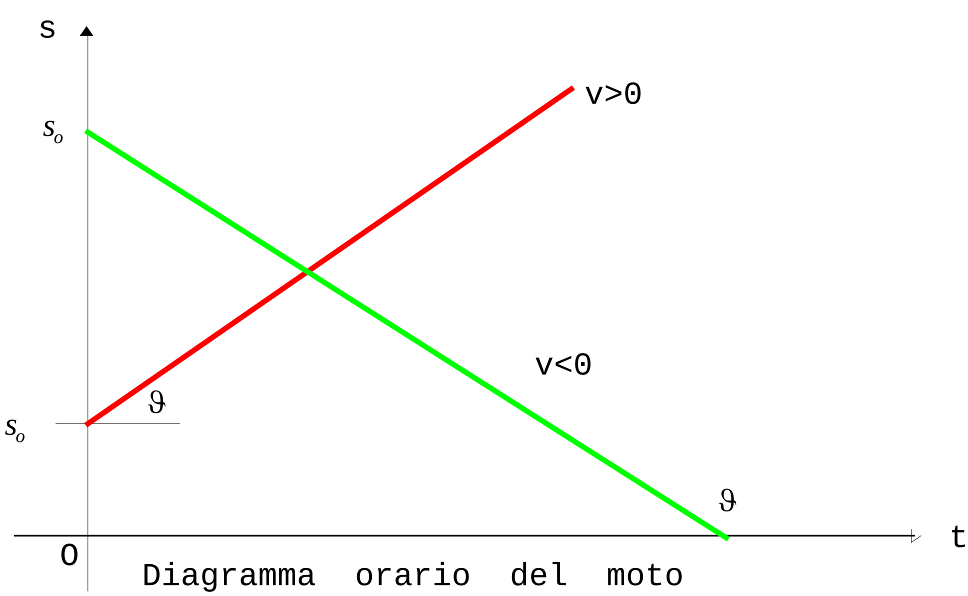
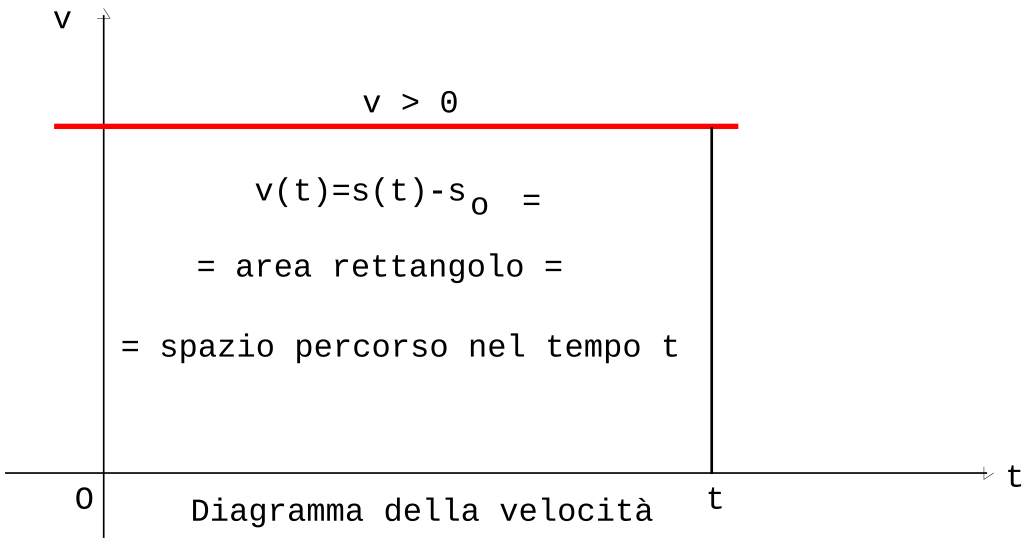


Diagramma orario del moto



Osservazione N°1: $v = tg\,\vartheta$ se l'unità di misura per le lunghezze (il metro) e per il tempo (il secondo) sono rappresentati da segmenti uguali, altrimenti ne differisce per una costante di proporzionalità.

Osservazione N°2: Il moto rettilineo uniforme è fondamentale in fisica perché è il moto di un punto materiale al quale non è applicata nessuna forza, è il moto per inerzia.

Moto uniformemente vario su traiettoria prestabilita

E' il moto di un punto materiale che descrive una traiettoria prestabilita ℓ con accelerazione scalare costante. Se ℓ è una retta il moto dicesi rettilineo uniformemente vario, in caso contrario dicesi **moto curvilineo uniformemente vario**. In un moto uniformemente vario l'accelerazione scalare istantanea coincide con quella media , per cui possiamo scrivere:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v(t) - v_o}}{\mathbf{t}} \quad \text{e quindi:} \quad \mathbf{v(t) = v_o + at}$$

v_o è la **velocità iniziale**, cioè la velocità del mobile all'istante $t = 0$.

<< **Nel moto uniformemente vario la velocità è funzione lineare del tempo**>>.

Per calcolare la legge oraria del moto occorre il calcolo differenziale che noi, allo stato attuale, non conosciamo. La **velocità scalare media** relativa all'intervallo di tempo t vale per definizione: $v_m = \dfrac{s(t) - s_o}{t}$ e quindi: $s(t) = s_o + v_m \cdot t$ **[A]**

Per calcolare v_m ricorriamo al seguente teorema che si dimostra in analisi matematica: <<Se una grandezza è funzione lineare del tempo, allora il suo valore medio relativo all'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è uguale alla media aritmetica fra il suo valore all'istante t_1 e quello all'istante t_2>>.

Nel caso nostro abbiamo $t_1 = 0$ è $[v(t_1) = v_o]$ e $t_2 = t$ $[v(t_2) = v(t)]$ e quindi possiamo scrivere : $$v_m = \frac{v_o + v(t)}{2} = \frac{v_o + v_o + at}{2} = v_o + \frac{1}{2}at$$

Sostituendo nella [A] otteniamo: $\mathbf{s(t) = s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2}$

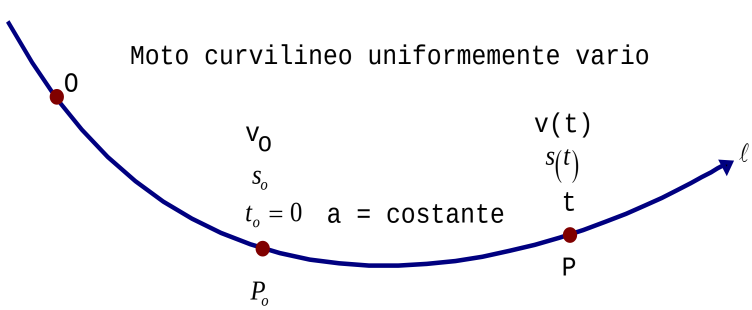
che esprime la << *legge oraria del moto uniformemente vario* >>

Se $P_o \equiv O$ abbiamo: $\mathbf{s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t}$

Se $P_o \equiv O$ e $v_o = 0$ abbiamo: $\mathbf{s(t) = \frac{1}{2}at^2}$

$\mathbf{s(t) - s_o = \frac{1}{2}at^2 + v_o t}$ = spazio percorso dal mobile nel tempo t o meglio in t secondi

Data l'accelerazione a costante, il moto non è ancora completamente individuato. Sono ancora indeterminati la **posizione iniziale** s_o e la ***velocità iniziale*** v_o.



Un moto uniformemente vario è completamente individuato quando conosciamo la traiettoria, l'accelerazione a costante, la velocità iniziale v_o e la posizione iniziale s_o.

E' possibile esprimere la velocità scalare in funzione dello spazio percorso.

$$\begin{cases} v(t) = v_o + at \\ s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + s_o \end{cases} \qquad t = \frac{v(t) - v_o}{a} \qquad s(t) - s_o = \frac{1}{2}a\left[\frac{v(t) - v_o}{a}\right]^2 + v_o\left[\frac{v(t) - v_o}{a}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2(t) + v_o^2 - 2v_o\cdot v(t)}{a} + \frac{v_o\cdot v(t) - v_o^2}{a} = \frac{v^2(t) - v_o^2}{2a}$$

$$\mathbf{v^2(t) - v_o^2 = 2a[s(t) - s_o]} \qquad \mathbf{v(t) = \pm\sqrt{v_o^2 + 2a[s(t) - s_o]}}$$

$$s_o = 0 \Rightarrow \mathbf{v(t) = \pm\sqrt{v_o^2 + 2a \times s(t)}} \quad ; \quad s_o = 0\ ,\ v = 0 \Rightarrow \mathbf{v(t) = \pm\sqrt{2a \times s(t)}}$$

Si prende il segno + (-) se il moto è **progressivo** (*retrogrado*).

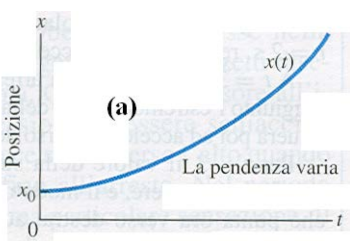
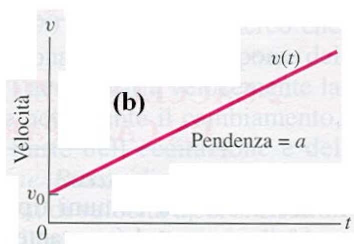


Diagramma orario del moto uniformemente vario. E' una parabola γ.



Il diagramma della velocità è una retta r. In ascissa riportiamo il tempo ed in ordinata la velocità scalare. $v(t)$ coincide, in segno e modulo, col coefficiente angolare della tangente a γ nel punto $P(x,t)$

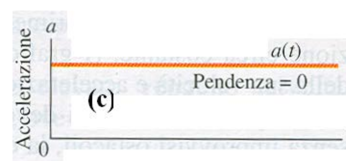


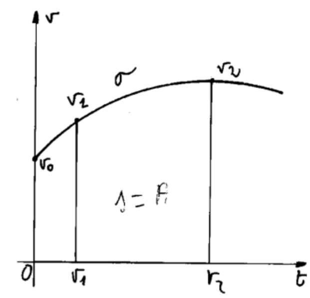
Diagramma dell'accelerazione. In ascissa riportiamo il tempo ed in ordinata l'accelerazione. L'accelerazione scalare coincide, in segno e modulo, col coefficiente angolare della retta r, diagramma della velocità.

Osservazione N°1

Se la legge oraria di un moto uniformemente vario è $\mathbf{s = \frac{1}{2}t^2 - 4t - 10}$ allora possiamo dire che: $a = 1\frac{m}{s^2}$, $v_o = -4\frac{m}{s}$, $s_o = -10\,m$, $v(t) = -4 + t$

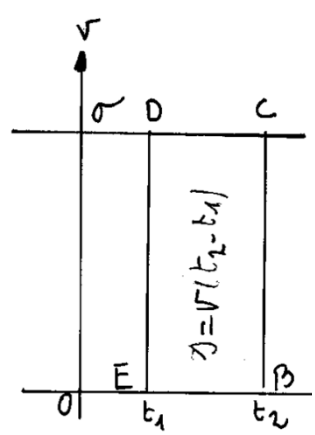
Osservazione N°2

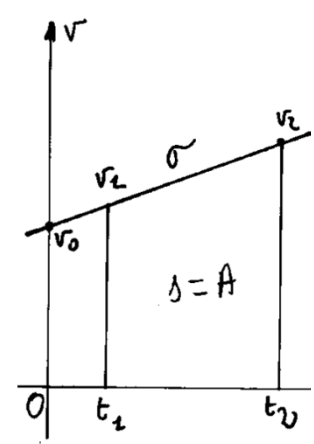
La velocità scalare istantanea di un punto che descrive una traiettoria prestabilita qualsiasi è una funzione del tempo, cioè: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{t})$ Se riferiamo il piano ad un sistema ortogonale di assi cartesiani e riportiamo sull'asse delle ascisse i tempi t e sull'asse delle ordinate i valori della velocità v, la curva σ immagine geometrica dell'equazione $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t)$ è il diagramma della velocità.

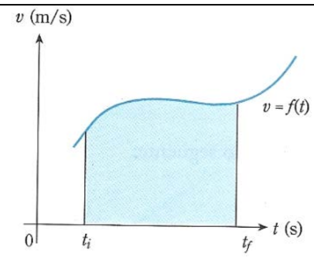
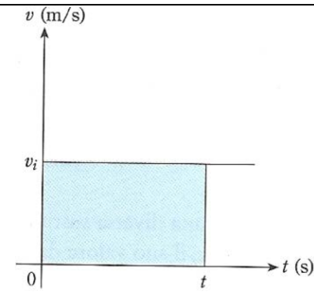
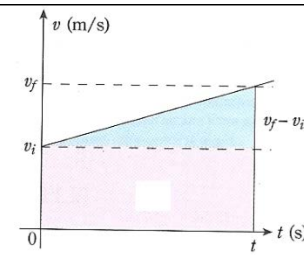


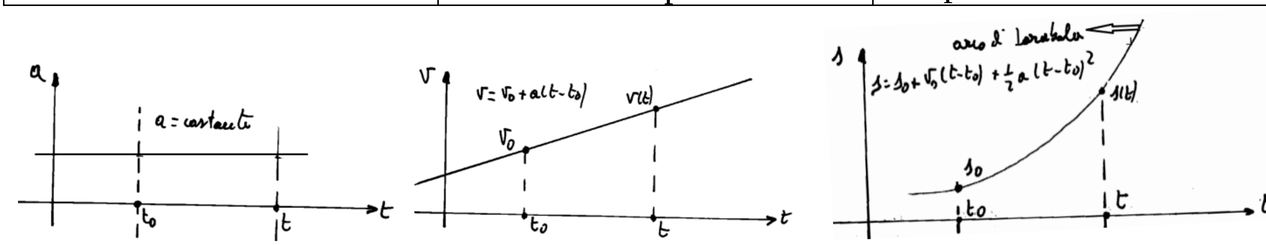
Lo spazio percorso $s = s_2 - s_1$ dal punto materiale O nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, cioè quando passa dalla posizione P_1 alla posizione P_2, coincide numericamente con l'area A individuata dalla curva σ, dall'asse dei tempi, e dalle rette $t = t_1$ e $t = t_2$.

Se la velocità scalare è costante, moto uniforme su traiettoria prestabilita, allora lo spazio percorso coincide numericamente con l'area del rettangolo $EBCD$ di base $t_2 - t_1$ ed altezza v. Se l'accelerazione scalare è costante allora lo spazio percorso coincide numericamente con l'area del trapezio indicato in figura.





 Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto in cui $v = f(t)$. L'area colorata in azzurro è lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_i$	 Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto rettilineo uniforme con velocità v_i. L'area del rettangolo colorato è $v_i \cdot t$ e rappresenta lo spazio percorso dall'istante iniziale al tempo t.	 Grafico della velocità in funzione del tempo in un moto uniformemente accelerato con velocità v_i. L'area del trapezio colorato rappresenta lo spazio percorso dall'istante iniziale al tempo t.



Diagrammi dell'accelerazione, della velocità, della posizione per un moto uniformemente accelerato su una traiettoria prestabilita quando io mobile passa dalla posizione P_0, individuato dall'ascissa curvilinea s_0, alla posizione P individuata dall'ascissa curvilinea s.

Problemi sul moto uniforme su traiettoria prestabilita

01) **Una macchina viaggia alla velocità di** $50\frac{m}{s}$ **. Determinare la velocità in** $\frac{km}{h}$ **e lo spazio percorso in** 15 **minuti .** $[180\frac{km}{h} \quad , \quad 45\,km \quad]$

02) **Una fiat Cinquecento e una lancia** δ **viaggiano di moto uniforme lungo due strade rettilinee formanti tra loro un angolo retto . Calcolare a quale distanza , in linea d'aria , si trovano dopo 10 minuti , supponendo che le automobili siano partite nello stesso istante dall'incrocio delle due strade con velocità rispettivamente di** $v_F = 90\frac{Km}{h}$ **e** $v_L = 144\frac{Km}{h}$ **.**

[$28{,}3\,km$ **]**

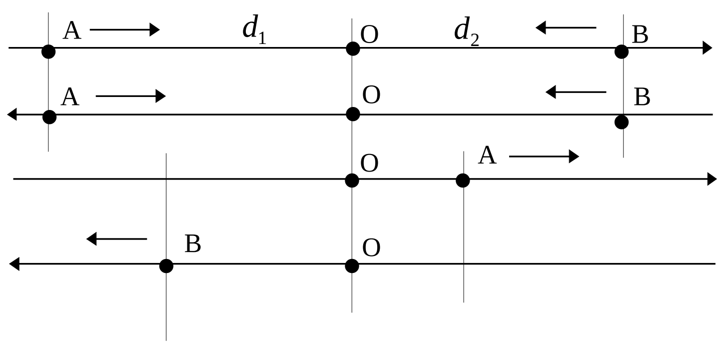
03) **Una Fiat Tipo viaggia per** $s_1 = 240\,km$ **alla velocità media di** $v_1 = 60\frac{km}{h}$ **e per i successivi** $s_2 = 240\,km$ **alla velocità media di** $v_2 = 120\frac{km}{h}$ **. Calcolare la velocità media durante l'intero percorso e il tempo impiegato a percorrerlo .** $[\ 80\frac{km}{h} \quad ; \quad 6\,h \quad]$

04) **Un giovane , nell'intervallo di tempo di** $4\,h$ **, percorre** $6\,km$ **durante la prima ora e** $3\,km$ **durante la seconda ora . Dopo essersi riposato per** $1\,h$ **, percorre** $5\,km$ **durante la quarta ora . Calcolare la velocità media durante: a) le prime due ore b) le prime tre ore c) l'intero intervallo di tempo di** $4\,h$ **[** $4{,}5\frac{km}{h}$ **;** $3\frac{km}{h}$ **;** $3{,}5\frac{km}{h}$ **]**

05) **Due atleti , Mario e Franco , stanno facendo una corsa . Franco parte** $16\,m$ **dietro Mario correndo alla velocità media di** $9\frac{m}{s}$ **. Se Mario corre alla velocità media di** $8\frac{m}{s}$ **, calcolare dopo quanto tempo Franco raggiunge Mario e lo spazio percorso da Franco in tale intervallo di tempo . [** $16\,s$ **;** $144\,m$ **]**

06) **Due atleti , Mario e Franco , stanno facendo una corsa . Mario precede Franco di** $d = 16\,m$ **, parte** $4\,s$ **prima di Franco e corre alla velocità media di** $v_M = 8\frac{m}{s}$ **. Se Franco corre alla velocità media di** $v_F = 9\frac{m}{s}$ **, calcolare dopo quanto tempo Franco raggiunge Mario e lo spazio percorso da Franco in tale intervallo di tempo . [** $52\,s$ **;** $432\,m$ **]**

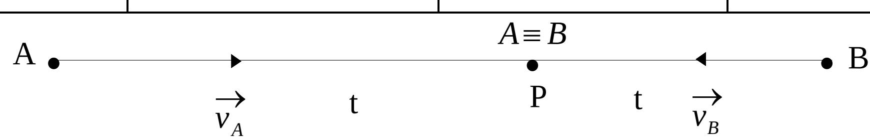
07) **Ad un certo istante due ciclisti si trovano rispettivamente in due punti A e B di un rettifilo e si vanno incontro muovendosi rispettivamente con velocità costanti** $v_A = 20\frac{m}{s}$ **e** $v_B = 30\frac{m}{s}$ **. A quale distanza dai punti di partenza e dopo quanto tempo si incontrano i due ciclisti sapendo che** $\overline{AB} = d = 2\,km$ **? Supponendo che dopo l'incontro i due ciclisti procedono nel loro cammino , calcolare dopo quanto tempo dall'istante dell'incontro la distanza fra i due ciclisti è** $r = 1\,km$ **.**



$$\text{DATI} \begin{cases} v_A = 20\frac{m}{s} \\ v_B = 30\frac{m}{s} \\ d = 2\,km = 2000\,m \\ r = 1\,km = 1000\,m \end{cases}$$

08) **Due treni si muovono , lungo i rispettivi binari , l'uno verso l'altro con moto uniforme . Il primo treno ha velocità scalare** $v_A = 150\frac{km}{h}$ **, il secondo ha velocità scalare** $v_B = 100\frac{km}{h}$ **. Ad un certo istante passano per due stazioni distanti** $d = 5\cdot 10^5\,m$ **. A quali distanze dalle rispettive stazioni s'incontrano i due treni ?**

dati del problema	$v_A = 150\frac{km}{h}$	$v_B = 100\frac{km}{h}$	$d = 5\cdot 10^5\,m$



09) **Due atleti partono in direzioni opposte lungo la pista di uno stadio che è lunga** $400\,m$ **, uno con velocità** $v_1 = 7{,}9\frac{m}{s}$ **, l'altro con velocità** $v_2 = 6{,}3\frac{m}{s}$ **. Calcolare dopo quanti secondi distano** $280\,m$ **ed a quale distanza dal punto di partenza si incontrano . [** $s_1 = 178\,m$ **]**

10) **Due punti materiali ad un certo istante** $t_o = 0$ **distano** $4\cdot 10^4\,m$ **e si muovono nello stesso verso , il primo con velocità** $4\cdot 10^5\,\frac{m}{s}$ **, il secondo , che insegue il primo , con velocità** $8\cdot 10^5\,\frac{m}{s}$ **.**

Si chiede dopo quanto tempo il primo è raggiunto dal secondo . Calcolare , inoltre , lo spazio percorso dai due mobili . [$0{,}1\,s$ **]**

11) Due punti materiali P_1 e P_2 si muovono con velocità scalare costante lungo un percorso rettilineo . Ad un certo istante P_1 , che occupa la posizione O , precede P_2 , che occupa la posizione A , di $40\,m$. Dopo quanto tempo P_1 raggiunge P_2 se $v_1 = 10\frac{m}{s}$ e $v_2 = 6\frac{m}{s}$. Calcolare gli spazi percorsi durante tale tempo dai due punti materiali . Dopo quanto tempo dal sorpasso i due punti materiali si trovano alla distanza $d = 2\,km$.

12) Due ciclisti A e B percorrono , in senso antiorario , una pista ellittica lunga $\ell = 1\,km$ con velocità scalari costanti $v_A = 50\frac{km}{h}$ e $v_B = 40\frac{km}{h}$. Ad un certo istante il ciclista A , che occupa la posizione O , precede di $25\,m$ il ciclista B che occupa la posizione C . Dopo quanti secondi :

1) il ciclista A raggiunge il ciclista B nella posizione D

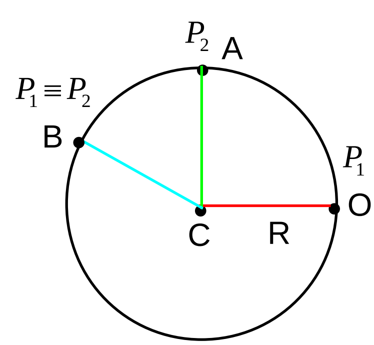
2) il ciclista A,che occupa la posizione F,precede di $50\,m$ il ciclista B che occupa la posizione E

3) il ciclista A raggiunge una seconda volta il ciclista B . Calcolare i metri percorsi ed i secondi impiegati dai due ciclisti dopo il primo ed il secondo sorpasso .

[**1)** $9\,s$, $100\,m$, 125m **2)** $18\,s$, $200\,m$, $250\,m$ 3)]

13) Un punto materiale P descrive una curva piana con legge oraria $s(t) = -3 + 4t$. Calcolare : 1) la posizione iniziale di P 2) la velocità di P dopo 4 secondi ed esprimerla in $\frac{m}{s}$, $\frac{km}{h}$, $\frac{km}{\min}$, $\frac{m}{\min}$ 3) la posizione di P dopo 3 secondi 4) il tratto di curva percorsa in 8 secondi .

14) Due corpi sferici P_1 e P_2 ruotano , in senso antiorario , attorno a Marte descrivendo , con velocità scalare costante , una circonferenza di centro C e raggio $R = 5 \cdot 10^6\,m$. Si sa che ad un certo istante P_2 segue P_1 di $\frac{1}{4}$ di circonferenza . Dopo quanto tempo P_1 urterà P_2 se la velocità di P_1 è doppia di quella di P_2 e $v(P_1) = 16^6\frac{km}{h}$.



Da ricordare

01) Traiettoria 02) Legge oraria del moto 03) Cinematica 04) Moto uniforme 05) Moto uniformemente vario 06) Moto accelerato 07) Moto ritardato 08) Moto periodico 09) Moto circolare uniforme 10) Velocità angolare 11) Ascissa curvilinea 12) velocità scalare 13) Accelerazione scalare 14) Moto progressivo 15) Moto retrogrado