U.D. N° 3 Le grandezze vettoriali nella cinematica del punto materiale

La nozione di segmento orientato

Dalla geometria euclidea sappiamo che il **segmento** è la parte finita di retta delimitata da due punti detti **estremi** del segmento . Definiamo **segmento orientato** un qualsiasi segmento sul quale è stato fissato un verso positivo . $P \longrightarrow Q$

Anche per il segmento orientato possiamo scegliere il verso positivo in due maniere diverse .

Cosi il **segmento orientato** PQ è quel segmento che ha come **verso positivo** quello che va dal punto P (detto **primo estremo** o **origine**) al punto Q (detto **secondo estremo** o semplicemente **estremo**) .

Esso è indicato col simbolo $\overrightarrow{PQ}$ o anche col simbolo PQ se conveniamo di identificare il suo verso positivo con l'ordine secondo cui sono scritti i suoi estremi .

La **rappresentazione grafica** del segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ si ottiene segnando con una freccia l'estremo Q , del segmento euclideo PQ .

Ogni segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ è caratterizzato dalla **lunghezza** la cui misura (rispetto ad un prefissato segmento unitario **u**) è detta **modulo** (del segmento orientato) , dalla **direzione** (retta PQ o una sua qualsiasi parallela) , dal **verso** che è quello scelto arbitrariamente in uno dei due modi possibili .

La retta che contiene il segmento orientato PQ dicesi il **sostegno** del segmento orientato .

Il segmento $\overrightarrow{PQ}$ ha **verso opposto** al segmento orientato $\overrightarrow{QP}$, anzi i segmenti orientati PQ e QP si dicono **opposti** e si scrive $\overrightarrow{PQ} = - \overrightarrow{QP}$

I due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ hanno lo **stesso verso** (<u>versi opposti</u>) quando hanno la **stessa direzione** ed appartengono (non appartengono) allo stesso semipiano individuato sul piano euclideo π dalla retta PR .

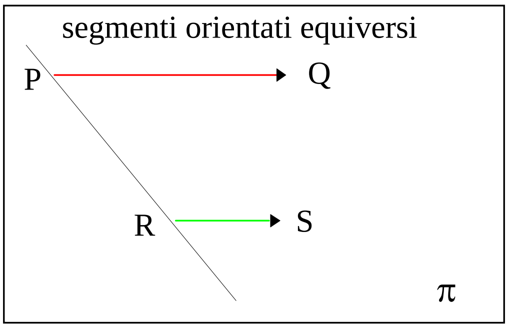
Due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ ed $\overrightarrow{RS}$ si dicono equipollenti e si scrive $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ quando hanno :

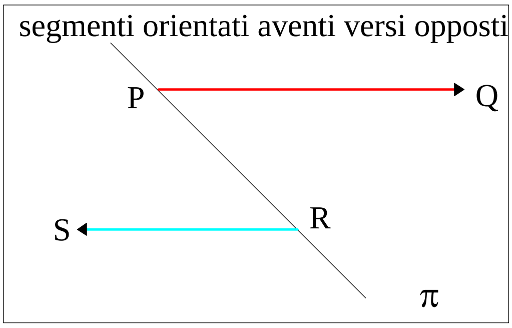
1) la **stessa lunghezza** 2) la **stessa direzione** 3) lo **stesso verso**

$P \longrightarrow Q$

segmenti orientati equipollenti

$R \longrightarrow S$





Se $P \equiv Q$ si ha il **segmento orientato nullo** il quale ha lunghezza nulla e direzione e verso indeterminati . Due o più segmenti orientati nulli si considerano **equipollenti .**

Indicheremo con $I = \{PQ\}$ indifferentemente l'insieme di tutti i segmenti orientati della retta euclidea r , del piano euclideo π , dello spazio euclideo Ω .

Un segmento orientato PQ , quale ente dello spazio , è dotato delle seguenti 4 proprietà elementari :

1) **direzione** 2) **verso** 3) **lunghezza** 4) **origine** o punto di applicazione .

Direzione è sinonimo fascio di rette parallele .

La nozione di vettore

Consideriamo l'insieme I di tutti i segmenti orientati e sia $\overrightarrow{PQ}$ uno di essi . Il segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ o un qualsiasi altro segmento orientato ad esso equipollente individua un nuovo ente matematico detto **vettore** . Quindi vettore è l'ente matematico completamente individuato da una **direzione** , da una **lunghezza** e da un **verso** .

Il vettore cosi definito può essere indicato ancora con $\overrightarrow{PQ}$ oppure , secondo le vedute di **Hamilton-Grassmann** , con $Q - P$ (si legge Q meno P) , cioè come differenza fra due punti , oppure con una lettera minuscola dell'alfabeto latino soprassegnata con una freccia ($\vec{a}, \vec{b}$) .

Quindi risulta : $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \vec{a}$ **P** si dice **origine** del vettore , Q **estremo** .

Un vettore è ancora rappresentato da un segmento orientato il quale dà del vettore una **rappresentazione grafica** o un **modello** .

Due segmenti orientati equipollenti rappresentano lo stesso vettore ma danno di esso due modelli diversi o due rappresentazioni grafiche diverse .

Un qualsiasi **vettore** è caratterizzato : 1) da una **direzione** 2) da un **verso** 3) da una **lunghezza** la cui misura è detta modulo che viene indicato con uno dei seguenti simboli : $|\vec{a}|$, a , $|Q-P|$, $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$, mod $\vec{a}$ 4) dall ' origine indeterminata . Indichiamo con **J** l'insieme di tutti i vettori (della retta euclidea , del piano euclideo , dello spazio euclideo) , cioè :

$$J = \left\{ \overrightarrow{PQ} \right\} = \{ \vec{a} \}$$

Ogni vettore di modulo unitario si dice versore o **vettore unitario** Ogni versore definisce una **direzione orientata** e viceversa . Di solito , il versore viene indicato con uno dei seguenti simboli: $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$ $\vec{e}$ $\vec{u}$. Se $P \equiv Q$ il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si dice vettore nullo e viene indicato col simbolo $\vec{o}$. Esso ha modulo nullo e verso e direzione indeterminati .

Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si dicono uguali e si scrive $\vec{a} = \vec{b}$ quando hanno come modelli due segmenti orientati equipollenti (cioè quando rappresentano una stessa classe di segmenti orientati equipollenti , cioè quando hanno la stessa direzione , lo stesso verso , la stessa lunghezza) .

Due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non uguali si dicono **diversi** e si scrive: $\vec{a} \neq \vec{b}$

Per i vettori non esiste una *relazione d ' ordine* per cui non ha senso parlare di vettore maggiore o minore di un altro vettore Si dice che due vettori sono **paralleli** quando si possono rappresentare con segmenti orientati di una stessa retta o di rette parallele.

Due **vettori** si dicono **opposti** se hanno la stessa **lunghezza** , la stessa **direzione** e **versi opposti** .

L'opposto del vettore $\vec{a}$ è indicato col simbolo - $\vec{a}$. Tre vettori si dicono **complanari** se per essi è possibile una rappresentazione con segmenti orientati di uno stesso piano .

A conclusione possiamo dire che gli elementi caratteristici di un vettore libero $\vec{a} = Q - P$ sono :

$$P \xrightarrow{\quad \vec{a} \quad} Q$$

1) l'**origine** P e l '**estremo** Q 2) la direzione cioè la retta PQ (detta **sostegno** o **retta d'azione** del vettore libero $\overrightarrow{PQ}$) o una sua qualsiasi retta parallela .

3) il verso che va dall ' origine **P** all ' estremo **Q**

4) il **modulo** che è un numero reale assoluto che esprime la misura del segmento non orientato PQ (segmento euclideo) rispetto ad una prefissata unità di misura

5) l'**origine** P indeterminata

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Tutte le grandezze che studiamo in fisica sono di due tipi : **grandezze scalari** e grandezze vettoriali . Definiamo **scalare** una grandezza completamente individuata da un numero (*positivo o negativo*) che ne esprime la misura rispetto ad un'altra grandezza della stessa specie scelta come unità di misura (**scala**) . Sono esempi di *grandezze scalari* le temperature , le masse dei corpi , l'area di una superficie , il lavoro eseguito da una forza , etc....
Definiamo **vettoriale** una grandezza completamente individuata da un numero positivo (**modulo**) , da una direzione e da un verso . Il nome **vettoriale** attribuito ad una generica grandezza di questo secondo gruppo scaturisce dal fatto che ciascuna di esse può essere rappresentata da un vettore .
Sono **grandezze vettoriali** gli spostamenti , le velocità , le accelerazioni , le forze , l'intensità del campo elettrico , l'induzione magnetica , etc...

Somma di un punto e di un vettore

Definiamo somma del punto A e del vettore $\vec{v}$ e la indichiamo col simbolo $A + \vec{v}$ il punto B tale che sia : $B - A = \vec{v}$, cioè le due uguaglianze [1] $\boxed{B = A + \vec{v}}$ e $\boxed{B - A = \vec{v}}$ [2] esprimono , come nell'algebra ordinaria e con le stesse leggi per i segni , una medesima relazione .

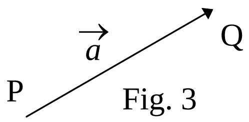


Fig. 3

Il vettore $\vec{v}$ applicato al punto A lo sposta nel punto B . Da questa circostanza scaturisce il nome di vettore (dal latino **vehere** = **trasportare**) .

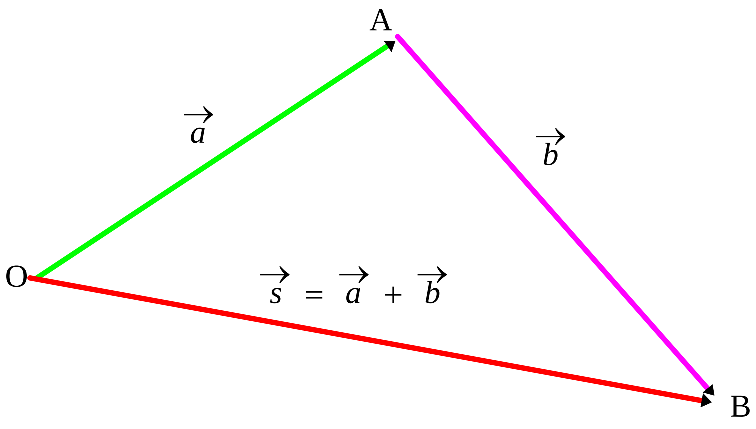
ADDIZIONE VETTORIALE

Introduciamo l'operazione di addizione tra due o più vettori . Si possono presentare i seguenti casi :

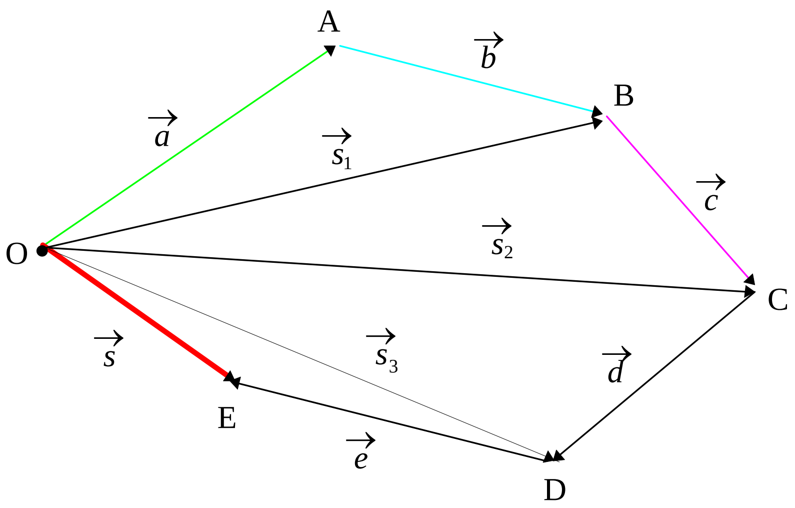
- **Somma di vettori rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi**

Supponiamo di volere eseguire la somma $\vec{s}$ di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ quando questi sono rappresentati da due segmenti orientati consecutivi In questo caso possiamo scrivere

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (A - O) + (B - A) = (B - O) + (A - A) = (B - O) + \vec{o} = B - O$$



Il vettore $\vec{s} = B - O$ è detto **somma** (o **vettore risultante**) dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cioè la somma dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ rappresentati da segmenti orientati consecutivi è il vettore $\vec{s}$ che ha come origine l'origine del vettore $\vec{a}$ e come estremo l'estremo del vettore $\vec{b}$.



Consideriamo adesso n (nel nostro caso 5) vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi . La loro somma (detta **vettore risultante**) è il vettore $\vec{s}$ cosi ottenuto :

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_1 + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_2 + \vec{d} + \vec{e} = \vec{s}_3 + \vec{e} = E - O$$

Diversamente abbiamo :

$$\vec{s} = (A - 0) + (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) =$$

$$= (E - O) + (A - A) + (B - B) + (C - C) + (D - D) = E - O$$

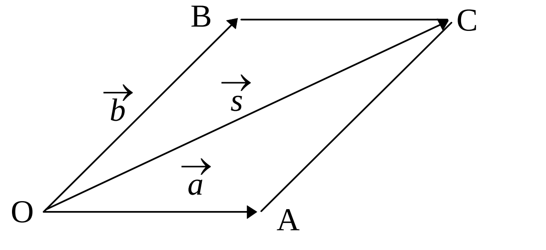
La somma di più vettori complanari rappresentati da segmenti orientati a due a due consecutivi è il vettore $\vec{s}$ (detto *vettore somma* o **vettore risultante**) che ha come origine l'origine del primo vettore e come estremo l'estremo dell' ultimo vettore .

Somma di due vettori aventi la stessa origine

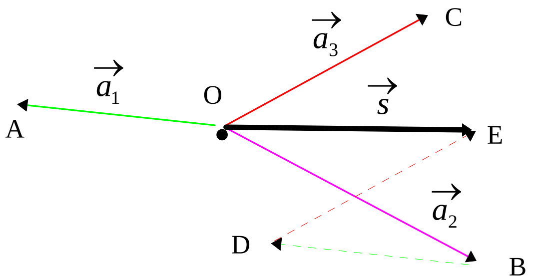
Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori rappresentati da due segmenti orientati aventi la stessa origine **O** . La loro somma $\vec{s}$ è data da : $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (A - O) + (B - O) = (A - =) + (C - A) = C - A$

AC è la **diagonale** (avente un estremo coincidente con l'origine **O** dei due vettori) del parallelogramma avente come lati consecutivi i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Si esprime questa circostanza affermando che , in questo caso , i due vettori si sommano applicando la regola del parallelogramma . Il vettore $\vec{s}$ è detto anche **vettore risultante** .



Somma di più vettori aventi la stessa origine



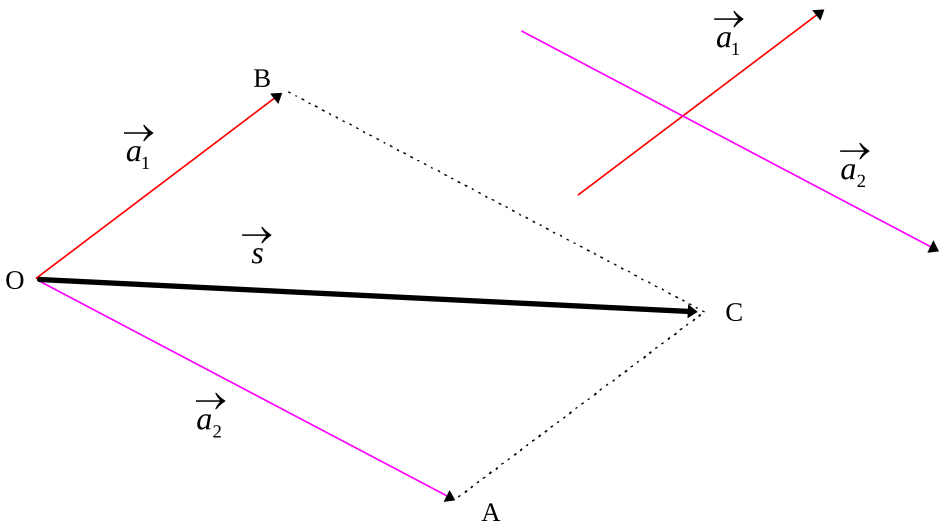
Si possono sommare i vettori a due a due fino ad ottenere il vettore somma $\vec{s}$, oppure da B si traccia il vettore **equipollente** ad $\vec{a}_1$, da D il vettore equipollente ad $\vec{a}_3$. $\boxed{E - O = \vec{s}}$ è il **vettore somma** .

Infatti : $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (D - O) + \vec{a}_3 = E - O$

Somma di due vettori liberi complanari non consecutivi

Siano $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$ due vettori liberi complanari non aventi la stessa origine . Per calcolare la loro somma $\vec{s}$ si sceglie un qualsiasi punto **O** del piano individuato dai vettori $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$. Si costruiscono i **vettori equipollenti** $A - O = \vec{a}_2$ $\quad B - O = \vec{a}_1$

$\vec{s}$ si ottiene applicando la **regola del parallelogramma** .



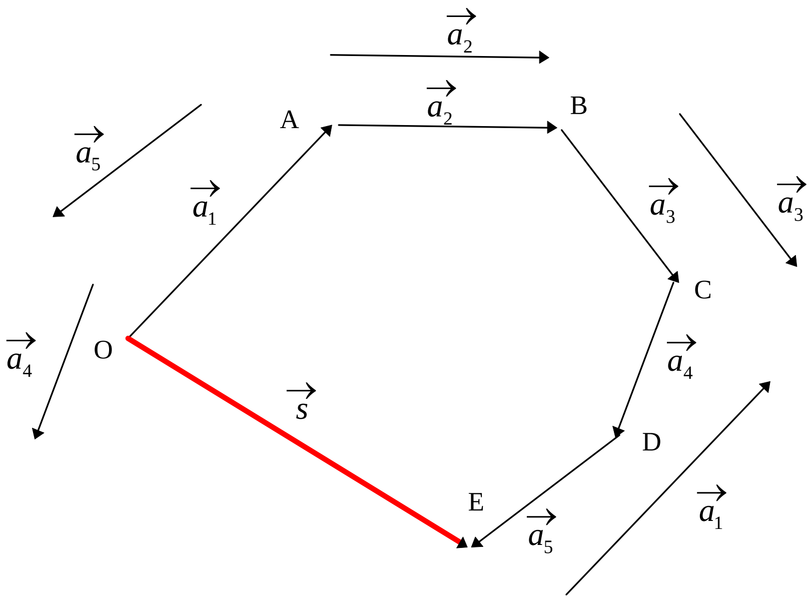
Somma di più vettori liberi non consecutivi

Si definisce **somma** di **n** (5) vettori liberi complanari il vettore $\vec{s}$ così ottenuto :

Si sceglie in maniera arbitraria il punto **O** appartenente al piano individuato dagli **n** vettori e **si costruiscono i seguenti vettori a due a due consecutivi** :

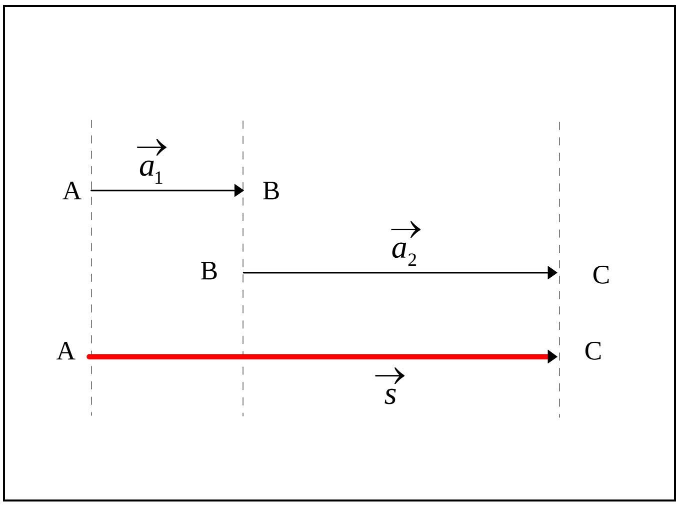
$A - O = \vec{a}_1$, $B - A = \vec{a}_2$, $C - B = \vec{a}_3$, $D - C = \vec{a}_4$, $E - D = \vec{a}_5$

$$\boxed{\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 = E - O}$$



Somma di vettori paralleli

1) **Vettori equiversi**



$$\boxed{\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = C - A}$$

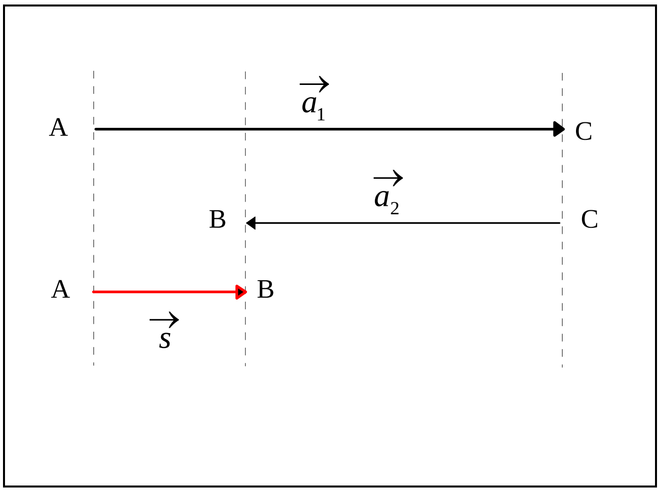
Il vettore $\vec{s}$ ha :

1) la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

2) lo stesso verso di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

3) come **modulo** la somma dei moduli dei vettori $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

2) **Vettori aventi versi opposti**



$$\boxed{\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = B - A}$$

Il vettore $\vec{s}$ ha :

1) la stessa direzione di $\vec{a}_1$ ed $\vec{a}_3$

2) modulo uguale alla differenza tra il modulo maggiore ed il modulo minore

3) verso del vettore che ha modulo maggiore

3) **Vettori opposti**

La **somma di due vettori opposti** (vettori aventi la stessa direzione , lo stesso modulo e versi opposti) è il **vettore nullo** , cioè : $\boxed{\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{o}}$

L ' **opposto** del vettore $\vec{a}$ si indica col simbolo $-\vec{a}$.

Sottrazione vettoriale

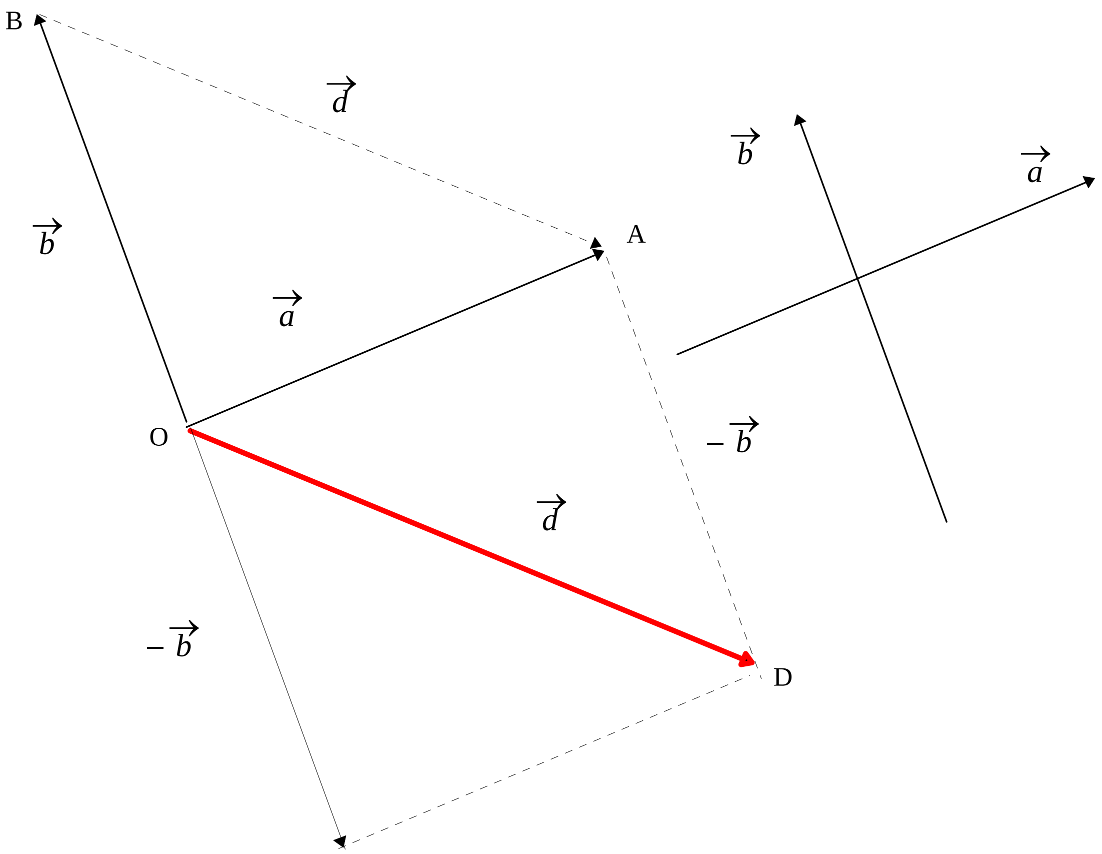
Si chiama **differenza** fra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a} - \vec{b}$ il vettore $\vec{d}$ che si ottiene addizionando ad $\vec{a}$ l'opposto di $\vec{b}$, cioè : $\boxed{\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{d}}$

$\vec{d}$ è un vettore che ha come **origine** l'estremo di $\vec{b}$ e come **estremo** l'estremo di $\vec{a}$.

$\vec{d}$

$$\boxed{\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (A - O) + (D - O) = C - O = A - O}$$

N.B. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non hanno lo stesso punto di applicazione allora da un generico punto **O** del piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si costruiscono i vettori equipollenti rispettivamente ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Il problema è ricondotto a quello precedentemente trattato .



Prodotto di un numero reale per un vettore

Se **k** è un numero reale qualsiasi ed $\vec{a}$ un vettore , si definisce **prodotto** di **k** per $\vec{a}$ e si designa col simbolo $k\,\vec{a}$ il vettore $\vec{p}$ che ha :

1) la stessa direzione di $\vec{a}$

2) lo stesso verso di $\vec{a}$ se **k** è **positivo** e verso opposto ad $\vec{a}$ se **k** è **negativo**

3) come **modulo** il prodotto del modulo di $\vec{a}$ per il valore assoluto di **k** , cioè : $|\vec{p}| = |k|\cdot|\vec{a}|$

$$\boxed{\vec{p} = k\,\vec{a}}$$

Rapporto di due vettori paralleli

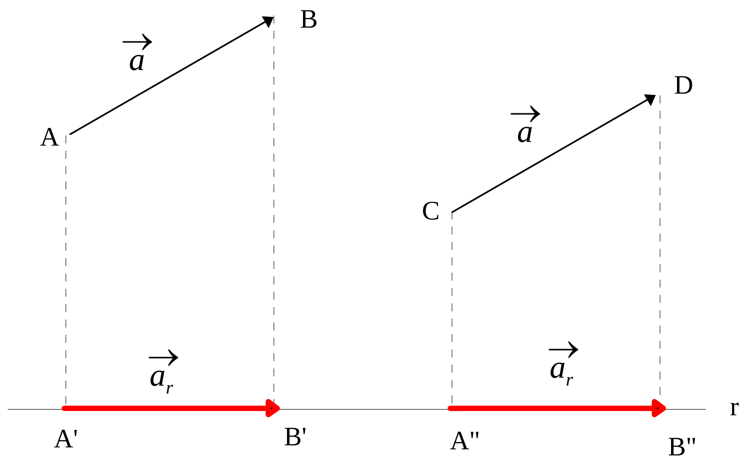
dati il numero reale **k** ed il vettore $\vec{a}$, abbiamo definito il vettore $\vec{p} = k\,\vec{a}$. Viceversa dati i vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ possiamo definire il numero reale relativo **k** come rapporto dei vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$, cioè : $\boxed{k = \dfrac{\vec{p}}{\vec{a}}}$

Risulta così giustificata la seguente definizione :

<< **Il rapporto di due vettori paralleli $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ è il numero reale relativo k avente come modulo il rapporto dei moduli di $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ e per segno + o - a seconda che $\vec{p}$ ed $\vec{a}$ siano equiversi oppure opposti** >> . Possiamo scrivere : $\boxed{\vec{p} = k\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\vec{p}}{\vec{a}}}$

La decomposizione di un vettore lungo due direzioni non orientate

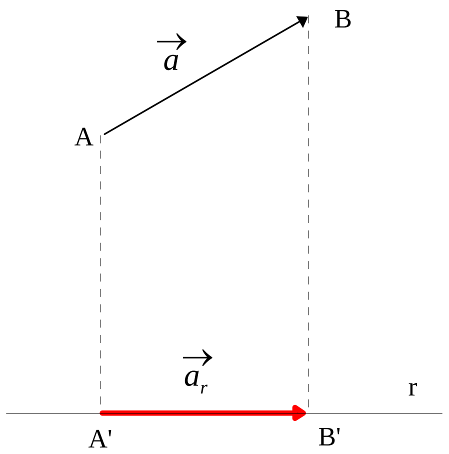
Siano $\vec{a}$ un **vettore libero** rappresentato , ad esempio , dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ ed **r** una qualsiasi retta complanare con $\vec{a}$. Siano A' e B' rispettivamente le proiezioni ortogonali di **A** e **B** sulla retta **r** . Il vettore $\boxed{B' - A' = \vec{a}_r}$ dicesi **il componente** di $\vec{a}$ secondo la retta r .

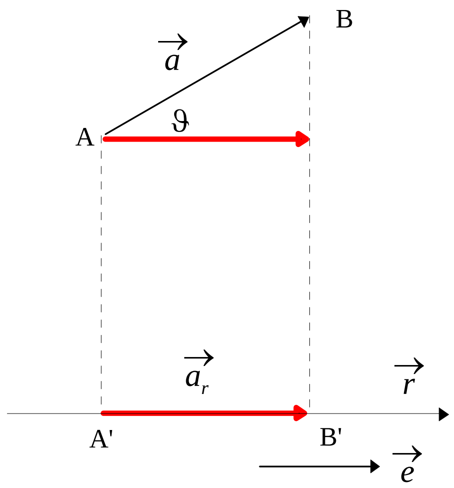


$\vec{a}_r$ è **il componente** del vettore libero $\vec{a}$ secondo la retta non orientata r

Noi sappiamo che il **versore** di una retta orientata è il vettore $\vec{e}$ avente modulo unitario e direzione e verso di $\vec{r}$. Consideriamo una retta orientata $\vec{r}$ di versore $\vec{e}$. La componente del **vettore libero** $\vec{a}$, non ortogonale ad $\vec{r}$, secondo la retta orientata $\vec{r}$ è il numero reale relativo a_r definito dal seguente rapporto : $\boxed{a_r = \frac{\vec{a}_r}{\vec{e}}}$

Pertanto tra **il componente** $\vec{a}_r$ di un **vettore libero** $\vec{a}$ secondo la retta non orientata **r** e **la componente** dello stesso vettore secondo la medesima retta orientata $\vec{r}$ (cioè di versore $\vec{e}$) sussiste la relazione : $\boxed{\vec{a}_r = a_r \cdot \vec{e}}$

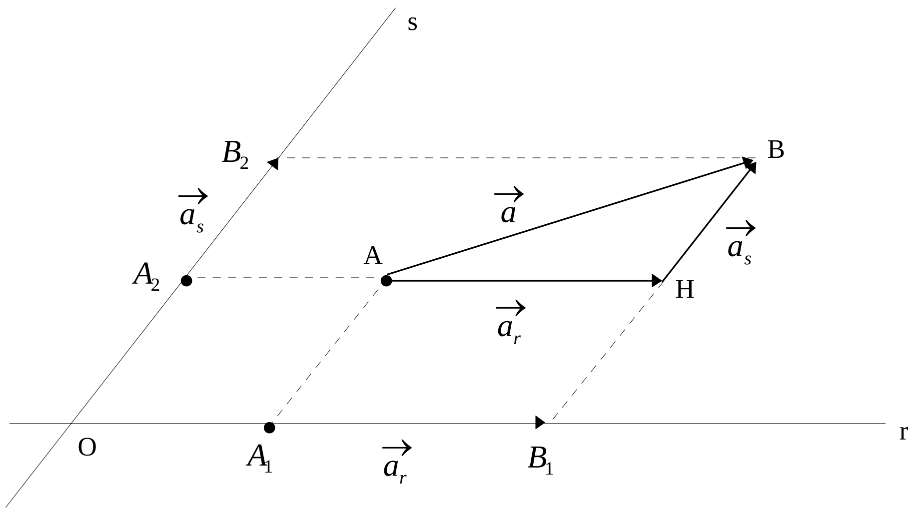




Siano **r** ed **s** due rette non orientate complanari . Sia **O** il loro punto d'intersezione . Sia $\vec{a}$ un vettore non nullo del piano $r\,s$, di tipo qualsivoglia , cioè libero o applicato in un punto o lungo la sua retta d'azione . $\overrightarrow{AB}$ sia un segmento orientato rappresentativo del vettore $\vec{a}$. Dai punti A e B tracciamo le rette parallele ad **r** ed **s** . Otteniamo i punti A_1 , A_2 , B_1 , B_2 e la seguente relazione vettoriale : $\vec{a} = B - A = (H - A) + (B - H) = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2)$ cioè :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_s}$$

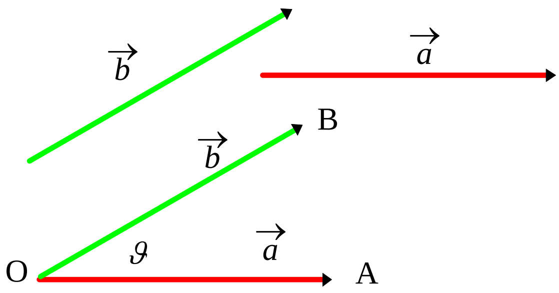
I vettori $\vec{a}_r$ ed $\vec{a}_s$ si dicono i **componenti** del vettore $\vec{a}$ secondo le due direzioni non orientate **r** ed **s** .



Angolo di due vettori complanari

Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due qualsiasi vettori liberi del piano euclideo π. Per un qualsiasi punto **O** di π tracciamo due segmenti orientati , $A - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{a}$, $B - O$ equipollente al segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{b}$.

Risulta : $A - O = \vec{a}$, $B - O = \vec{b}$



L'angolo convesso $A\hat{O}B = \vartheta$ così ottenuto è l'angolo formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si indica con uno dei seguenti simboli : $ang(\vec{a},\vec{b})$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$, $(\vec{a},\vec{b})$

Vettore posizione

Dicesi **vettore posizione** all'istante t il vettore $\vec{r}(t)$ che ha come origine un punto fisso O (che potrebbe essere l'origine di un riferimento cartesiano) e come estremo la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t . Dicesi **vettore spostamento** relativo all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore $P(t_1) - P(t)$ che ha come origine la posizione $P(t)$ occupata dal mobile all'istante t e come estremo la posizione $P(t_1)$ occupata dal mobile all'istante t_1 . Risulta :

$$\boxed{P(t_1) - P(t) = \Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}}$$

Velocità vettoriale media ed istantanea

La posizione di un punto materiale che percorre la traiettoria ℓ può essere individuata o dall'ascissa curvilinea **s** o dal vettore posizione $\vec{r} = \vec{r}(t) = P - O$. Il vettore posizione $\vec{r}$ varia al variare del tempo t ; si dice che $\vec{r}$ è funzione del tempo e si scrive : $\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)}$

Quando il punto mobile $P(t)$ passa dalla posizione $P(t)$ alla posizione $P(t_1)$ si dice che subisce nel tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ lo spostamento : $\boxed{\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_1) - \vec{r}(t) = \vec{r}_1 - \vec{r}}$

cioè $\Delta \vec{r}$ è il **vettore spostamento** relativo all ' intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definiamo *velocità vettoriale media* del punto materiale mobile relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore $\vec{v}_m$ definito dalla seguente relazione vettoriale :

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La grandezza $\vec{v}_m$ è una grandezza vettoriale perché ottenuta dal rapporto tra il vettore $\Delta \vec{r}$ e lo scalare Δt . Essa è pertanto caratterizzata da un modulo , da una direzione e da un verso .

La velocità vettoriale istantanea è il vettore $\vec{v}(t)$ che ha :

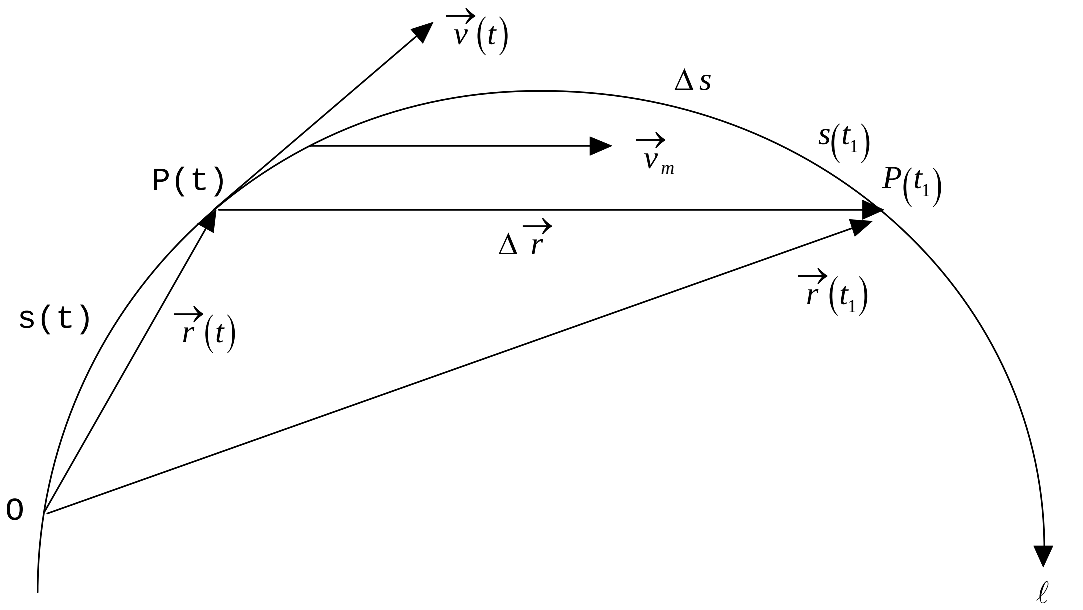
1) come **origine** il punto $P(t)$

2) come **direzione** la retta tangente alla traiettoria ℓ nel punto **P**

3) come **verso** quello del moto che può anche non coincidere col verso fissato arbitrariamente

sulla traiettoria ℓ

4) come **modulo** il valore assoluto della velocità scalare istantanea calcolata all'istante t



ℓ = traiettoria descritta dal punto mobile

$P(t)$ = posizione del mobile all ' istante t , $P(t_1)$ = posizione del mobile all'istante t_1

$\vec{r}(t_1)$ = vettore posizione all' istante t_1 , $\vec{r}(t)$ = vettore posizione all' istante t

$\vec{r}(t_o) = \vec{r}_o$ = vettore posizione all' istante iniziale

$s(t)$ = ascissa curvilinea del mobile all ' istante t

$s(t_1)$ = ascissa curvilinea del mobile all ' istante t_1

Osservazioni

- La velocità vettoriale $\vec{v}$ può variare perché cambia la sua direzione o perché cambia il suo modulo o perché cambiano entrambi .

- a) Se il modulo del vettore $\vec{v}$ rimane costante mentre varia la sua direzione , allora il moto è **curvilineo uniforme**

b) Se la direzione di $\vec{v}$ è costante , allora il moto è **rettilineo**

c) Se $\vec{v}$ si mantiene costante in modulo , direzione e verso allora il moto è **rettilineo uniforme**

Accelerazione vettoriale media ed istantanea

Un punto materiale in movimento possiede **accelerazione vettoriale** quando la sua velocità vettoriale $\vec{v}$ muta in almeno uno dei tre elementi che la caratterizzano , cioè : in **modulo , direzione , verso** .

Supponiamo che all'istante **t** il punto materiale occupi la posizione $P(t)$ ed abbia velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ e che all'istante $t_1 > t$ sia nella posizione $P(t_1)$ con velocità vettoriale $\vec{v}(t_1)$.

Definiamo **accelerazione vettoriale media** del punto materiale relativa all'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ il vettore $\vec{a}_m$ definito dalla seguente relazione vettoriale :

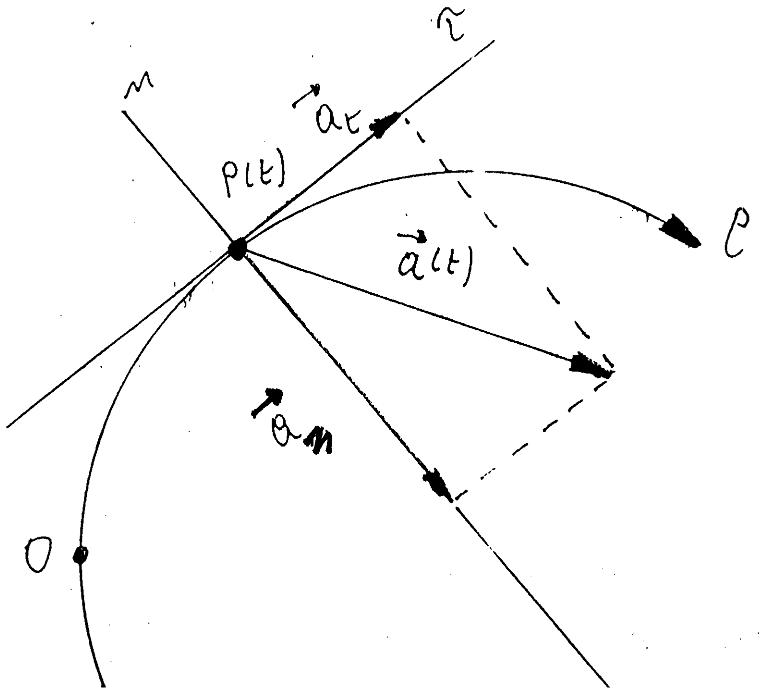
$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t)}{t_1 - t} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

Il vettore $\vec{a}_m$ viene introdotto come primo passo per la definizione di **accelerazione vettoriale istantanea** . Definiamo **accelerazione vettoriale istantanea** l'accelerazione vettoriale media relativa ad un intervallo di tempo piccolissimo . Con parole diverse possiamo dire che l ' *accelerazione vettoriale istantanea* $\vec{a}(t)$ è la posizione limite del vettore $\vec{a}_m$ quando $t_1 \to t$.

In generale il vettore $\vec{a}(t)$ non risulta né tangente né ortogonale alla traiettoria ℓ , per cui è utile e conveniente decomporlo lungo la tangente t e la normale n alla traiettoria ℓ nel punto $P(t)$.

Si ottiene : $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$

Il componente di $\vec{a}$ lungo la tangente τ prende il nome di **accelerazione tangenziale** ed indica la rapidità della variazione del modulo della velocità vettoriale . Quindi $\vec{a}_t$ determina unicamente una **variazione nel modulo della velocità vettoriale** . Il modulo di $\vec{a}_t$ coincide col valore assoluto dell'accelerazione scalare istantanea : Inoltre $\vec{a}_t$ risulta parallelo a $\vec{v}$, rispetto al quale può avere verso concorde o discorde .Il componente $\vec{a}_n$ del vettore $\vec{a}$ lungo la normale n alla traiettoria ℓ prende il nome di **accelerazione normale** o *centripeta* o radiale ed indica la rapidità di variazione della direzione della velocità vettoriale .



Quindi $\vec{a}_n$ determina unicamente una variazione nella direzione della velocità vettoriale $\vec{v}(t)$. Il vettore $\vec{a}_n$ è perpendicolare alla traiettoria ℓ ed è diretto verso il **centro di curvatura** della traiettoria stessa .

Si dimostra che : $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

dove **v** è la velocità scalare all'istante t , e ρ è il **raggio di curvatura** della traiettoria ℓ relativo al punto $P(t)$.

Se la traiettoria ℓ è una circonferenza di raggio r abbiamo : $a_n = \dfrac{v^2}{r}$

Osservazioni

- L'accelerazione vettoriale $\vec{a}(t)$ varia se muta almeno uno dei tre elementi (modulo , direzione , verso) che la caratterizzano .
- $\vec{a} = \vec{o} \Rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{o} \Rightarrow \vec{v}(t_1) = \vec{v}(t) \Rightarrow \vec{v}(t)$ costante in modulo , direzione e verso .

Siamo in presenza del **moto rettilineo uniforme** .

- Se $\vec{a}_n \neq \vec{o}$ allora la velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ muta la sua direzione . Questo vuole dire che , istante per istante , muta la tangente alla traiettoria ℓ e questo è possibile solo se ℓ è una curva .

Quindi $\vec{a}_n \neq \vec{o} \Rightarrow$ un **moto curvilineo**

- Una accelerazione si dice **tangenziale** quando la sua direzione coincide con quella della velocità vettoriale , cioè dello spostamento , cioè con la direzione del moto , si dice **normale o radiale o**

centripeta quando la sua direzione è perpendicolare alla direzione dello spostamento ossia alla direzione del moto , ossia alla traiettoria ℓ , ossia alla velocità vettoriale .

- Per **direzione del moto** all'istante t intendiamo la retta tangente alla traiettoria nel punto $P(t)$.

- I vari tipi di moto possono essere classificati in relazione ai componenti $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_n$.

	a_t	a_n	tipo di moto
1	$a_t = 0$	$a_n = 0$	**rettilineo uniforme**
2	$a_t = \cos t$	$a_n = 0$	**rettilineo uniformemente vario**
3	$a_t = f(t)$	$a_n = 0$	**rettilineo vario**
4	$a_t = 0$	$a_n = \cos t$	**circolare uniforme**
5	$a_t = 0$	$a_n = f(t)$	**curvilineo uniforme**
6	$a_t = \cos t$	$a_n \neq 0$	**curvilineo uniformemente vario**
7	$a_t = f(t)$	$a_n \neq 0$	**curvilineo vario**

$\vec{a}_n = \vec{o}$ il moto è **rettilineo** , $\vec{a}_n \neq \vec{o}$ il moto è **curvilineo**

Ulteriori considerazioni sui moti accelerati e sui moti ritardati

Da un punto di vista vettoriale possiamo dire che un moto è **accelerato** (*ritardato*) quando i vettori $\vec{a}$ e $\vec{v}$ formano un **angolo acuto** (*ottuso*) , cioè :

$$\left(\vec{a} , \vec{v}\right) = \vartheta \quad \text{angolo acuto} \iff \textbf{moto accelerato}$$

$$\left(\vec{a} , \vec{v}\right) = \vartheta \quad \textit{angolo ottuso} \iff \textbf{moto decelerato}$$

Con parole diverse possiamo dire che un moto è accelerato **(** *ritardato* **)** se i vettori $\vec{a}_t$ e $\vec{v}$ sono **equiversi** (*hanno versi opposti*)

Caduta dei gravi nel vuoto

La terra imprime ad un corpo libero una accelerazione $\vec{g}$ detta accelerazione di gravità .

In prossimità della superficie terrestre il modulo di $\vec{g}$ può ritenersi costante ($g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$) mentre il vettore $\vec{g}$ è diretto sempre verso il centro della terra . Un corpo soggetto all'azione della terra prende il nome di **grave** Consideriamo il moto di un grave che , partendo dalla quiete , cade liberamente verso il centro della terra .

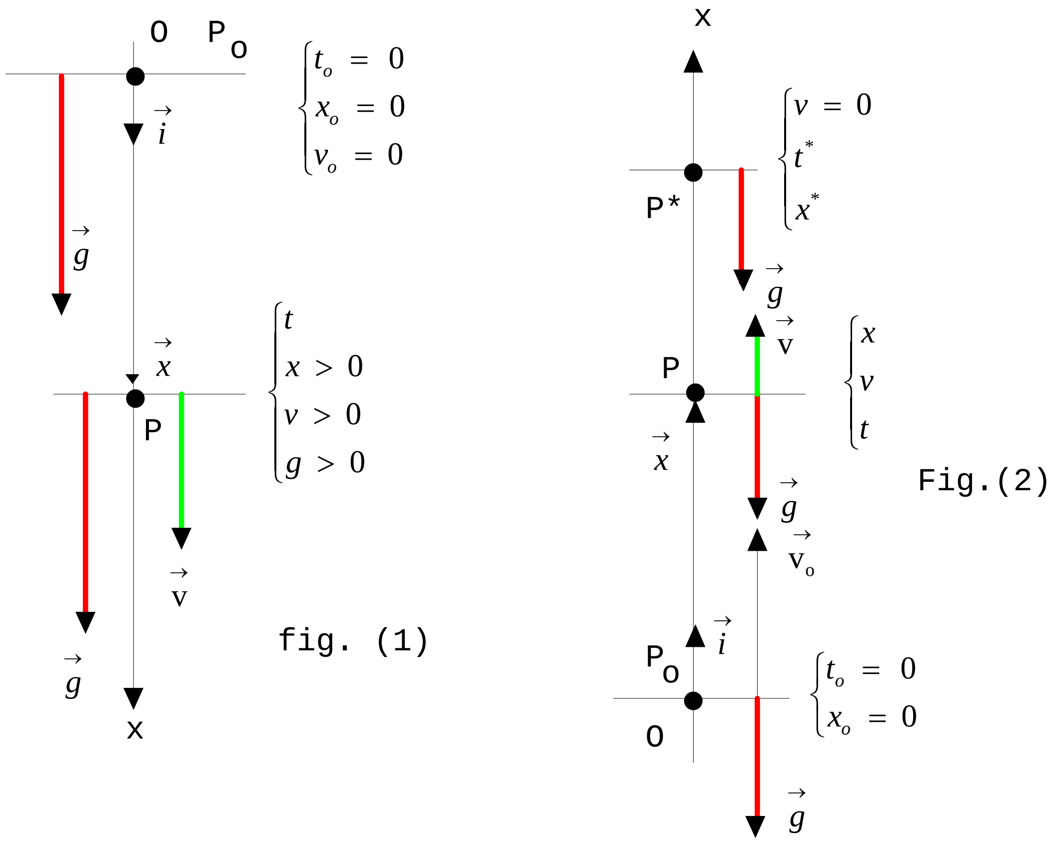


fig. (1) Fig.(2)

Se la traiettoria è orientata come nella fig. (1) valgono le seguenti relazioni scalari :

$$\begin{cases} v = gt \\ x = \dfrac{1}{2} g t^2 \\ v = \sqrt{2gx} \end{cases}$$

In questo caso risultano positivi i valori delle grandezze scalari x , v , g . :

Consideriamo adesso il moto di un grave lanciato verso l'alto con una velocità iniziale $\vec{v}_o \neq \vec{o}$.

Se la traiettoria è orientata come nella figura (2) valgono le seguenti relazioni scalari :

Si ottengono le seguenti relazioni scalari :

$$\begin{cases} v = v_o + gt \\ x = v_o t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_o^2 + 2gx \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 , v > 0 \\ g < 0 , v_o > 0 \\ g = -9{,}8 \ \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

Se invece supponiamo che sia : g = 9,8 m/s^2 allora le precedenti relazioni diventano :

$$\begin{cases} v = v_o - gt \\ x = v_o t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v^2 = v_o^2 - 2gx \end{cases}$$

La misura degli angoli in radianti

Un angolo $\alpha = a\hat{o}b$ lo possiamo considerare sempre come angolo al centro di due (o più) circonferenze concentriche di raggi arbitrari OA ed OA' . Detti AB ed $A'B'$ gli archi corrispondenti , per un noto teorema di geometria euclidea , possiamo scrivere :

$AB : A'B' = OA : OA'$ ed anche : $\boxed{\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \alpha^R}$

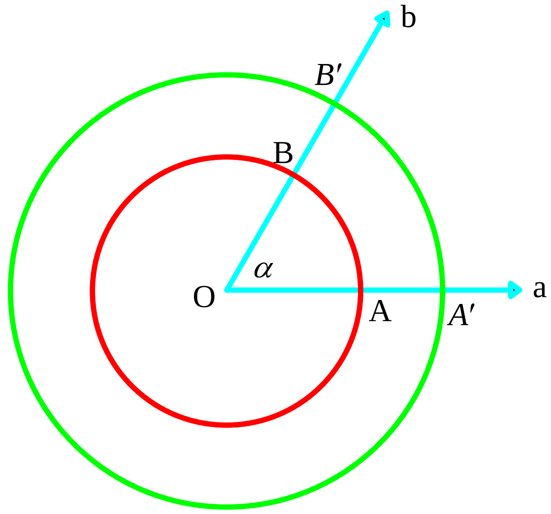
cioè il rapporto tra l ‘ arco (individuato su una circonferenza qualsiasi di centro O) ed il rispettivo raggio dipende esclusivamente dall’angolo e non dalla circonferenza considerata .

Tale rapporto (indicato col simbolo α^R) si assume come misura dell’angolo in radianti .

L’angolo $a\hat{o}b$ individua su una circonferenza di centro **O** e raggio **r** un arco MN di lunghezza ℓ .

Il rapporto $\boxed{\alpha^R = \frac{\ell}{r}}$ **[1]** , misura in radianti dell’angolo $a\hat{o}b$, dicesi anche misura in radianti dell’arco $MN = \ell$.

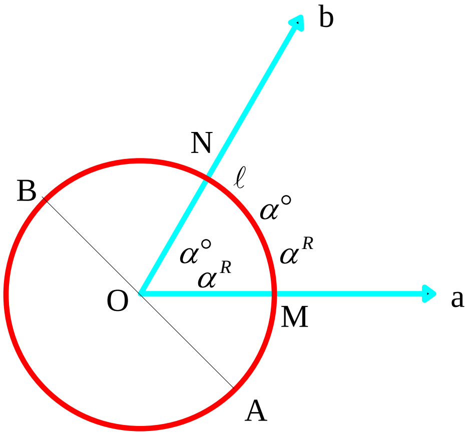
Se l’arco MN rettificato è lungo quanto il raggio della circonferenza cui appartiene abbiamo $\ell = r$ e quindi : $\alpha^R = \frac{r}{r} = 1 radiante = 1^R$ cioè l ‘ **arco radiante** è quell’arco lungo quanto il raggio della circonferenza che lo contiene . Di conseguenza l ' **angolo radiante** è quell'angolo che , posto col vertice nel centro di una qualsiasi circonferenza , sottende un arco lungo quanto il raggio .



La misura (α^R) in radianti di un angolo o di un arco è un numero puro in quanto rapporto di due grandezze (**lunghezze**) omogenee.
La misura di un angolo (arco) in **radianti** è detta **misura ciclometrica** dell'angolo (arco) .
La **misura ciclometrica** di un arco coincide con la **misura ciclometrica** del corrispondente angolo al centro . Dalla [1] ricaviamo :

$$\boxed{\ell = \alpha^R \cdot r} \qquad [2]$$

cioè moltiplicando il raggio per la misura in radianti dell'arco si ottiene la lunghezza dell'arco stesso . Vediamo adesso come si fa a passare dalla misura di un angolo in gradi a quella in radianti e viceversa .



La geometria euclidea ci insegna che gli archi (di uguale raggio) sono direttamente proporzionali ai rispettivi angoli al centro per cui possiamo scrivere la seguente proporzione :

$$MN : AB = M\hat{O}N : A\hat{O}B \qquad \textbf{[3]} \qquad \boxed{\ell : \pi r = \alpha° : 180°}$$

$$\left(\ell = \pi r \cdot \frac{\alpha°}{180°} \right)$$

Ma : $\boxed{\ell = \alpha^R \cdot r}$ per cui abbiamo : $\alpha^R \cdot r : \pi r = \alpha° : 180°$ $\boxed{\alpha^R : \pi = \alpha° : 180°}$ cioè :

[4] $$\boxed{\alpha^R = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi} \qquad \boxed{\alpha° = \frac{\alpha^R}{\pi} \cdot 180°}$$ **[5]**

La misura in radianti di un angolo la cui misura in gradi è **1** la si ottiene ponendo nella [4] 1° al posto di $\alpha°$, cioè :

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745 \cdots radianti}$$

la misura in gradi di un angolo la cui misura in radianti è **1** la si ottiene ponendo nella [5] 1^R al posto di α^R , cioè : $\boxed{1^R = \dfrac{180°}{\pi} = 57°17'44'',806\cdots}$

Moti periodici

- Un punto materiale si muove di **moto periodico** quando , ad ogni intervallo costante di tempo **T** , riassume le medesime caratteristiche cinematiche , cioè passa per lo stesso punto con la stessa **velocità vettoriale** e la stessa *accelerazione vettoriale* .
- Il tempo **T** è detto **periodo** e rappresenta il tempo necessario perché il mobile passi due volte di seguito per uso stesso punto con le medesime caratteristiche cinematiche .
- Nei moti periodici ha importanza una grandezza fisica detta **frequenza** definita come il rapporto cotante fra il numero **n** di **eventi periodici** che si verificano nel tempo **t** ed il tempo t , cioè :

$$f = \nu = \frac{n}{t} = \frac{\text{numero di eventi periodici che si verificano nel tempo t}}{t}$$

La frequenza di un moto periodico è unitaria , cioè di un **hertz** (**Hz**) se l'evento periodico si verifica in un secondo .

- $n = 1 \Rightarrow t = T \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \nu = \dfrac{1}{T}} \qquad \boxed{f \cdot T = 1} \qquad \boxed{\nu \cdot T = 1}$

<< ***In ogni moto periodico la frequenza è l'inverso del periodo*** >>

- Nel **moto circolare uniforme** l ' evento periodico consiste nel descrivere una intera circonferenza ; pertanto la frequenza di **1 Hz** significa che il punto materiale P descrive una intera circonferenza in un secondo . $f = \nu = \dfrac{\text{numero di circonferenze descritte nel tempo t}}{\text{t}}$

$\nu = 25\ Hz$ significa che il punto P percorre in un secondo 25 volte la circonferenza

- Nel **moto armonico semplice** l'evento periodico consiste nel descrivere una oscillazione completa (o ciclo) e quindi la frequenza di **1 Hz** significa che il punto P descrive una oscillazione completa in un secondo .

Moto circolare uniforme

- E' il moto di un punto che descrive una circonferenza con accelerazione tangenziale nulla e quindi con velocità vettoriale $\vec{v}(t)$ avente modulo costante e direzione variabile istante per istante .

In un moto circolare uniforme la velocità scalare (detta anche velocità periferica o velocità lineare) si mantiene costante .

- In un qualsiasi moto circolare uniforme sono valide le seguenti relazioni :

$$a_t = 0 \ , \ \mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = \omega r \ , \ a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \omega^2 r \ , \ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

- Il *moto circolare uniforme* è un **moto periodico** in quanto dopo **T** secondi ritorna in A con la stessa velocità vettoriale e con la stessa accelerazione vettoriale che aveva all'istante iniziale .

Quindi :

T = **periodo** = tempo impiegato dal mobile a percorrere una intera circonferenza = tempo necessario perché si riproducano le condizioni iniziali (stessa posizione , stessa velocità , stessa accelerazione)

$f = \nu = \frac{1}{T}$ = **frequenza** = numero di giri compiuti dal mobile in un secondo

$t = T \Rightarrow s = 2\pi r$ e quindi : $\boxed{\mathrm{v} = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = \omega r}$

- Il vettore $P - O = \vec{OP} = \vec{r}$ è detto **raggio vettore** (o *vettore posizione*) . Esso nel tempo **t** descrive l'angolo ϑ . Definiamo **velocità angolare media** del punto P o del raggio vettore $P - O = \vec{OP} = \vec{r}$ la grandezza fisica definita dal seguente rapporto : $\omega_m = \frac{\vartheta}{t}$

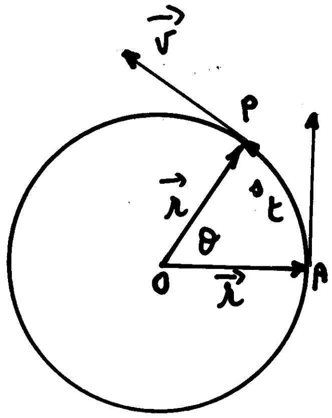
cioè l'angolo ϑ descritto dal raggio vettore $\vec{r}(t)$ nel tempo t riferito al tempo stesso .

Nel nostro caso *la velocità angolare è costante* e quindi coincide con quella media , per cui possiamo scrivere : $\boxed{\omega = \frac{\vartheta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$

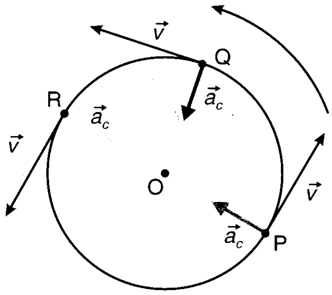
in quanto nel tempo **T** il raggio vettore $\vec{r}(t)$ descrive l'angolo 2π .

$$\mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\nu = \omega r$$

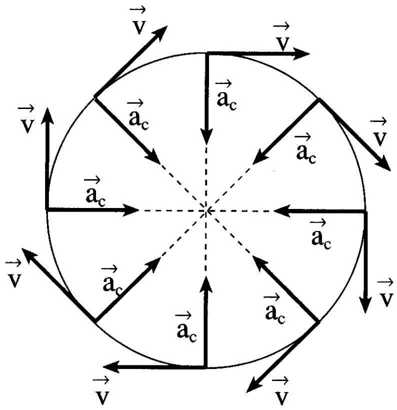
- Poiché il modulo di $\vec{\mathrm{v}}(t)$ è costante , il punto **P** non possiede accelerazione tangenziale ma soltanto accelerazione centripeta $\vec{a}_n$ il cui modulo vale : $a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \omega^2 r$



Moto circolare uniforme : mentre il punto materiale P ruota sulla circonferenza di centro O e raggio r , il raggio vettore $\vec{r}(t)$ ruota attorno al centro O .



Vettore accelerazione nel moto circolare uniforme : il **vettore accelerazione centripeta** $\vec{a}_c$ risulta in ogni punto perpendicolare al **vettore velocità** $\vec{v}(t)$. Inoltre $\vec{a}_c$ risulta rivolto sempre verso il centro O della circonferenza . Il modula di $\vec{a}_c$ è costante .



Moto circolare uniforme

velocità vettoriale ed **accelerazione centripeta** in diversi punti .

Problema

Determinare l'ora in cui, per la prima volta dopo mezzogiorno, le due lancette di un orologio tornano a sovrapporsi.

Risoluzione

Tanto la lancetta dei minuti primi (la cui velocità angolare è ad esempio ω_2) quanto quella delle ore (la cui velocità angolare è ad esempio $\omega_1 < \omega_2$) si muovono di moto circolare uniforme. Nel tempo t la prima descrive l'angolo $\theta_2 = \omega_2 t$, la seconda l'angolo $\theta_1 = \omega_1 t$. Le due lancette si sovrappongono quando:

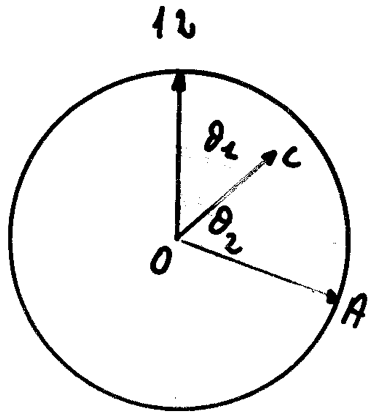
$$\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$$

$$\omega_2 t - \omega_1 t = 2\pi \; ; \; t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{60} - \frac{2\pi}{12 \cdot 60}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{60} - \frac{1}{12 \cdot 60}} = \frac{12 \cdot 60}{11} \text{ primi} = \left(\frac{720}{11}\right)' = (65,45)' =$$

$$= 1^h\, 5'\, 27'' \text{ in quanto}$$

$$\left(\frac{45}{100}\right)' = \left(\frac{45}{100} \cdot 60\right)'' = 27'' \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



OC : lancetta delle ore

OA : lancetta dei minuti primi

$A\hat{O}B = \theta_2 \qquad C\hat{O}B = \theta_1$